

ОБ ИТЕРАЦИЯХ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО  
ОПЕРАТОРА КОШИ-ФАНТАППЬЕА.М. КЫТМАНОВ, С.Г. МЫСЛИВЕЦ 

**Abstract:** Let  $D$  be a bounded domain in  $\mathbb{C}^n$  ( $n > 1$ ) with a connected infinitely smooth boundary  $\Gamma$ , and the function  $f$  is harmonic in  $D$  and of class  $\mathcal{C}^1(\bar{D})$ . For a vector field  $w$  (not lying in the complex tangent plane to  $\Gamma$ ) the differential condition  $\bar{w}(f) = \sum_{k=1}^n \bar{w}_k \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0$  by  $\Gamma$  is considered. Will  $f$  be holomorphic in  $D$ ? This problem is an analogue of the problem with an oblique derivative for real-valued harmonic functions. The paper shows that this problem is connected with a certain Cauchy-Fantappi  integral representation  $Q$ , the kernel of which consists of derivatives of the fundamental solution of the Laplace equation. Under some additional conditions on the vector field  $w$ , it is shown that the iterations of  $Q^m$  of this Cauchy-Fantappi  integral representation converge to a holomorphic function. By doing so the problem under consideration has a positive reply.

---

КЫТМАНОВ А.М., МЫСЛИВЕЦ С.Г. ON ITERATIONS OF ONE  
CAUCHY-FANTAPPI  INTEGRAL OPERATOR.

  2023 КЫТМАНОВ А.М..

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2025-1606) и фундаментальным проектом ИЛ-5421101746 Национального университета Узбекистана.

**Keywords:** integral representations of Cauchy-Fantappi  and Bochner-Martinelli, fundamental solution of the Laplace equation, eigenfunctions and eigenvalues, holomorphic continuation.

## 1 Введение

Метод интегральных представлений является одним из основных конструктивных методов при изучении голоморфных функций многих комплексных переменных. Особенно большую роль в многомерном комплексном анализе играет интегральное представление Бохнера-Мартинелли (см., например, монографии [1] – [4]). Его ядро является универсальным (не зависящим от вида области) и достаточно простым. Оно обладает многими свойствами ядра Коши на комплексной плоскости, за исключением голоморфности. Интеграл Бохнера-Мартинелли подробно рассмотрен в монографии [5]. Этот интеграл также тесно связано с классической теорией потенциала (см., например, [6]). В [5, Ch. 1] показано, что он является аналогом потенциала двойного слоя. Особенно большую роль интеграл Бохнера-Мартинелли играет в вопросах аналитического продолжения функций различных классов гладкости (см. [5, 7]).

Близко к представлению Бохнера-Мартинелли находится интегральное представление Коши-Фантаппье, рассмотренное в работе. Целью работы является исследование свойств этого интегрального представления, ядро которого состоит из производных фундаментального решения уравнения Лапласа. А именно, в работе рассматривается интеграл (интегральный оператор) с этим ядром для функций  $f$  (различных классов гладкости), заданных на границе ограниченной области  $D$  с гладкой связной границей  $\Gamma$ . Рассмотрены итерации данного интегрального оператора. Доказано, что они сходятся к голоморфной функции в  $D$  при  $k \rightarrow \infty$ .

## 2 Предварительные сведения

Рассмотрим  $n$ -мерное комплексное пространство  $\mathbb{C}^n$ ,  $n > 1$ , переменных  $z = (z_1, \dots, z_n)$ ,  $z_j = x_j + ix_{n+j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $x_j$  – вещественные числа. Введем модуль вектора  $|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}$  и дифференциальные формы  $dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$ ,  $d\bar{z} = d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n$ , а также  $dz[k] = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{k-1} \wedge dz_{k+1} \wedge \dots \wedge dz_n$ . Топология в  $\mathbb{C}^n$  определяется метрикой  $|z - w|$ .

Пусть  $D$  – ограниченная область в  $\mathbb{C}^n$  ( $n > 1$ ) с гладкой связной границей  $\partial D = \Gamma$  класса  $\mathcal{C}^\infty$ . Ориентация  $\Gamma$  согласована с областью  $D$ . Область задается следующим образом  $D = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$ , где  $\rho$  – вещественнозначная функция в некоторой окрестности замыкания области  $D$  класса  $\mathcal{C}^\infty$  и градиент  $\text{grad } \rho \neq 0$  на  $\Gamma$ . Во многих случаях достаточно только конечная гладкость границы. Тогда мы это будем отмечать.

Связность границы нужна в дальнейшем для возможности решения задачи Дирихле для гармонических функций (см., например, [8, Ch. 2]) и выполнимости теоремы Гартогса-Бохнера (см., например, [9]) для  $CR$ -функций на  $\Gamma$ .

Обозначим "комплексные" направляющие косинусы

$$\rho_k = \frac{1}{|\text{grad } \rho|} \frac{\partial \rho}{\partial z_k}, \quad \rho_{\bar{k}} = \frac{1}{|\text{grad } \rho|} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Отметим, что здесь имеется в виду "комплексный градиент"

$$\text{grad } \rho = \left( \frac{\partial \rho}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial \rho}{\partial z_n} \right).$$

Тогда

$$|\text{grad } \rho| = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{j=1}^{2n} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right)^2}. \quad (1)$$

Оператор Лапласа  $\Delta$  мы будем записывать в виде

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_k} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{n+k}^2} \right).$$

Рассмотрим ядро Бохнера–Мартинелли — внешнюю дифференциальную форму  $U(\zeta, z)$  типа  $(n, n-1)$  вида (см., например, [1] – [4], [5, Ch. 1], [7, Ch. 1])

$$U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}} d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta.$$

Это ядро играет важную роль в многомерном комплексном анализе (см., например, [1] – [5]). Оно является замкнутой дифференциальной формой с гармоническими коэффициентами. На комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  оно совпадает с ядром Коши.

Напомним вид интегрального представления Бохнера–Мартинелли (см., например, [1] – [5]).

**Теорема 1.** Если функция  $f \in \mathcal{C}(\bar{D})$  и голоморфна в  $D$ , то

$$f(z) = \int_{\Gamma} f(\zeta) U(\zeta, z), \quad z \in D.$$

Пусть  $g(\zeta, z)$  — фундаментальное решение уравнения Лапласа (см., например, [8]), т. е.

$$g(\zeta, z) = -\frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n} \frac{1}{|\zeta - z|^{2n-2}}, \quad n > 1,$$

тогда

$$U(\zeta, z) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\partial g}{\partial \zeta_k} d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta.$$

Для функции  $f \in \mathcal{L}^1(\Gamma)$  введем интеграл (интегральный оператор) Бохнера–Мартинелли

$$M[f](z) = \int_{\Gamma} f(\zeta) U(\zeta, z), \quad z \notin \Gamma,$$

а также потенциал (интегральный оператор) простого слоя

$$\Phi[f](z) = -i^n 2^{n-1} \int_{\Gamma} f(\zeta) g(\zeta, z) d\sigma(\zeta) = \frac{(n-2)!}{2\pi^n} \int_{\Gamma} f(\zeta) \frac{d\sigma}{|\zeta - z|^{2n-2}}, \quad z \notin \Gamma,$$

где  $d\sigma$  — поверхностная мера Лебега на  $\Gamma$ . Ясно, что  $M[f]$ ,  $\Phi[f]$  являются гармоническими функциями вне  $\Gamma$ .

Будем обозначать через  $M^+(f)$  интеграл Бохнера-Мартинелли внутри области  $D$ , а через  $M^-(f)$  интеграл Бохнера-Мартинелли вне  $\bar{D}$ . Точно также будем обозначать функции  $\Phi^+$  и  $\Phi^-$ .

Для интеграла Бохнера-Мартинелли хорошо известны (см., например, [5, Ch. 1], [7, Ch.1]) теоремы о скачке. Приведем одну из них.

**Теорема 2.** Пусть функция  $f \in C^1(\Gamma)$ , тогда функция  $M^+(f)$  непрерывно продолжается на замыкание области  $D$ , а функция  $M^-(f)$  непрерывно продолжается на  $\mathbb{C}^n \setminus D$  и выполнено равенство

$$M^+[f] - M^-[f] = f \quad \text{на } \Gamma.$$

Интеграл  $\Phi[f](z)$  для непрерывных на  $\Gamma$  функций скачка не имеет и является непрерывной функцией в  $\mathbb{C}^n$ .

Рассмотрим пространство Соболева  $\mathcal{W}_2^s(D)$ , где  $s \in \mathbb{N}$ . Это пространство состоит из функций  $F \in \mathcal{L}^2(D)$  таких, что все (слабые) производные  $\partial^\alpha F$  до порядка  $\|\alpha\| \leq s$  лежат в  $\mathcal{L}^2(D)$  (см., например, [8, Ch. 2]). Здесь  $\partial^\alpha$  означает производную

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_{2n}^{\alpha_{2n}}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}), \quad \|\alpha\| = \alpha_1 + \dots + \alpha_{2n}.$$

Топология в  $\mathcal{W}_2^s(D)$  вводится с помощью скалярного произведения

$$(F, G)_s = \sum_{\|\alpha\| \leq s} (\partial^\alpha F, \partial^\alpha G)_{\mathcal{L}^2(D)} = \sum_{\|\alpha\| \leq s} \int_D \partial^\alpha F \cdot \overline{\partial^\alpha G} dv,$$

где

$$dv = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{2n} = (i/2)^n dz \wedge d\bar{z} = (-i/2)^n d\bar{z} \wedge dz \quad (2)$$

— элемент объема в  $\mathbb{C}^n$  (черта над выражением означает комплексное сопряжение).

Положим  $\mathcal{W}_2^0(D) = \mathcal{L}^2(D)$ .

Введем также пространство  $\mathcal{W}_2^s(\Gamma)$  по аналогии с пространством  $\mathcal{W}_2^s(D)$ , используя разбиение единицы и локальную распрямляемость  $\Gamma$  (см., например, [8, Ch. 2]).

Далее, рассмотрим пространство  $\mathcal{W}_2^{s+\lambda}(\Gamma)$  для  $0 < \lambda \leq 1$ . Оно состоит из функций  $f \in \mathcal{W}_2^s(\Gamma)$ , для которых

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \sum_{\|\alpha\|=s} \frac{|\partial^\alpha f(z) - \partial^\alpha f(\zeta)|^2}{|\zeta - z|^{2n+2\lambda-1}} d\sigma(\zeta) d\sigma(z) < \infty.$$

Мы будем использовать следующие свойства этих пространств (см. [8, Ch. 2]):

1. Сужение функции  $f \in \mathcal{W}_2^s(D)$  на  $\Gamma$  принадлежит пространству  $\mathcal{W}_2^{s-1/2}(\Gamma)$  и оператор сужения непрерывен.

2. Если мы обозначим через  $\mathcal{G}_2^s(D)$  подпространство гармонических функций из  $\mathcal{W}_2^s(D)$ , то оператор сужения из  $\mathcal{G}_2^s(D)$  на  $\mathcal{W}_2^{s-1/2}(\Gamma)$  есть линейный топологический изоморфизм (формула (3.24) из [8]). А также справедливо следующее разложение

$$\mathcal{W}_2^s(D) = \mathcal{G}_2^s(D) \oplus \mathcal{N}_2^s(D),$$

где пространство  $\mathcal{N}_2^s(D)$  состоит из функций  $\mathcal{W}_2^s(D)$  равных 0 на  $\Gamma$ .

3. Существует компактное непрерывное вложение  $\mathcal{W}_2^s(D)$  в  $\mathcal{C}_b^k(D)$  при  $s > n + k$ , где  $\mathcal{C}_b^k(D)$  — пространство функций из  $\mathcal{C}^k(D)$ , имеющих ограниченные производные порядков не превосходящих  $k$  (см., например, [8, Theorem 3.1]).

4. Существует компактное непрерывное вложение  $\mathcal{W}_2^s(D)$  в  $\mathcal{W}_2^k(D)$  при  $s > k$ ,  $s < n$  (см., например, [8, Theorem 3.1]).

Гладкие функции плотны в пространствах Соболева (см., например, [10, Ch. 7]. Так подпространство  $\mathcal{C}^\infty(D) \cap \mathcal{W}_2^s(D)$  плотно в пространстве  $\mathcal{W}_2^s(D)$  ([10, Theorem 7.9]). Аналогичное свойство справедливо и в пространствах  $\mathcal{W}_2^s(\Gamma)$ .

Пусть  $\mathcal{O}_2^s(D)$  — пространство функций из  $\mathcal{W}_2^s(D)$  голоморфных в  $D$ . В работе [11] А.В.Романова доказано утверждение

**Теорема 3.** *Справедливо равенство*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M^k = P_{\mathcal{O}}, \quad (3)$$

в сильной операторной топологии пространства  $\mathcal{W}_2^1(D)$ , где  $P_{\mathcal{O}}$  — оператор ортогонального проектирования  $\mathcal{W}_2^1(D)$  на подпространство голоморфных функций  $\mathcal{O}_2^1(D)$ .

Это утверждение не может быть прямо перенесено на пространство  $\mathcal{W}_2^s(D)$  для  $s > 1$ . Пример 16.6 из [5] показывает, что равенство (3) невозможно для любых областей  $D$  и любых  $s$ . Тем не менее оно справедливо для любых  $s$  для шара (см. [12]).

Основными пространствами, в которых мы будем работать, будут пространство  $\mathcal{G}_2^s(D)$  и топологически изоморфное ему пространство  $\mathcal{W}^{s-1/2}(\Gamma)$ ,  $s \geq 1$ .

### 3 Постановка задачи

В дальнейшем мы будем рассматривать некоторое интегральное представление Коши-Фантаппье, возникающее при рассмотрении следующего дифференциального условия (см. [5, §23]). Пусть даны функция  $f \in \mathcal{C}^1(\bar{D})$  и векторное поле  $w(\cdot) = \sum_{k=1}^n w_k \frac{\partial \cdot}{\partial z_k}$ ,  $w_k \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , кроме того  $w(\rho) \neq 0$  на  $\Gamma$ , т.е.  $w$  не лежит в комплексном касательном пространстве  $T_z^c(\Gamma)$  для любой точки  $z \in \Gamma$ .

Сформулируем следующую задачу (см. [5, §23]).

**Задача 1.** *Пусть  $f \in \mathcal{C}^1(\bar{D})$  и гармоническая в  $D$ . Если*

$$\bar{w}(f) = \sum_{k=1}^n \bar{w}_k \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (4)$$

*то будет ли  $f$  голоморфной в  $D$ ?*

В отличие от касательных условий Коши-Римана в задаче 1 требуется обращение в нуль действия некасательного векторного поля  $\bar{w}$ . Данная задача является аналогом задачи с наклонной производной для вещественнозначных гармонических функций.

Если условие  $w(\rho) \neq 0$  на  $\Gamma$  не выполнено, то легко привести пример, когда при выполнении условия (4) функция  $f$  не будет голоморфной в  $D$  (см. [5, §23]).

Для некоторых весьма частных случаев задача 1 решена положительно в [5, §23].

Данную задачу можно переформулировать в следующем виде (см. [5, §23]). Пусть  $f \in C^1(\bar{D})$  и гармоническая в  $D$ , а дифференциальная форма

$$\mu_f = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_k} d\zeta[k] \wedge d\bar{\zeta}. \quad (5)$$

Дифференциальная форма  $\mu_f$  является замкнутой дифференциальной формой типа  $(n-1, n)$  для гармонических функций  $f$ .

**Задача 2.** Если

$$\mu_f|_{\Gamma} = i \sum_{k>l} a_{k,l}(z) df \wedge d\bar{z}[l, k] \wedge dz|_{\Gamma}, \quad (6)$$

где  $a_{k,l}$  — некоторые гладкие функции на  $\Gamma$ ,  $k, l = 1, \dots, n$ , а  $d\bar{z}[k, l]$  получается из дифференциальной формы  $d\bar{z}$  выбрасыванием дифференциалов  $d\bar{z}_k$  и  $d\bar{z}_l$ , то будет ли  $f$  голоморфной в  $D$ ?

Множитель  $i$  добавлен для удобства последующих вычислений.

Для дальнейшего изложения напомним формулу Грина (в комплексной форме) для функции  $f$  (Corollary 1.2 из [5]):

**Теорема 4** (формула Грина). Пусть  $D$  — ограниченная область с гладкой границей, функция  $f$  гармоническая в  $D$  и  $f \in C^1(\bar{D})$ , тогда

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) U(\zeta, z) - \int_{\Gamma} g(\zeta, z) \mu_f = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \bar{D}. \end{cases} \quad (7)$$

Если все функции  $a_{k,l} = 0$ , то задача 2 превращается в задачу о голоморфности функций, представимых интегралом Бохнера-Мартинелли (см. [5, §15]).

Используя равенство (6), получим

$$f(z) = \int_{\Gamma} f(\zeta) U(\zeta, z) - i \int_{\Gamma} g(\zeta, z) \sum_{k>l} a_{k,l}(\zeta) df \wedge d\bar{\zeta}[l, k] \wedge d\zeta, \quad z \in D. \quad (8)$$

Используя формулу Стокса и формулу Грина (7), в [5, §23] показано, что равенство (8) для функций  $f \in C^1(\bar{D})$  и гармонических в  $D$  эквивалентно условию

$$f(z) = \int_{\Gamma} f(\zeta) U(\zeta, z) + i \int_{\Gamma} f(\zeta) \sum_{k>l} d(a_{k,l}(\zeta) g(\zeta, z)) \wedge d\bar{\zeta}[l, k] \wedge d\zeta, \quad z \in D. \quad (9)$$

Второй интеграл (интегральный оператор) в (9) обозначим через

$$G[f](z) = i \int_{\Gamma} f(\zeta) \sum_{k>l} d(a_{k,l}(\zeta) g(\zeta, z)) \wedge d\bar{\zeta}[l, k] \wedge d\zeta, \quad z \notin \Gamma,$$

тогда  $f(z) = M[f](z) + G[f](z)$ . Заметим, что интеграл  $G[f](z)$  является гармонической функцией вне  $\Gamma$ . В  $\mathbb{C}^1$  интеграл  $G[f](z) = 0$ .

Вводя ядро

$$W(\zeta, z) = i \sum_{k>l} d(a_{k,l}(\zeta) g(\zeta, z)) \wedge d\bar{\zeta}[l, k] \wedge d\zeta,$$

получим, что для голоморфных функций  $f$  справедливо интегральное представление (Коши-Фанташье)

$$f(z) = \int_{\Gamma} f(\zeta) (U(\zeta, z) + W(\zeta, z)), \quad z \in D. \quad (10)$$

Таким образом задача 2 превращается в следующую задачу

**Задача 3.** Пусть функция  $f$  класса  $\mathcal{C}(\bar{D})$  удовлетворяет в области  $D$  равенству (10). Будет ли  $f$  голоморфна в  $D$ ? (см. [5, §23]).

В данной статье мы будем рассматривать только случай, когда все функции  $a_{k,l}(\zeta)$  являются  $CR$ -функциями. По теореме Гартогса-Бохнера (см., например, [9]) это означает, что все  $a_{k,l}(\zeta)$  голоморфно продолжаются в  $D$  до функций класса  $\mathcal{C}^1(\bar{D})$ .

Мы изучим свойства этого интеграла с ядром  $U(\zeta, z) + W(\zeta, z)$ , вычислим его итерации и найдем их предел. А также решим задачу 3 для рассматриваемого класса областей и функций.

Обозначим интегральный оператор  $M + G$  через  $Q$

$$Q[f](z) = \int_{\Gamma} f(\zeta)(U(\zeta, z) + W(\zeta, z)), \quad z \notin \Gamma. \quad (11)$$

Интеграл  $Q[f](z)$  является гармонической функцией вне  $\Gamma$ .

Покажем, что интегральное представление (10) является интегральным представлением Коши-Фанташье. Напомним вид представления Коши-Фанташье, полученного Лере в [13, 14] (см., также монографию [4, Ch. 1]).

Пусть  $D$  — ограниченная область с гладкой границей, для точки  $z \in D$  определена на  $\partial D$  гладкая вектор-функция  $\eta(\zeta, z) = (\eta_1(\zeta, z), \dots, \eta_n(\zeta, z))$  такая, что

$$(\eta, \zeta - z) = \sum_{k=1}^n (\zeta_k - z_k) \eta_k(\zeta, z) \neq 0, \quad \zeta \in \partial D.$$

**Теорема 5.** Для всякой функции  $f \in \mathcal{C}(\bar{D})$ , голоморфной в области  $D$ , справедливо равенство

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} f(\zeta) \omega(z - \zeta, \eta(\zeta, z)), \quad (12)$$

где

$$\omega(\zeta - z, \eta(\zeta, z)) = \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \eta_k d\eta[k] \wedge d\zeta}{(\eta, \zeta - z)^n}.$$

Интегральное представление (12) Лере назвал интегральным представлением Коши-Фанташье, а его ядро — ядром Коши-Фанташье.

Справедливо утверждение.

**Предложение 1.** Дифференциальная форма

$$U(\zeta, z) + W(\zeta, z)$$

является ядром Коши-Фанташье.

*Доказательство.* Для  $k > l$  рассмотрим дифференциальную форму

$$U(\zeta, z) + d(a(\zeta)g(\zeta, z)) \wedge d\bar{\zeta}[l, k] \wedge d\zeta$$

для некоторой гладкой  $CR$ -функции  $a(\zeta)$  на  $\Gamma$ . Эта форма также является ядром интегрального представления для голоморфных функций.

Введем вектор-функцию

$$\begin{aligned} \eta(\zeta, z) = \\ = (\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1, \dots, \bar{\zeta}_l + (-1)^{k+l} \frac{\partial(ag)}{\partial \bar{\zeta}_k} - \bar{z}_l, \dots, \bar{\zeta}_k + (-1)^{k+l-1} \frac{\partial(ag)}{\partial \bar{\zeta}_l} - \bar{z}_k, \dots, \bar{\zeta}_n - \bar{z}_n). \end{aligned}$$

Тогда  $(\eta, \zeta - z) = |\zeta - z|^2 \neq 0$ . Отсюда ясно, что ядро Коши-Фанташье для вектор-функции  $\eta$  будет совпадать с ядром

$$U(\zeta, z) + d(a(\zeta)g(\zeta, z)) \wedge d\bar{\zeta}[l, k] \wedge d\zeta.$$

Для дифференциальной формы  $U(\zeta, z) + W(\zeta, z)$  рассуждения аналогичны.  $\square$

#### 4 Производные некоторых интегральных операторов

В данном пункте мы приведем формулы для производных некоторых интегральных операторов (см. [5, Ch. 1], [16], [17]), полученные на основе классической теории потенциала (см. [6, Ch. 2], [15, гл. 14]).

Пусть область  $D$  имеет границу класса  $\mathcal{C}^2$  (т.е. функция  $\rho$  дважды гладкая в окрестности замыкания области  $D$ ). Пусть функция  $f \in \mathcal{C}^2(\Gamma)$  и функции  $a_{k,l} \in \mathcal{C}^2(\Gamma)$ ,  $k, l = 1, \dots, n$ .

Введем как и в статье [16] следующие дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} L_m(f) &= \frac{\partial f}{\partial \zeta_m} - \rho_m \sum_{k=1}^n \rho_k \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_k}, \\ K_m(f) &= i^n 2^{n-1} \sum_{s,k=1}^n \left[ \rho_k \frac{\partial}{\partial \zeta_s} \left( \rho_m \rho_{\bar{k}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_s} \right) - \rho_m \frac{\partial}{\partial \zeta_k} \left( \rho_m \rho_{\bar{k}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_s} \right) \right], \end{aligned}$$

соответственно,

$$\begin{aligned} L_{\bar{m}}(f) &= \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_m} - \rho_{\bar{m}} \sum_{k=1}^n \rho_k \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_k}, \\ K_{\bar{m}}(f) &= i^n 2^{n-1} \sum_{s,k=1}^n \left[ \rho_k \frac{\partial}{\partial \zeta_s} \left( \rho_{\bar{m}} \rho_{\bar{k}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_s} \right) - \rho_{\bar{m}} \frac{\partial}{\partial \zeta_k} \left( \rho_{\bar{m}} \rho_{\bar{k}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_s} \right) \right]. \end{aligned}$$

Тогда, согласно следствию 1 из [16], получим, что

$$\frac{\partial M[f]}{\partial z_m} = M[L_m(f)] - \Phi[K_m(f)],$$

$$\frac{\partial M[f]}{\partial \bar{z}_m} = M[L_{\bar{m}}(f)] - \Phi[K_{\bar{m}}(f)].$$

Аналогично, введем операторы

$$\begin{aligned} \tilde{L}_m(f) &= -f \rho_m, \\ \tilde{K}_m(f) &= +i^n 2^{n-1} \sum_{k=1}^n \left[ \rho_k \frac{\partial}{\partial \zeta_m} (f \rho_{\bar{k}}) - \rho_m \frac{\partial}{\partial \zeta_k} (f \rho_{\bar{k}}) \right], \end{aligned}$$

соответственно,

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{\bar{m}}(f) &= -f\rho_{\bar{m}}, \\ \tilde{K}_{\bar{m}}(f) &= i^n 2^{n-1} \sum_{k=1}^n \left[ \rho_k \frac{\partial}{\partial \zeta_m} (f\rho_{\bar{k}}) - \rho_{\bar{m}} \frac{\partial}{\partial \zeta_k} (f\rho_{\bar{k}}) \right].\end{aligned}$$

Тогда, согласно следствию 1 из [16], получим, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi[f]}{\partial z_m} &= -M[\tilde{L}_m(f)] + \Phi[\tilde{K}_m(f)], \\ \frac{\partial \Phi[f]}{\partial \bar{z}_m} &= -M[\tilde{L}_{\bar{m}}(f)] + \Phi[\tilde{K}_{\bar{m}}(f)].\end{aligned}\tag{13}$$

Введем комплексные касательные векторные поля

$$\begin{aligned}\partial_{\tau_{k,l}} &= \rho_l \frac{\partial}{\partial \zeta_k} - \rho_k \frac{\partial}{\partial \zeta_l}, \\ \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} &= \rho_{\bar{l}} \frac{\partial}{\partial \zeta_k} - \rho_{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial \zeta_l}, \quad k > l.\end{aligned}$$

**Лемма 1.** Пусть  $D$  — ограниченная область с границей класса  $\mathcal{C}^2$ ,  $f \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$  и  $a_{k,l} \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$ ,  $k, l = 1, \dots, n$ , тогда  $G[f] = -\Phi[h[f]]$ , где

$$h[f](\zeta) = i \sum_{k>l} (-1)^{k+l} a_{k,l}(\zeta) \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} f(\zeta).\tag{14}$$

*Доказательство.* Из формулы Стокса вытекает, что

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} f(\zeta) \sum_{k>l} d(a_{k,l}(\zeta) g(\zeta, z)) \wedge d\bar{\zeta}[l, k] \wedge d\zeta &= \\ &= - \int_{\Gamma} g(\zeta, z) \sum_{k>l} a_{k,l}(\zeta) df \wedge d\bar{\zeta}[l, k] \wedge d\zeta.\end{aligned}$$

Поэтому, преобразовывая дифференциальную форму  $df \wedge d\bar{\zeta}[l, k] \wedge d\zeta$ , получим

$$\begin{aligned}df \wedge d\bar{\zeta}[l, k] \wedge d\zeta|_{\Gamma} &= \left( (-1)^{l-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_l} d\bar{\zeta}[k] + (-1)^k \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_k} d\bar{\zeta}[l] \right) \wedge d\zeta|_{\Gamma} = \\ &= (-1)^{l-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_l} 2^{n-1} i^n (-1)^{k-1} \rho_{\bar{k}} d\sigma + (-1)^k \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_k} 2^{n-1} i^n (-1)^{l-1} \rho_{\bar{l}} d\sigma = \\ &= 2^{n-1} i^n \left( (-1)^{l+k} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_l} \rho_{\bar{k}} + (-1)^{k+l-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_k} \rho_{\bar{l}} \right) d\sigma = \\ &= 2^{n-1} i^n (-1)^{k+l-1} \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_k} \rho_{\bar{l}} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_l} \rho_{\bar{k}} \right) d\sigma = \\ &= 2^{n-1} i^n (-1)^{k+l-1} \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} f(\zeta) d\sigma,\end{aligned}\tag{15}$$

где  $d\sigma$  — поверхностная мера Лебега на  $\Gamma$ . Здесь мы воспользовались леммой 3.5 из [5], согласно которой сужение дифференциальной формы  $d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta$  на  $\Gamma$  равно  $d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta|_{\Gamma} = 2^{n-1}i^n(-1)^{k-1}\rho_{\bar{k}} d\sigma$ . Тогда

$$G[f] = 2^{n-1}i^{n+1} \int_{\Gamma} g(\zeta, z) \sum_{k>l} (-1)^{k+l} a_{k,l}(\zeta) \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} f(\zeta) d\sigma(\zeta).$$

Поэтому из вида интегрального оператора  $\Phi$  получим, что

$$G[f] = -\Phi[h[f]],$$

где  $h$  определяется равенством (14). □

Кроме того из (15) вытекает, что

$$\bar{\partial}_{\tau_{k,l}} f d\sigma = \frac{(-1)^{k+l-1}}{2^{n-1}i^n} \bar{\partial} f \wedge d\bar{\zeta}[l, k] \wedge d\zeta|_{\Gamma} \quad (16)$$

Из равенства (11) имеем утверждение.

**Следствие 1.** Пусть  $D$  — ограниченная область с границей класса  $\mathcal{C}^2$ ,  $f \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$  и  $a_{k,l} \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$ ,  $k, l = 1, \dots, n$ , тогда  $Q[f] = M[f] - \Phi[h]$ .

Приведем теорему о виде частных производных функции  $Q[f]$  (см. [17, Theorem 2]).

**Теорема 6.** Пусть  $D$  — ограниченная область с дважды гладкой границей и функция  $f \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$  и  $a_{k,l} \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$ ,  $k, l = 1, \dots, n$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q[f]}{\partial z_m} &= M[L_m(f) + \tilde{L}_m(h)] - \Phi[K_m(f) + \tilde{K}_m(h)], \\ \frac{\partial Q[f]}{\partial \bar{z}_m} &= M[L_{\bar{m}}(f) + \tilde{L}_{\bar{m}}(h)] - \Phi[K_{\bar{m}}(f) + \tilde{K}_{\bar{m}}(h)]. \end{aligned}$$

Применяя последовательно формулы из теоремы 6 получаем

**Следствие 2.** Если все функции  $f$ ,  $a_{k,l}$  принадлежат классу  $\mathcal{C}^{s+1}(\Gamma)$ , то операторы  $M$ ,  $Q$ ,  $G$ ,  $\Phi$  являются ограниченными в пространстве  $\mathcal{G}_2^s(D)$  при  $s \geq 1$ .

## 5 Исследование оператора $Q$

Введем дифференциальные операторы

$$\partial = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial z_k} dz_k, \quad \bar{\partial} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k,$$

тогда оператор дифференцирования  $d = \partial + \bar{\partial}$ .

Рассмотрим следующее интегральное представление для гладких функций (см. [17]).

**Теорема 7.** Пусть  $D$  — ограниченная область с границей класса  $\mathcal{C}^2$ , функция  $f$  класса  $\mathcal{C}^1(\bar{D})$  и  $a_{k,l} \in \mathcal{C}^1(\bar{D})$ ,  $k, l = 1, \dots, n$ , тогда для  $z \in D$ ,

$$f(z) = \int_{\Gamma} f(\zeta)(U(\zeta, z) + W(\zeta, z)) - \int_D \bar{\partial} f(\zeta) \wedge (U(\zeta, z) + W(\zeta, z)), \quad (17)$$

а интеграл по области  $D$  в (17) сходится абсолютно.

Первый интеграл в этой формуле это  $Q[f]$ , а второй интеграл обозначим через  $T[f]$ :

$$T[f](z) = - \int_D \bar{\partial} f(\zeta) \wedge (U(\zeta, z) + W(\zeta, z)), \quad z \in D.$$

Так что  $f = Q[f] + T[f]$  в области  $D$ .

Отметим, что эти операторы являются ограниченными операторами из  $\mathcal{W}_2^s(D)$  в  $\mathcal{W}_2^s(D)$  в силу следствия 2.

Пусть  $f \in \mathcal{W}_2^{1/2}(\Gamma)$ . Продолжим  $f$  гармонически в область  $D$  до функции  $f^+$  из  $\mathcal{G}_2^1(D)$ , а также продолжим  $f$  гармонически в  $\mathbb{C}^n \setminus D$  до функции  $f^- \in \mathcal{G}_2^1(\mathbb{C}^n \setminus D)$  с условием, что  $f$  стремится к нулю на бесконечности как  $O(|z|^{1-2n})$  (см., например, [8, Ch. 2]).

Рассмотрим дифференциальные формы (5)

$$\mu_{f^\pm} = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k-1} \frac{\partial f^\pm}{\partial \bar{\zeta}_k} d\zeta[k] \wedge d\bar{\zeta}.$$

Они являются замкнутыми дифференциальными формами в силу гармоничности функций  $f^\pm(z)$  в соответствующих областях. Более того по лемме 3.5 из [5],

$$\mu_{f^\pm}|_{\Gamma} = 2^{n-1} i^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^\pm}{\partial \bar{\zeta}_j} \rho_j d\sigma. \quad (18)$$

Определим дифференциальный оператор

$$\bar{\partial}_\nu f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^+}{\partial \bar{z}_j} \rho_j = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f^+}{\partial \nu} - i \frac{\partial f^+}{\partial \tau} \right) \quad \text{на } \Gamma,$$

и дифференциальный оператор

$$\bar{\partial}_{-\nu} f = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^-}{\partial \bar{z}_j} \rho_j = - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f^-}{\partial \nu} + i \frac{\partial f^-}{\partial \tau} \right) \quad \text{на } \Gamma,$$

где  $\nu$  — единичная внешняя нормаль к  $\Gamma$ ,  $\tau = i\nu$  — касательный вектор. Эти операторы являются с точностью до константы сужениями дифференциальных форм  $\mu_{f^\pm}$  на границу  $\Gamma$  (см. формулу (18)). По сути дела первый оператор есть производная по комплексной нормали к  $\Gamma$  от функции  $f^+$ , а второй, соответственно, производная по комплексной нормали к  $\Gamma$  от функции  $f^-$ . Аналогично определяются операторы  $\partial_\nu f$  и  $\partial_{-\nu} f$ .

Как показано в [11] (см. также [5, §16]) для функций  $f \in \mathcal{G}_2^1(D)$  первое слагаемое интеграла  $T[f](z)$  равно (для точек  $z \in D$ )

$$\int_D \bar{\partial} f \wedge U(\zeta, z) = -2^{n-1} i^n \int_{\Gamma} \bar{\partial}_\nu f(\zeta) g(\zeta, z) d\sigma = (\Phi \circ \bar{\partial}_\nu)[f](z), \quad (19)$$

кроме того  $M = \Phi \circ \bar{\partial}_\nu$  в  $D$ .

Теперь преобразуем второе слагаемое интеграла  $T[f](z)$ :

$$\begin{aligned} - \int_D \bar{\partial} f(\zeta) \wedge W(\zeta, z) &= - \int_D \bar{\partial} f(\zeta) \wedge \sum_{k>l} d(a_{k,l}(\zeta) g(\zeta, z)) d\bar{\zeta}[l, k] \wedge d\zeta = \\ &= - \int_D df(\zeta) \wedge \sum_{k>l} d(a_{k,l}(\zeta) g(\zeta, z)) d\bar{\zeta}[l, k] \wedge d\zeta = \\ &= \int_D d \left( df(\zeta) \wedge \sum_{k>l} a_{k,l}(\zeta) g(\zeta, z) d\bar{\zeta}[l, k] \wedge d\zeta \right) = \\ &= \int_{\Gamma} df(\zeta) \wedge \sum_{k>l} a_{k,l}(\zeta) g(\zeta, z) d\bar{\zeta}[l, k] \wedge d\zeta = \\ &= \int_{\Gamma} g(\zeta, z) \left( df(\zeta) \wedge \sum_{k>l} a_{k,l}(\zeta) d\bar{\zeta}[l, k] \wedge d\zeta \right). \end{aligned}$$

Равенство (16) дает

$$df \wedge d\bar{\zeta}[l, k] \wedge d\zeta|_{\Gamma} = 2^{n-1} i^n (-1)^{k+l-1} \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} f d\sigma.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} - \int_D \bar{\partial} f(\zeta) \wedge W(\zeta, z) &= \int_{\Gamma} g(\zeta, z) \left( df(\zeta) \wedge \sum_{k>l} i a_{k,l}(\zeta) d\bar{\zeta}[l, k] \wedge d\zeta \right) = \\ &= 2^{n-1} i^{n+1} \int_{\Gamma} g(\zeta, z) \left( \sum_{k>l} (-1)^{k+l-1} a_{k,l}(\zeta) \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} f(\zeta) d\sigma \right). \quad (20) \end{aligned}$$

Из формул (19) и (20) получим выражение для интеграла  $T[f](z)$ :

$$T[f](z) = 2^{n-1} i^n \int_{\Gamma} g(\zeta, z) \left( \bar{\partial}_\nu f(\zeta) + i \sum_{k>l} (-1)^{k+l-1} a_{k,l}(\zeta) \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} f(\zeta) \right) d\sigma.$$

Таким образом получили утверждение (сравни с леммой 1).

**Предложение 2.** Для функций  $f \in \mathcal{G}_2^1(D)$  справедливо равенство

$$T[f](z) = -\Phi[t[f]](z), \quad z \in D,$$

где

$$t[f](\zeta) = \left( \bar{\partial}_\nu f(\zeta) + i \sum_{k>l} (-1)^{k+l-1} a_{k,l}(\zeta) \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} f(\zeta) \right), \quad z \in D. \quad (21)$$

**Лемма 2.** Если  $f \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ , то справедливо равенство

$$\bar{\partial}_\nu \Phi^+[f] + \bar{\partial}_{-\nu} \Phi^-[f] = f \quad \text{на } \Gamma.$$

Это равенство есть аналог теоремы о скачке нормальной производной потенциала простого слоя в  $\mathbb{R}^n$  (см., например, [15, гл. 14]).

*Доказательство.* Применим равенство (13). При вычислении производных  $\frac{\partial \Phi^+[f]}{\partial \bar{z}_j}$  мы видим, что второй интеграл в равенстве (13) скачка не имеет, так как он есть потенциал простого слоя от некоторой функции (см., например, [15, гл. 14]). А первый интеграл имеет скачок, определяемый интегралом Бохнера-Мартинелли (теорема 2), равный

$$\sum_{j=1}^n f \rho_j \rho_{\bar{j}} = f.$$

□

Таким образом оператор  $\Phi$  является взаимно однозначным на  $\mathcal{G}_2^1(D)$  и на  $\mathcal{G}_2^1(\mathbb{C}^n \setminus \bar{D})$ . Поэтому определен обратный оператор  $\Phi^{-1}$ .

Из предыдущей леммы получаем равенство

$$(\bar{\partial}_\nu + \bar{\partial}_{-\nu})\Phi = I, \quad (22)$$

где  $I$  — тождественный оператор.

Тогда из (22) имеем

$$(\bar{\partial}_\nu + \bar{\partial}_{-\nu}) = \Phi^{-1}.$$

Для функций  $w, u \in \mathcal{G}_2^1(D)$  (напомним, что пространство  $\mathcal{G}_2^1(D)$  топологически изоморфно пространству  $\mathcal{W}_2^{1/2}(\Gamma)$ ) определим билинейную форму

$$B(u, w) = \int_{\Gamma} \Phi^{-1}[u] \cdot \bar{w} d\sigma.$$

В [11] (а также и в [5, §16]) отмечено, что

1.  $B(u, u) \geq 0$  и  $\overline{B(u, u)} = 0$  только в случае  $u = 0$ ,

2.  $B(u, w) = \overline{B(w, u)}$ ,

3. Норма, определяемая билинейной формой  $B(u, w)$ , эквивалентна норме пространства  $\mathcal{G}_2^1(D)$ .

В пространстве  $\mathcal{G}_2^s(D)$  введем аналогичную билинейную форму  $B_s$ . Если  $u \in \mathcal{G}_2^s(D)$ , то обозначим через  $u_\alpha$  — сужение функций  $\partial^\alpha u$  на  $\Gamma$  класса  $\mathcal{W}_2^{s-\|\alpha\|-1/2}(\Gamma)$  (мультииндекс  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$  и  $\|\alpha\| \leq s-1$ ). Их

мы продолжим гармонически вне области (с нулем на бесконечности) до функции  $u_\alpha^- \in \mathcal{G}_2^{s-\|\alpha\|}(D)$ . Тогда для функций  $u, w \in \mathcal{G}_2^s(D)$  определим

$$B_s(u, w) = \sum_{\|\alpha\| \leq s-1} \int_{\Gamma} \Phi^{-1}[u_\alpha] \cdot \bar{w}_\alpha d\sigma.$$

Ясно, что  $B = B_s$  при  $s = 1$ . Билинейная форма  $B_s$  имеет свойства, аналогичные свойствам формы  $B$  (см. [5, §16]).

Пространство  $\mathcal{G}_2^1(D)$  разлагается в прямую сумму пространств  $\mathcal{O}_2^1(D)$  и  $\mathcal{Y}(D)$ , ортогональных в смысле билинейной формы  $B(\cdot, \cdot)$ , где  $\mathcal{O}_2^1(D)$  — подпространство голоморфных функций из  $\mathcal{G}_2^1(D)$ , т.е.

$$\mathcal{G}_2^1(D) = \mathcal{O}_2^1(D) \oplus \mathcal{Y}(D).$$

Как показано в [11] (см. также [5, §16]), оператор  $M$  является самосопряженным и положительным относительно билинейной формы  $B(\cdot, \cdot)$ .

Также можно показать, что оператор  $M$  является самосопряженным, положительным относительно формы  $B_s$  в пространстве  $\mathcal{G}_2^s(D)$  и  $0 \leq M \leq I$ , и его норма в пространстве  $\mathcal{G}_2^s(D)$  относительно формы  $B_s$  равна 1.

Рассмотрим  $B(G[f], u)$ . Найдем сопряженный оператор  $G^*$  к оператору  $G$  относительно билинейной формы  $B(\cdot, \cdot)$ . Напомним, что

$$G[f](z) = i \int_{\Gamma} f(\zeta) \sum_{k>l} d(a_{k,l}(\zeta)g(\zeta, z)) \wedge d\bar{\zeta}[l, k] \wedge d\zeta, \quad z \notin \Gamma.$$

По лемме 1

$$G[f](z) = -\Phi[h[f]](z),$$

где

$$h[f](\zeta) = i \sum_{k>l} (-1)^{k+l} a_{k,l}(\zeta) \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} f(\zeta).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} B(G[f], u) &= -B(\Phi[h[f]], u) = - \int_{\Gamma} h[f](\zeta) \cdot \bar{u}(\zeta) d\sigma = \\ &= -i \int_{\Gamma} \sum_{k>l} (-1)^{k+l} a_{k,l}(\zeta) \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} f(\zeta) \bar{u}(\zeta) d\sigma = \\ &= i \int_{\Gamma} \sum_{k>l} (-1)^{k+l} a_{k,l}(\zeta) \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} \bar{u}(\zeta) f(\zeta) d\sigma = B(f, G[u]), \end{aligned}$$

поскольку

$$- \int_{\Gamma} \sum_{k>l} (-1)^{k+l} \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} (a_{k,l} f \bar{u})(\zeta) d\sigma = 0.$$

Последнее равенство следует из того, что под знаком интеграла стоит сужение на  $\Gamma$   $\bar{\partial}$ -точной формы

$$\sum_{k>l} \bar{\partial}(a_{k,l} f \bar{u}) \wedge d\bar{\zeta}[k, l] \wedge d\zeta.$$

Таким образом получаем утверждение

**Предложение 3.** *Оператор  $G$  является самосопряженным относительно билинейной формы  $B(\cdot, \cdot)$ , т.е.  $G^* = G$ .*

Отсюда получаем

**Следствие 3.** *Оператор  $Q$  является самосопряженным относительно билинейной формы  $B(\cdot, \cdot)$  и*

$$Q[u] = Q^*[u] = (M + G)^*[u] = M[u] - \Phi[h[u]] = \Phi[\bar{\partial}_{-\nu} u - h[u]]. \quad (23)$$

## 6 Итерации оператора $Q$

Для исследования итераций оператора  $Q$  нам потребуются некоторые свойства самосопряженных операторов. Эти сведения можно найти в монографиях [18] – [21].

Сначала найдем нормы элементов и операторов относительно билинейной формы  $B(\cdot, \cdot)$ . Для функции  $u \in \mathcal{G}_2^1(D)$  ее норма  $\|u\|_B$  равна

$$\begin{aligned} \|u\|_B^2 &= B(u, u) = \int_{\Gamma} \Phi^{-1}[u] \cdot \bar{u} \, d\sigma = \\ &= \int_{\Gamma} (\bar{\partial}_{\nu} u + \bar{\partial}_{-\nu} u) \bar{u} \, d\sigma = \frac{1}{2^{n-1} i^n} \int_{\Gamma} (\mu_{u^+} u + \mu_{u^-} u) \cdot \bar{u} = \\ &= \frac{1}{2^{n-1} i^n} \int_D (|\operatorname{grad} u^+|^2 d\bar{z} \wedge dz + \frac{1}{2^{n-1} i^n} \int_{\mathbb{C}^n \setminus D} (|\operatorname{grad} u^-|^2 d\bar{z} \wedge dz = \\ &= \int_D (|\operatorname{grad} u^+|^2 dv + \int_{\mathbb{C}^n \setminus D} (|\operatorname{grad} u^-|^2 dv, \end{aligned}$$

в силу формул (1) и (2). Таким образом квадрат нормы элемента  $u \in \mathcal{G}_2^1(D)$  равен сумме интегралов Дирихле этого элемента в области и вне области.

**Предложение 4.** *Оператор  $M$  является положительным, самосопряженным относительно билинейной формы  $B(\cdot, \cdot)$  его норма  $\|M\|_B = 1$  и выполнено неравенство  $0 \leq M \leq I$ , где  $I$  — тождественный оператор.*

*Доказательство.* Положительность, самосопряженность оператора  $M$  и неравенство  $0 \leq M \leq I$  доказана Романовым в [11] (см. также [5, §16]). Найдем его норму. Для этого воспользуемся теоремой 2 из [20]), что

$$\|M\|_B = \sup_{\|u\|_B=1} B(Mu, u).$$

Как в предыдущих формулах имеем

$$B(M[u], u) = \int_{\Gamma} \bar{\partial}_{-\nu} u \cdot \bar{u} d\sigma = \int_{\mathbb{C}^n \setminus D} (|\operatorname{grad} u^-|^2 dv \leq \|u\|_B^2.$$

Так что  $B(Mu, u) \leq 1$ . С другой стороны, если  $u$  голоморфно продолжается в область, то  $Mu = u$ . Поэтому  $\|M\|_B = 1$ .  $\square$

Найдем норму оператора  $Q$  относительно билинейной формы  $B$ .

**Предложение 5.** *Оператор  $Q$  является положительным и самосопряженным относительно билинейной нормы  $B(\cdot, \cdot)$ . Норма оператора  $\|Q\|_B = 1$ . Справедливы неравенства  $0 \leq Q \leq I$ .*

*Доказательство.* Воспользуемся следствием 3 (равенство (23))

$$Q[u] = \Phi[\bar{\partial}_{-\nu} u - h[u]].$$

Как отмечено в [21, §93] для самосопряженного оператора  $Q$  справедливы равенства

$$\sup_u |B(Q[u], u)| = \sup_u \|Q[u]\|_B = \|Q\|_B,$$

если  $\|u\|_B = 1$ .

Поскольку гладкие функции плотны в пространстве  $\mathcal{G}_2^1(D)$  и в пространстве  $\mathcal{L}_2^{1/2}(\Gamma)$ , в качестве функций  $u$  можно брать гладкие функции.

Возьмем такую функцию  $u$  и продолжим ее гладко на  $\bar{D}$ , получим

$$\begin{aligned} B(Q[u], u) &= \int_{\Gamma} (\bar{\partial}_{-\nu} u - h[u]) \cdot \bar{u} d\sigma = \\ &= \int_{\Gamma} \left( \bar{\partial}_{-\nu} u - i \sum_{k>l} (-1)^{k+l} a_{k,l}(\zeta) \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} u(\zeta) \right) \bar{u}(\zeta) d\sigma. \end{aligned}$$

Преобразуем второй интеграл в этой формуле

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} \sum_{k>l} (-1)^{k+l} (a_{k,l}(\zeta) \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} u(\zeta)) \bar{u}(\zeta) d\sigma = \\ &= c \int_{\Gamma} \sum_{k>l} (-1)^{k+l} \bar{u}(\zeta) a_{k,l}(\zeta) \bar{\partial} u(\zeta) \wedge d\bar{\zeta}[k, l] \wedge d\zeta = \\ &= c \int_D \sum_{k>l} (-1)^{k+l} a_{k,l} \bar{\partial} \bar{u}(\zeta) \wedge \bar{\partial} u(\zeta) \wedge d\bar{\zeta}[k, l] \wedge d\zeta. \end{aligned} \quad (24)$$

Далее, выделим действительную и мнимую части функции  $u = u_1 + iu_2$ , получим

$$\bar{\partial} \bar{u}(\zeta) \wedge \bar{\partial} u(\zeta) = \bar{\partial}(u_1 - iu_2) \wedge \bar{\partial}(u_1 + iu_2) = 2i \bar{\partial} u_1 \wedge \bar{\partial} u_2.$$

Тогда интеграл в формуле (24) будет равен

$$\int_D \bar{\partial}u_1(\zeta) \wedge \bar{\partial}u_2(\zeta) \wedge \left( \sum_{k>l} (-1)^{k+l} a_{k,l} d\bar{\zeta}[k, l] \wedge d\zeta \right).$$

Рассмотрим одну часть подынтегральной формы

$$\bar{\partial}u_1(\zeta) \wedge \bar{\partial}u_2(\zeta) \wedge d\bar{\zeta}[k, l] \wedge d\zeta. \quad (25)$$

Так как на поверхности  $\Gamma$  функция  $\rho = 0$ , то  $d\rho = 0$ . Поэтому

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_j} d\zeta_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_j} d\bar{\zeta}_j = 0 \quad (26)$$

Тогда в форме  $\bar{\partial}u_1(\zeta) \wedge \bar{\partial}u_2(\zeta)$  из (25) нужно оставить только слагаемые с номерами  $k, l$ . Но так как выполнено равенство (26), то все это выражение будет равно нулю на  $\Gamma$ , поскольку в нем  $d\bar{\zeta}_k$  будет выражаться через  $d\bar{\zeta}_l$ .

Так что вся подынтегральная форма

$$\bar{\partial}u_1(\zeta) \wedge \bar{\partial}u_2(\zeta) \wedge \left( \sum_{k>l} (-1)^{k+l} a_{k,l} d\bar{\zeta}[k, l] \wedge d\zeta \right) \quad (27)$$

будет равняться нулю на  $\Gamma$ .

Осталось выбрать продолжение  $u_1, u_2$  такое, что дифференциальная форма (27) равнялась нулю в области  $D$ , что, очевидно, всегда можно сделать.

Тогда

$$0 \leq B(Q[u], u) = \int_{\Gamma} (\bar{\partial}_{-\nu} u) \cdot u \, d\sigma = \int_{\mathbb{C}^n \setminus D} (|\operatorname{grad} u^-|^2 \, dv \leq \|u\|_B^2 \leq 1.$$

Если функция  $u$  — вещественнозначная, то доказательство становится проще, поскольку в этом случае

$$\bar{\partial}u(\zeta) \wedge \bar{\partial}\bar{u}(\zeta) = \bar{\partial}u(\zeta) \wedge \bar{\partial}u(\zeta) = 0$$

для любого вещественнозначного продолжения  $u$  в область  $D$ .

Поэтому оператор  $Q$  — положительный и его норма не превосходит 1. Так как он сохраняет голоморфные функции  $u$ , то  $\|Q\|_B = 1$ . Так как  $\|Q\|_B = 1$  и оператор  $Q$  положительный и самосопряженный, то  $0 \leq Q \leq I$  (см. [19, §3]).  $\square$

Отметим также

**Следствие 4.** Число 0 не является собственным числом оператора  $Q$ . Ядро оператора  $T$  совпадает с  $\mathcal{O}_2^1(D)$ .

*Доказательство.* Действительно, если  $Q[u] = 0$ , то по уже доказанному выше

$$0 = B(Q[u], u) = \int_{\Gamma} (\bar{\partial}_{-\nu} u) \cdot u \, d\sigma = \int_{\mathbb{C}^n \setminus D} (|\operatorname{grad} u^-|^2 \, dv.$$

Поэтому  $u^-$  является голоморфной функцией вне области с нулем на бесконечности. Тогда по теореме Гартогса-Бохнера она голоморфно продолжается в область  $D$ . И значит  $u = 0$ .

Пусть  $T[f] = 0$ . Из вида операторов  $T$  и  $t$  (формула (21)) получаем, что

$$T[f](z) = -\Phi[t[f]](z), \quad z \in D,$$

где

$$t[f](\zeta) = \left( \bar{\partial}_{\nu} f(\zeta) + i \sum_{k>l} (-1)^{k+l-1} a_{k,l}(\zeta) \bar{\partial}_{\tau_{k,l}} f(\zeta) \right), \quad z \in D.$$

Применяя к этому интегралу рассуждения из предложения 4 получим, что

$$B(T[f], f) = \int_D |\operatorname{grad} f^+|^2 \, dv = 0.$$

Отсюда получаем, что функция  $f$  голоморфна в  $D$ .  $\square$

Для самосопряженного оператора  $A$  обозначим через

$$\mathbf{m}(A) = \inf_{\|u\|_B=1} B(u, u), \quad \mathbf{M}(A) = \sup_{\|u\|_B=1} B(u, u)$$

(см., например, [19, §2], [20, §7]). Тогда для такого оператора  $A$  (см., например, [19, теорема 2.4]) известно, что спектр  $\sigma(A)$  — вещественный и принадлежит отрезку

$$\sigma(A) \subset [\mathbf{m}(A), \mathbf{M}(A)],$$

и  $\|A\| \in \sigma(A)$ .

Отсюда и из предложений 4 и 5 получаем, что спектр  $\sigma$  операторов  $M$ ,  $Q$  лежат на отрезке  $[0, 1]$ , т.е.  $\sigma(M) \subset [0, 1]$  и  $1 \in \sigma(M)$ ,  $\sigma(Q) \subset [0, 1]$ ,  $1 \in \sigma(Q)$ .

Пространство  $\mathcal{G}_2^1(D)$  является гильбертовым сепарабельным пространством относительно билинейной формы  $B(\cdot, \cdot)$ . Более того, пространство  $\mathcal{G}_2^s(D)$  является плотным в пространстве  $\mathcal{G}_2^1(D)$  в метрике, порожденной формой  $B$ .

Справедлива теорема

**Теорема 8.** В пространстве  $\mathcal{G}_2^1(D)$  существует полная ортонормированная относительно формы  $B(\cdot, \cdot)$  система функций  $\{\psi_k(\zeta)\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , состоящая из собственных функций оператора  $Q$ , т.е.  $Q[\psi_k] = \lambda_k \psi_k$ , где собственные числа  $0 < \lambda_k \leq 1$ .

*Доказательство.* То, что все собственные числа строго больше нуля (если они существуют) мы уже отмечали (следствие 4).

Мы докажем эту теорему, используя схему из [21, Ch. 6]. Сложность заключается в том, что оператор  $Q$  не является компактным в  $\mathcal{G}_2^s(D)$ , поскольку он сохраняет голоморфные функции. Напомним, что оператор  $Q$  является ограниченным в пространстве  $\mathcal{G}_2^s(D)$ ,  $s \geq 1$  (следствие 2).

Вложение  $\mathcal{G}_2^s(D)$  в  $\mathcal{W}_2^p(D)$  является компактным оператором при  $s > p$  (см., например, [8, Theorem 3.1]). Поэтому оператор  $Q$  является компактным из  $\mathcal{G}_2^s(D)$  в  $\mathcal{W}_2^p(D)$  при  $s > p$ .

Сначала докажем, что у оператора  $Q$  есть собственная функция с собственным числом равным 1 (в данном случае это очевидно, поскольку оператор сохраняет голоморфные функции, но в дальнейшем нам понадобится это утверждение для других собственных чисел). Отметим, что все собственные функции с собственным числом равным 1 голоморфны (см. следствие 4).

Как отмечено в [21, §93] для самосопряженного оператора  $Q$  справедливо равенство

$$\sup_f |B(Q[f], f)| = \sup_f \|Q[f]\|_B = \|Q\|_B = 1,$$

если  $\|f\|_B = 1$ .

Так как в пространстве  $\mathcal{G}_2^2(D)$  оператор  $Q$  также имеет норму 1, то существует последовательность  $\{f_k\}$  функций из  $\mathcal{G}_2^2(D)$  такая, что

$$\|f_k\|_B = 1 \quad \text{и} \quad |B(Qf_k, f_k)| \rightarrow \|Q\|_B = 1, \quad k \rightarrow \infty.$$

Мы выберем  $f_k$  так, чтобы последовательность  $B(Q[f_k], f_k)$  сама сходилась, т.е.

$$B(Q[f_k], f_k) \rightarrow \lambda_1, \quad k \rightarrow \infty,$$

где  $\lambda_1 = \|Q\|_B = 1$ , либо  $\lambda_1 = -\|Q\|_B = -1$ .

Квадратный трехчлен

$$\|Q[f_k]\|_B^2 - 2\lambda_1 B(Q[f_k], f_k) + \lambda_1^2 \|f_k\|_B^2 = \|Q[f_k] - \lambda_1 f_k\|_B^2 \geq 0$$

и стремится к нулю, так как

$$\|Q[f_k]\|_B^2 \leq \|Q\|_B^2 = \lambda_1^2, \quad B(Q[f_k], f_k) \rightarrow \lambda_1, \quad \|f_k\|_B = 1.$$

Таким образом

$$Q[f_k] - \lambda_1 f_k \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty \quad (28)$$

для некоторой последовательности функций  $\{f_k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , в пространстве  $\mathcal{G}_2^2(D)$ .

Теперь воспользуемся тем, что оператор  $Q$  является компактным из  $\mathcal{G}_2^2(D)$  в  $\mathcal{W}_2^1(D)$ . Последовательность  $\{f_k\}$  ограничена в  $\mathcal{G}_2^2(D)$ , поэтому она является компактной в  $\mathcal{W}_2^1(D)$ . Т.е. из нее можно выбрать подпоследовательность сходящуюся в пространстве  $\mathcal{W}_2^1(D)$ . Можно считать, что это сама последовательность  $\{f_k\}$  сходится к  $f_0 \in \mathcal{W}_2^1(D)$ .

Рассмотрим

$$f_k(z) - f_m(z), \quad z \in D.$$

Тогда по теореме о среднем для гармонических функций (см., например, [22, гл. 3]), получим

$$f_k(z) - f_m(z) = \frac{1}{V(C)} \int_C (f_k(\zeta) - f_m(\zeta)) dv,$$

где  $C$  — некоторый шар с центром в точке  $z$ , а  $V(C)$  — его объем. Далее (по неравенству Коши-Буняковского)

$$\begin{aligned} |f_k(z) - f_m(z)| &\leq \frac{1}{V(C)} \int_C |f_k(\zeta) - f_m(\zeta)| dv \leq \int_C |f_k(\zeta) - f_m(\zeta)|^2 dv \leq \\ &\leq \int_D |f_k(\zeta) - f_m(\zeta)|^2 dv \leq \|f_k - f_m\|_{\mathcal{W}_2^1(D)}^2. \end{aligned}$$

Так что последовательность  $\{f_k\}$  является фундаментальной в  $D$  относительно равномерной сходимости. Поэтому она равномерно сходится в  $D$  к функции  $f_0$ . Из свойств гармонических функций тогда получаем, что  $f_0$  является гармонической в  $D$ , и последовательность  $\{f_k\}$  равномерно сходится к  $f_0$  вместе со всеми производными на любом компакте в  $D$ . Мы отмечали, что функция  $f_0 \in \mathcal{W}_2^1(D)$ , поэтому  $f_0 \in \mathcal{G}_2^1(D)$  и последовательность  $\{f_k\}$  сходится к  $f_0$  в пространстве  $\mathcal{G}_2^1(D)$ .

Тогда согласно (28) получаем, что  $Q[f_0] = \lambda_1 f_0$ . Следовательно,  $\lambda_1 = 1$  и  $f_0$  является собственной функцией оператора  $Q$ .

Рассмотрим подпространство  $\mathcal{L}_1$  в  $\mathcal{G}_2^1(D)$ , состоящее из всех собственных векторов  $f$  с собственным числом  $\lambda_1 = 1$ . Оно совпадает с  $\mathcal{O}_2^1$  (см. следствие 4) и значит бесконечномерно. Более того — это замкнутое подпространство в  $\mathcal{G}_2^1(D)$ , т.е. гильбертово.

В нем существует полная ортонормированная система функций  $\{\varphi_k^1\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Поэтому мы можем рассмотреть ортогональное дополнение к  $\mathcal{L}_1$  в смысле билинейной формы  $B(\cdot, \cdot)$  — пространство  $\mathcal{L}_1^\perp$ . Оно также является замкнутым подпространством в  $\mathcal{G}_2^1(D)$ .

Оператор  $Q$  отображает  $\mathcal{L}_1^\perp$  в  $\mathcal{L}_1^\perp$ , поскольку для  $f \in \mathcal{L}_1^\perp$  имеем

$$B(Q[f], \varphi_k^1) = B(f, Q[\varphi_k^1]) = B(f, \varphi_k^1) = 0$$

для всех функций  $\varphi_k^1$ . Так что оператор  $Q$  является положительным и самосопряженным на  $\mathcal{L}_1^\perp$ , более того он является компактным из пространства  $\mathcal{L}_1^\perp$  в пространство  $\mathcal{L}^2(D)$ .

Тогда  $\|Q\|_{\mathcal{L}_1^\perp} = \lambda_2 < 1$ , поскольку если бы  $\lambda_2$  равнялось 1, то в этом пространстве (согласно предыдущему рассмотрению) существовал бы собственный элемент с собственным числом 1, что невозможно по построению пространства  $\mathcal{L}_1$ .

Применяя предыдущее рассуждение для оператора  $Q$  на  $\mathcal{G}_2^2(D)$  мы получим, что существует собственная функция  $f \in \mathcal{L}_1^\perp$  с условием, что  $Q[f] = \lambda_2 f$ .

Рассмотрим теперь подпространство  $\mathcal{L}_2$ , состоящее из всех таких собственных векторов  $f$ . Оно замкнуто и содержит полную ортонормированную систему элементов  $\{\varphi_k^2\}$ . Обозначим через  $\mathcal{L}_2^\perp$  — ортогональное дополнение к пространству  $\mathcal{L}_2$  в  $\mathcal{L}_1^\perp$ . В нем мы сделаем те же самые построения как в предыдущем случае и т.д. Тогда получим систему подпространств  $\mathcal{L}_m$  и  $\mathcal{L}_m^\perp$ , систему собственных чисел  $\lambda_m$  и собственных функций  $f_m$ , отвечающих этим собственным числам и полные ортонормированные системы функций  $\{\varphi_k^\lambda\}$  из пространства  $\mathcal{L}_m^\perp$ .

При этом возможны два случая:

1. Система  $\{\lambda_k\}$  конечна. Это означает, что число собственных чисел  $\lambda_k$  конечно и  $\mathcal{G}_2^1(D)$  является конечной суммой собственных подпространств оператора  $Q$ .

2. Система  $\{\lambda_k\}$  бесконечна. В этом случае  $\lambda_k$  строго убывающая последовательность стремящаяся к нулю. Докажем это.

Предположим, что  $\lambda_k$  не стремятся к нулю, тогда выбирая для числа  $\lambda_k$  нормированную собственную функцию  $\varphi_k$  получим, что последовательность  $\{\varphi/\lambda_k\}$  ограничена, а последовательность образов  $\{\varphi_k\}$  содержит сходящуюся подпоследовательность, что невозможно, так как  $\|\varphi_k - \varphi_m\|_B^2 = 2$  при  $k \neq m$ .

Объединим все собственные ортонормированные системы во всех пространствах  $\mathcal{L}_m^\perp$  в одну ортонормированную систему функций, обозначим ее через  $\{\psi_k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Покажем, что она является полной в  $\mathcal{G}_2^1(D)$ .

В случае конечного числа собственных чисел  $\lambda_k$  это очевидно, поскольку  $\mathcal{G}_2^1(D)$  является конечной суммой собственных подпространств оператора  $Q$ .

Пусть количество собственных чисел бесконечно. Для функции  $f \in \mathcal{G}_2^1(D)$  рассмотрим функцию

$$h_m = \sum_{k=1}^m B(f, \psi_k) \psi_k.$$

Тогда  $h_m$  принадлежит подпространству, образованному элементами ортогональными элементами  $\psi_1, \dots, \psi_m$ , поэтому

$$\|Q[h_m]\|_B \leq \lambda_{m+1} \|\psi_m\|_B.$$

Кроме того

$$\|h_m\|_B^2 = \|f\|_B^2 - \sum_{j=1}^m |B(f, \psi_j)|^2 \leq \|f\|_B^2.$$

Поэтому

$$Q[h_m] = Q[f] - \sum_{j=1}^m B(f, \psi_j) Q[\psi_j] \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$Q[f] = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j B(f, \psi_j) \psi_j = \sum_{j=1}^{\infty} B(f, Q\psi_j) \psi_j.$$

То есть

$$Q[f] = \sum_{j=1}^{\infty} B(Q[f], \psi_j) \psi_j$$

Пусть теперь  $f$  — произвольный элемент из  $\mathcal{G}_2^1(D)$ . По известным свойствам гильбертова пространства сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} B(f, \psi_j) \psi_j = w$$

и  $w \in \mathcal{G}_2^1(D)$ . Применив к этому ряду оператор  $Q$ , получим

$$Q[w] = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j B(f, \psi_j) \psi_j.$$

С другой стороны мы только что доказали, что

$$Q[f] = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j B(f, \psi_j) \psi_j.$$

Поэтому  $Q[f] = Q[w]$ . Тогда  $Q[f - w] = 0$ . Но у  $Q$  нет нулевых собственных значений, поэтому система  $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  полна в  $\mathcal{G}_2^1(D)$ . □

Поскольку оператор  $M$  имеет те же свойства, что и оператор  $Q$ , то для него справедливо аналогичное утверждение.

**Теорема 9.** В пространстве  $\mathcal{G}_2^1(D)$  существует полная ортонормированная относительно формы  $B(\cdot, \cdot)$  система функций  $\{\phi_k(\zeta)\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , состоящая из собственных функций оператора  $M$ , т.е.  $M[\phi_k] = \mu_k \phi_k$ , где собственные числа  $0 < \mu_k \leq 1$ .

Рассмотрим функцию  $u \in \mathcal{G}_2^1(D)$  и разложим ее в ряд по системе  $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \psi_j.$$

Вычисляя итерации оператора  $Q$ , получим

$$Q^m[u] = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^m c_j \psi_j.$$

Выделяя в этой сумме члены с собственным числом равным 1 (они определяют некоторую голоморфную функцию  $f$  из  $\mathcal{O}_2^1(D)$ )

$$f(z) = \sum_{j_k} c_{j_k} \psi_{j_k}(z).$$

Тогда

$$B(Q^m[u](z) - f(z), u(z) - f(z)) \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Получили утверждение:

**Теорема 10.** *Справедливо свойство*

$$Q^m[u] \rightarrow Pr_{\mathcal{O}}[u] \quad \text{при } m \rightarrow \infty$$

в сильной операторной топологии пространства  $\mathcal{G}_2^1(D)$ .

Отметим, что из теоремы 9 мы получаем теорему 3 А.В.Романова.

## 7 Некоторые следствия

**Следствие 5.** *Пусть  $D$  — ограниченная область со связной границей  $\Gamma$ , функция  $f \in \mathcal{C}(\bar{D})$ ,  $CR$ -функции  $a_{l,k} \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$ ,  $k, l = 1, \dots, n$  и выполнено условие (10) в области  $D$  (т.е.  $Q[f] = f$  в  $D$ ), тогда функция  $f$  голоморфна в  $D$ .*

*Доказательство.* Так как  $Q[f] = f$  в  $D$ , то  $Q^2[f] = Q[Q[f]] = Q[f]$  и т.д. Получаем, что  $Q^k[f] = f$  в  $D$ . С другой стороны итерации  $Q^k[f]$  стремятся в  $D$  к голоморфной функции  $\varphi$ .  $\square$

Таким образом, задача 3 решена положительно.

**Следствие 6.** *Пусть  $D$  — ограниченная область со связной границей  $\Gamma$ , функция  $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ ,  $CR$ -функции  $a_{l,k} \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$ ,  $k, l = 1, \dots, n$ , и выполнено условие*

$$Q[f](z) = 0 \quad \text{вне множества } \bar{D}, \quad (29)$$

*тогда функция  $f$  голоморфно продолжается в  $D$  до функции  $F \in \mathcal{C}(\bar{D})$ .*

*Доказательство.* По формуле (11) имеем

$$Q[f](z) = M[f](z) + G[f](z) = \int_{\Gamma} f(\zeta)(U(\zeta, z) + W(\zeta, z)) \quad z \notin \Gamma.$$

Скачок интеграла  $M[f]$  равен  $f$  (см. теорему 2), т.е.  $M^+[f] - M^-[f] = f$  на  $\Gamma$ . Скачок интеграла  $G[f]$  равен 0, поскольку по лемме 1 интеграл  $G[f] = -\Phi[h[f]]$ , а хорошо известно (см., например, [6, Ch. 2]), что скачок потенциала простого слоя  $\Phi$  равен нулю.

Отсюда получаем, что если  $Q^-[f] = 0$  вне замыкания области  $D$ , то  $Q^+[f]$  является гармоническим продолжением функции  $f$  в область  $D$ . По предыдущему следствию тогда  $Q^+[f]$  голоморфна в  $D$ .  $\square$

**Следствие 7.** Пусть  $D$  — ограниченная область со связной границей, функция  $f \in \mathcal{C}(\bar{D})$ ,  $CR$ -функции  $a_{l,k} \in \mathcal{C}^1(\Gamma)$ ,  $k, l = 1, \dots, n$ , и для некоторого натурального числа  $s_0$  выполнено условие

$$Q^{s_0}[f](z) = f(z), \quad z \in D,$$

тогда  $f$  голоморфна в  $D$ .

*Доказательство.* Рассмотрим итерации  $Q^{ks_0}[f](z)$ . Они стремятся к голоморфной функции в  $D$ . С другой стороны они все равны  $f(z)$ .  $\square$

В заключение приведем теорему.

**Теорема 11.** Пусть  $f \in \mathcal{C}(\bar{D})$  и  $f$  гармоническая в  $D$ ,  $w(\rho) \neq 0$  на  $\partial D$ . Если

$$\bar{w}(f) = \sum_{k=1}^n \bar{w}_k \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0 \quad \text{на } \Gamma,$$

то  $f$  голоморфна в  $D$ .

Таким образом, задача 1 решается положительно для функций данного класса.

## References

- [1] Vladimirov V.S. *Methods of the theory of functions of many complex variables*, Cambridge, MIT Press, MA, 1986.
- [2] Shabat B.V. *Introduction to complex analysis. Part 2. Function of several variables*, Amer. Math. Soc., Providence, 1992.
- [3] Range R.M. *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables*, Springer-Verlag, New-York, 1986.
- [4] Aizenberg L.A., Yuzhakov A.P. *Integral Representations and Residues in Multidimensional Complex Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.
- [5] Kytmanov A.M. *The Bochner-Martinelli integral and its applications*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1995.
- [6] Günther N.M. *Potential theory and its applications to basic problems of mathematical physics*, Ungar, New York, 1967.
- [7] Kytmanov A.M., Myslivets S.G. *Multidimensional Integral Representations. Problems of Analytic Continuation*, Springer Verlag, Basel, Boston, 2015.
- [8] Egorov Yu.V., Shubin M.A. *Partial differential equations 1. Foundations of the classical theory*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, V. 3, Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [9] Khenkin G.M., Chirka E.M. *Boundary properties of holomorphic functions of several complex variables*, Journal of Soviet Mathematics, **5** (1976), 612–687.
- [10] Gilbarg D., Trudinger N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.
- [11] Romanov A.V. *Convergence of iterates of the Bochner-Martinelli operator and the Cauchy-Riemann equation*, Soviet Math. Doct. **119**:5 (1978), 1211–1215.
- [12] Kytmanov A.M., Myslivets S.G. *Iterates of the Bochner-Martinelli Integral Operator in a Ball*, Журн. СВУ. Сер. матем. и физ. **2**:2 (2009), 137–145.
- [13] Leray J. *Fonction de variables complexes; sa representation comme somme de puissances negatives de fonctions lineaires*, R.C. Accad. Lincei Rend. Cl. Si. Fiz Mat Natur. **20**:5 (1956), 589–590.

- [14] Leray J. *Le calcul differentiel et integral sur une variete analytique complexe. (Probleme de Cauchy. III.)*, Bulletin de la Societe Mathematique de France, **87** (1959), 81-180.
- [15] Mikhlin S.G. *Linear partial equations*, Vysshaya shkola, M., 1977 (in Russian).
- [16] Myslivets S.G. *Integral operator of potential type for infinitely differentiable functions*. Журн. СФУ. Сер. матем. и физ., **17**:4 (2024), 464–469.
- [17] Kytmanov A.M., Myslivets S.G. *On one integral representation of the potential type*, Журн. СФУ. Сер. матем. и физ. **18**:3 (2025), 293–299 (предварительная публикация).
- [18] Akhiezer N.M., Glazman I.M. *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, Dover Publications Inc., New York, 1993.
- [19] П'ин А.М., Данилин А.Р. *Spectral Decomposition of Self-Adjoint Operators*, Ural State University, Ekaterinburg, 2018 (in Russian).
- [20] Birman M.S., Solomjak M.Z. *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*, Springer Nature Link, Dordrecht, 1987.
- [21] Riesz F., Sz.-Nagy B. *Lecons D'Analyse Fonctionnelle*, Akademiai Kiado, Budapest, 1972.
- [22] Timan A.F., Trofimov V.N. *Introduction to theory of harmonic functions*, Nauka, M., 1968 (in Russian).

ALEXANDER MECHISLAVOVICH KYTMANOV  
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY,  
PR. SVOBODNY, 79,  
660041, KRASNOYARSK, RUSSIA  
E-mail address: [akytmanov@sfu-kras.ru](mailto:akytmanov@sfu-kras.ru)

SIMONA GLEBOVNA MYSLIVETS  
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY,  
PR. SVOBODNY, 79,  
660041, KRASNOYARSK, RUSSIA  
E-mail address: [smyslivets@sfu-kras.ru](mailto:smyslivets@sfu-kras.ru)