

## HKSS-ПОЛНОТА КЛАССА БУЛЕВЫХ АЛГЕБР С ВЫДЕЛЕННЫМИ ПОДАЛГЕБРАМИ И АТОМАМИ

В.С. ИСАКОВ 

*Представлено П.П. ПЕТРОВЫМ*

**Abstract:** This paper contributes to the research program of Khous-  
sainov and Kowalski who started systematic investigations of the  
following problem: how does expanding the language of Boolean  
algebras affect their computability-theoretic properties. Following  
the approach of Hirschfeldt, Khous-  
sainov, Shore, and Slinko, we  
prove that the class of Boolean algebras with distinguished subal-  
gebras and atoms is complete with respect to degree spectra of  
nontrivial structures, effective dimensions, expansion by constants,  
and degree spectra of relations.

**Keywords:** Boolean algebra, computable structure, *HKSS*-comp-  
lete, subalgebra, computable Boolean algebras with distinguished  
subalgebras and atoms.

---

ISAKOV, V.S., *HKSS*-COMPLETENESS OF THE CLASS OF BOOLEAN ALGEBRAS WITH  
DISTINGUISHED SUBALGEBRAS AND ATOMS.

© 2025 ИСАКОВ В.С.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, со-  
глашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации  
№075-15-2022-282.

*Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.*

## 1 Введение

В 2002 году Д. Хиршфельдт, Б. Хусаинов, Р. Шор и А. М. Слинко [1] ввели новое понятие *HKSS*-полноты, рассматриваемое для класса структур. Идея состоит в следующем: если интересующая нас вычислимая структура обладает некоторым теоретико-вычислимым свойством  $P$ , то в *HKSS*-полном классе найдется структура с таким же свойством. Польза от изучения *HKSS*-полноты для класса структур  $K$  состоит в том, что можно оценить сложность структуры из этого класса с различных сторон, имея информацию об уже известных структурах из других классов. При этом *HKSS*-полнота есть более сильное условие, чем другие теоретико-вычислимые свойства, что позволяет получить много информации об исследуемом классе  $K$ . Формальное определение *HKSS*-полноты будет приведено в разделе 2. Отметим, что сам термин «*HKSS*-полнота» был предложен в работе [2].

Известно, что класс булевых алгебр не является *HKSS*-полным. С. С. Гончаров и В. Д. Дзгоев [3] доказали, что вычислимая размерность вычислимой булевой алгебры  $\mathcal{B}$  равна либо 1, либо  $\infty$ , что не наблюдается для структур из *HKSS*-полных классов. В 2012 г. Б. Хусаинов и Т. Ковальски [4] поставили вопрос: как сигнатурное обогащение булевых алгебр влияет на их теоретико-вычислимые свойства? В этой же работе они доказали, что класс булевых алгебр с выделенными операторами *HKSS*-полный. В частности, из этого вытекает существование примеров булевых алгебр с выделенными операторами, обладающих любой конечной вычислимой размерностью.

Отметим, что класс булевых алгебр с выделенным идеалом не является *HKSS*-полным. Этот результат был получен в 1998 году Н. Т. Когабаевым [5]. В 2012 году результат был обобщен П. Е. Алаевым [6] в статье про автоустойчивость вычислимых булевых алгебр с выделенными идеалами и атомами. Класс булевых алгебр с выделенным множеством атомов также не является *HKSS*-полным [7].

Н. А. Баженов [8, 9, 10] доказал, что *HKSS*-полными классами являются полимодальные алгебры, контактные булевы алгебры и алгебры Гейтинга с выделенными атомами и коатомами.

В данной работе будет доказано, что класс булевых алгебр с тремя выделенными подалгебрами и выделенным множеством атомов *HKSS*-полный.

Во втором разделе приведены предварительные сведения, в том числе интересующие нас теоретико-вычислимые свойства. В третьем — изложен возможный способ кодирования графа в обогащенной булевой алгебре. В четвертом разделе получен основной результат (теорема 6).

## 2 Предварительные сведения

Все нижеприведенные термины, касающиеся теории булевых алгебр, собраны из монографии [11].

Под *булевой алгеброй* подразумевается алгебраическая система  $\mathcal{A} = \langle A, \vee, \wedge, C, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$  конечной сигнатуры  $\Sigma_{BA} = \langle \vee^2, \wedge^2, C^1, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ .

На булевых алгебрах определен частичный порядок:  $a \leq b$  в том и только том случае, когда  $a \wedge b = a$ . Через  $\mathbf{0}$  и  $\mathbf{1}$  обозначаем наименьший и наибольший элементы булевой алгебры соответственно.

*Атомом* в булевой алгебре назовем ненулевой элемент, под которым лежит только ноль. В сигнатуру булевой алгебры можно добавить предикат  $Atom(x)$  для определения атома. Булева алгебра называется *атомной*, если под любым ненулевым элементом есть атом.

В монографии С. С. Гончарова [11] показано построение булевой алгебры  $\mathcal{B}_M$  по данному линейно упорядоченному множеству  $M$ . Нас будет интересовать счетная булева алгебра, порожденная линейно упорядоченным множеством  $\mathbf{L} = \langle \omega^2, \leq \rangle$ . В данной ситуации множество

$$\{ [0, a) \mid a \in \omega^2 \}$$

порождает булеву алгебру  $\mathcal{B}_{\omega^2}$  в алгебре всех подмножеств множества  $\omega^2$ .

Для построения вычислимого представления булевой алгебры будем использовать конструкцию дерева.

Определим на  $\mathbb{N}$  следующие функции:

$$R(n) = 2n + 2, \quad L(n) = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$H(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0, \\ [(n-1)/2], & \text{если } n \geq 1, \end{cases}$$

$$S(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0, \\ n-1, & \text{если } n = 2k, n > 0, \\ n+1, & \text{если } n = 2k+1. \end{cases}$$

Значения функций интерпретируют следующим образом:

$R(n)$  — номер правой вершины, лежащей под  $n$ ,

$L(n)$  — номер левой вершины, лежащей под  $n$ ,

$H(n)$  — номер ближайшей вершины из находящихся выше  $n$ ,

$S(n)$  — номер соседней к  $n$  вершины, лежащей под  $H(n)$ .

Подмножество  $D \subseteq \mathbb{N}$  называется *деревом*, если для любого  $n \in D$  элементы  $H(n)$ ,  $S(n)$  принадлежат  $D$ .

Будем говорить, что дерево  $D$  порождает булеву алгебру  $\mathcal{A}$ , если существует разностное отображение  $\varphi$  из  $D$  в  $A$  такое, что:

$$\varphi(0) = \mathbf{1}, \tag{1}$$

$$(\forall n \in D \setminus \{0\}) (\varphi(n) \vee \varphi(S(n)) = \varphi(H(n)) \ \& \ \varphi(n) \wedge \varphi(S(n)) = \mathbf{0} \ \& \ \varphi(n) \neq \mathbf{0}), \tag{2}$$

$$(\forall a \neq \mathbf{0}) (\exists n_1, \dots, n_k \in D) (\varphi(n_1) \vee \dots \vee \varphi(n_k) = a). \tag{3}$$

*Порождающим деревом* назовём пару  $\langle D, \varphi \rangle$ .

Как видно из аксиом, элемент алгебры  $\mathcal{A}$  можно выражать через вершины дерева разными способами. Например, использовать тождество  $\varphi(n) = \varphi(L(n)) \vee \varphi(R(n))$ . Чтобы избежать неоднозначности в записи элемента  $a \in \mathcal{A}$ , введем следующее понятие.

Подмножество  $H \subseteq D$  называется *каноническим представлением элемента*  $a \in \mathcal{A}$ , если:

- (1)  $\forall n \in H (S(n) \notin H)$ ,
- (2)  $\forall n \in H \forall m \in H (\varphi(m) \leq \varphi(n) \Rightarrow m = n)$ ,
- (3)  $a = \mathbf{0} \Leftrightarrow H = \emptyset$  и  $a \neq \mathbf{0} \Rightarrow a = \bigvee_{n \in H} \varphi(n)$ .

Далее введем теоретико-вычислимые свойства, рассматриваемые в данной работе.

Предварительные сведения о тьюринговых степенях можно найти в [12], а информацию о теории вычислимых моделей можно найти в [13]. Для структуры  $\mathcal{S}$  через  $|\mathcal{S}|$  обозначаем носитель структуры  $\mathcal{S}$ .

Пусть  $\text{deg}_T(X)$  — тьюрингова степень множества  $X \subseteq \mathbb{N}$ , а  $\mathbf{d}$  — это тьюрингова степень. Структуру  $\mathcal{A}$  будем называть **d**-вычислимой, если её носитель является вычислимым подмножеством  $\mathbb{N}$  и атомная диаграмма  $D^a(\mathcal{A})$  **d**-вычислима. *Степенью*  $\text{deg}(\mathcal{A})$  для структуры  $\mathcal{A}$  назовем тьюрингову степень атомной диаграммы  $D^a(\mathcal{A})$ . Для счетной структуры  $\mathcal{S}$  **d**-вычислимой копией назовем **d**-вычислимую структуру  $\mathcal{A}$ , изоморфную  $\mathcal{S}$ . Если **d**-вычислимая копия существует, то говорят, что  $\mathcal{S}$  **d**-вычислимо представима. Спектром степеней структуры  $\mathcal{S}$  обозначим множество

$$DgSp(\mathcal{S}) = \{\text{deg}(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \text{ есть копия } \mathcal{S}\}.$$

Структура  $\mathcal{S}$  *тривиальная*, если существует конечное подмножество  $X \subseteq |\mathcal{S}|$ , такое что любая перестановка  $f$  на  $|\mathcal{S}|$ , оставляющая все элементы  $X$  на месте, является автоморфизмом.

**d**-вычислимой *размерностью*  $\dim_{\mathbf{d}}(\mathcal{S})$  вычислимой структуры  $\mathcal{S}$  называется наибольшее натуральное число  $n \geq 1$ , такое что существуют вычислимые копии  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n$  структуры  $\mathcal{S}$ , попарно не **d**-вычислимо изоморфные. Если наибольшего  $n \in \omega$  нет, то размерность считается бесконечной. Если  $n = 1$ , то структура **d**-вычислимо категорична (или **d**-автоустойчива). Для степени  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$  будем обозначать  $\dim_{\mathbf{0}}(\mathcal{S})$  через  $\dim(\mathcal{S})$ .

С. С. Гончаров [14] показал, что для каждого  $n \geq 1$  существует ориентированный граф с вычислимой размерностью  $n$ . Это свойство отлично от булевых алгебр.

Спектром степеней отношения  $R$  на  $|\mathcal{S}|$  для вычислимой структуры  $\mathcal{S}$  назовем множество

$$DgSp_{\mathcal{S}}(R) = \{\text{deg}_T(f(R)) : \mathcal{A} \text{ — вычислимая копия } \mathcal{S} \text{ и } f: \mathcal{S} \cong \mathcal{A}\}.$$

Отношение  $R$  *наследственно*  $\Delta_1^0$  (*наследственно*  $\Sigma_1^0$ ) на  $\mathcal{S}$ , если для любой вычислимой копии  $\mathcal{A}$  и любого изоморфизма  $f: \mathcal{S} \cong \mathcal{A}$  отношение

$f(R)$  является  $\Delta_1^0$  (соответственно,  $\Sigma_1^0$ ). Отношение  $R$  является *относительно наследственно*  $\Delta_1^0$  (относительно наследственно  $\Sigma_1^0$ ) на  $\mathcal{S}$ , если для любой копии  $\mathcal{A}$  и любого изоморфизма  $f: \mathcal{S} \cong \mathcal{A}$  отношение  $f(R)$  есть  $\Delta_1^0(D^a(\mathcal{A}))$  (соответственно,  $\Sigma_1^0(D^a(\mathcal{A}))$ ).

Относительно спектра степеней отношений Б. Хусаинов и Р. Шор [15] получили следующий результат.

**Теорема 1.** *Для каждого  $n \geq 1$  существует наследственно в.п. отношение  $U$  в вычислимом ориентированном графе  $\mathcal{G}$  с  $\dim(\mathcal{G}) = n$ , такое что  $DgSpr_{\mathcal{G}}(U)$  состоит из  $n$  различных в.п. степеней, включая  $\mathbf{0}$ .*

По заданному набору в.п. степеней тоже можно найти отношение с таким спектром степеней [16, 17].

**Теорема 2.** *Пусть  $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$  — в.п. степени. Тогда существует наследственно в.п. отношение  $U$  в вычислимом ориентированном графе  $\mathcal{G}$  с  $\dim(\mathcal{G}) = n$ , такое что  $DgSpr_{\mathcal{G}}(U) = \{\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{n-1}\}$ .*

Другой подход заключается в рассмотрении расширения структуры конечным числом констант. П. Чолак, С. С. Гончаров, Б. Хусаинов и Р. Шор [18] показали, что добавление константы может повлиять на вычислимую размерность.

**Теорема 3.** *Для каждого  $n \geq 1$  существуют вычислимо категоричный ориентированный граф  $\mathcal{G}$  и  $a \in \mathcal{G}$ , такие что структура  $(\mathcal{G}, a)$  имеет вычислимую размерность  $n$ .*

При этом теорема справедлива и для бесконечной размерности [19].

**Теорема 4.** *Существуют вычислимо категоричный ориентированный граф  $\mathcal{G}$  и  $a \in \mathcal{G}$ , такие что структура  $(\mathcal{G}, a)$  имеет вычислимую размерность  $\omega$ .*

Д. Хиршфельдт, Б. Хусаинов, Р. Шор и А. М. Слиньюко [1] ввели новое понятие для класса структур, отражающее все вышеупомянутые свойства класса.

**Определение 1.** *Класс структур  $\mathcal{K}$  называется полным относительно спектра степеней нетривиальных структур, вычисляемых размерностей, расширения константами и спектра степеней отношений (или HKSS-полным), если для каждого нетривиального ориентированного счетного графа  $G$  существует нетривиальная счетная структура  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ , обладающая следующими свойствами:*

1.  $DgSpr(\mathcal{A}) = DgSpr(G)$ .
2. Если  $G$  имеет вычислимую копию, тогда верно следующее:
  - а) для произвольной тьюринговой степени  $\mathbf{d}$   $\dim_{\mathbf{d}}(\mathcal{A}) = \dim_{\mathbf{d}}(G)$ ,
  - б)  $\forall c \in |G| \exists a \in |\mathcal{A}|$ , такое что  $\dim(\mathcal{A}, a) = \dim(G, c)$ ,
  - с) для отношения  $R \subseteq |G|$  существует отношение  $Q \subseteq |\mathcal{A}|$ , такое что  $DgSpr_{\mathcal{A}}(Q) = DgSpr_G(R)$ , причем если  $R$  наследственно  $\Sigma_1^0$ , тогда  $Q$  также наследственно  $\Sigma_1^0$ .

Известно, что сам класс ориентированных графов является *HKSS*-полным (см. приложение А в [1]). Классы частичных порядков, симметричных иррефлексивных графов также *HKSS*-полные [1]. Доказательство такого свойства устанавливалось кодированием вычислимого ориентированного графа в исследуемую структуру. Поскольку симметричные иррефлексивные графы также являются *HKSS*-полными, можно кодировать их [1].

В работе [1] обоснован вышеупомянутый метод.

**Теорема 5.** Пусть  $G$  — счетный нетривиальный симметричный иррефлексивный граф с отношением  $E$ , а  $\mathcal{A}$  — это счетная структура. Предположим, что существуют инвариантные, относительно наследственно вычисляемые отношения  $D(x)$  и  $R(x, y)$  в структуре  $\mathcal{A}$  и отображение  $\Psi_G$ , действующее из множества копий  $G$  в множество копий  $\mathcal{A}_G$ , со следующими свойствами:

1. Для каждой копии  $H$  графа  $G$  структура  $\Psi_G(H)$  должна быть  $\deg(H)$ -вычислима.
2. Для копии  $H$  существует  $\deg(H)$ -вычисляемая биекция  $f_H : D(\Psi_G(H)) \rightarrow |H|$ , такая что  $R(x, y) \Leftrightarrow E(f_H(x), f_H(y))$ .
3. Если  $f : D(\mathcal{A}_G) \rightarrow D(\mathcal{A}_G)$  биекция и  $R(x, y) \Leftrightarrow R(f(x), f(y))$ , то  $f$  продолжается до автоморфизма структуры  $\mathcal{A}_G$ .
4. Для копии  $H$  существует  $\deg(H)$ -вычисляемое множество экзистенциальных формул  $\{\psi_i(\bar{a}, \bar{e}_i, x)\}_{i \in \omega}$ , где  $\bar{a}$  — кортеж из  $\Psi_G(H)$ ,  $\bar{e}_i$  — кортеж из  $D(\Psi_G(H))$ . Причём каждый  $x \in |\Psi_G(H)|$  удовлетворяет некоторой формуле  $\psi_i(\bar{a}, \bar{e}_i, x)$  и два разных  $x$  не могут удовлетворять одной и той же  $\psi_i$ .

Тогда верно следующее:

1.  $DgSp(\mathcal{A}) = DgSp(G)$ .
2. Если  $G$  имеет вычисляемую копию, тогда:
  - а) для произвольной тьюринговой степени  $\mathbf{d}$   $\dim_{\mathbf{d}}(\mathcal{A}) = \dim_{\mathbf{d}}(G)$ ,
  - б)  $\forall c \in |G| \exists a \in |\mathcal{A}|$  такое, что  $\dim(\mathcal{A}, a) = \dim(G, c)$ ,
  - в) для отношения  $R \subseteq |G|$  существует отношение  $Q \subseteq |\mathcal{A}|$  такое, что  $DgSp_{\mathcal{A}}(Q) = DgSp_G(R)$ , причём если  $R$  наследственно  $\Sigma_1^0$ , тогда  $Q$  также наследственно  $\Sigma_1^0$ .

Стоит также отметить, что вопросы, рассматриваемые в данной работе, связаны с эффективной би-интерпретируемостью класса графов и сигнатурно обогащенных булевых алгебр. Подробнее об эффективной би-интерпретируемости см. в [20].

### 3 Кодирование графа

В данном разделе приведём нашу основную конструкцию, позволяющую кодировать данный счётный граф в сигнатурное обогащение булевой алгебры.

### 3.1. Представление булевой алгебры $\mathcal{B}_{\omega^2}$ посредством дерева.

Через  $\mathbf{0}$  и  $\mathbf{1}$  обозначим наименьший и наибольший элементы булевой алгебры  $\mathcal{B}_{\omega^2}$  соответственно.

Покажем, что следующее дерево порождает алгебру  $\mathcal{B}_{\omega^2}$ :

$$D = \{R^n L^m R^k(0) \mid n \in \{0, 1\}, m, k \in \mathbb{N}\}. \quad (4)$$

Построим разностное отображение  $\varphi$ , сопоставляющее каждому элементу дерева  $D$  некоторый полуоткрытый интервал в порядке  $\omega^2$ :

$$\varphi(R^n L^m R^k(0)) = \begin{cases} \{\omega \cdot k + m - 1\}, & \text{если } n = 1, m \geq 1, \\ [\omega \cdot k + m - 1, \omega \cdot (k + 1)), & \text{если } n = 0, m \geq 1, \\ [\omega \cdot k, \omega^2), & \text{если } n = 0, m = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Тогда  $\varphi(0) = \mathbf{1}$ , т.е. равно наибольшему элементу алгебры  $\mathcal{B}_{\omega^2}$ .

Покажем, что для каждого  $x \in D \setminus \{0\}$  верно условие (2):

$$\varphi(x) \vee \varphi(S(x)) = \varphi(H(x)) \ \& \ \varphi(x) \wedge \varphi(S(x)) = \mathbf{0}.$$

Для элемента вида  $L^m R^k(0)$ , где  $m \geq 1$ , выполнено:

$$S(L^m R^k(0)) = RL^{m-1}R^k(0), \quad H(L^m R^k(0)) = L^{m-1}R^k(0).$$

Из формулы (5) очевидно, что

$$\begin{aligned} \varphi(L^m R^k(0)) \vee \varphi(RL^{m-1}R^k(0)) &= \varphi(L^{m-1}R^k(0)) \ \& \\ \varphi(L^m R^k(0)) \wedge \varphi(RL^{m-1}R^k(0)) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Для элемента вида  $RL^m R^k(0)$ , где  $m \geq 1$ , верно:

$$S(RL^m R^k(0)) = L^{m+1}R^k(0), \quad H(RL^m R^k(0)) = L^m R^k(0).$$

Также получаем, что

$$\begin{aligned} \varphi(RL^m R^k(0)) \vee \varphi(L^{m+1}R^k(0)) &= \varphi(L^m R^k(0)) \ \& \\ \varphi(RL^m R^k(0)) \wedge \varphi(L^{m+1}R^k(0)) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Для  $R^k(0)$ ,  $k > 0$ , доказательство свойства (2) дословно повторяет предыдущее.

Любой ненулевой элемент из  $\mathcal{B}_{\omega^2}$  можно представить конечным объединением полуоткрытых интервалов из определения отображения  $\varphi$  (см. формулу (5)). Значит, условие (3) верно.

Таким образом, пара  $\langle D, \varphi \rangle$  является деревом, порождающим  $\mathcal{B}_{\omega^2}$ .

**3.2. Конструкция для кодирования графа.** Произвольный нетривиальный иррефлексивный неориентированный счётный граф  $G$  с натуральным рядом в качестве множества вершин будем кодировать следующим образом.

По дереву  $\langle D, \varphi \rangle$  из формулы (4) стандартным образом построим вычислимую изоморфную копию  $\mathcal{A}$  булевой алгебры  $\mathcal{B}_{\omega^2}$ . Для удобства далее будем иногда отождествлять вершину  $x$  дерева  $D$  с соответствующим элементом  $\varphi(x)$  в булевой алгебре  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}_{\omega^2}$ .

Для начала выделим подмножество  $D_0 = \{L^2R^k(0) \mid k \in \mathbb{N}\}$  в  $D$ , почти все элементы которого будут выступать в качестве вершин графа.

По  $D_0$  породим подалгебру  $P_0$  в алгебре  $\mathcal{A}$ . Однако, чтобы в дальнейшем было «проще» выделять атомы в  $P_0$ , построим подалгебру  $P_1$ , порожденную множеством  $D_1 = \{LR^k(0) \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{RL(0)\}$ .

Добавим в сигнатуру исходной булевой алгебры  $\Sigma_{BA}$  предикатные символы  $P_0$  и  $P_1$ , соответствующие описанным выше подалгебрам, а также предикатный символ  $Atom$ . Обозначим новую сигнатуру за  $\Sigma^+$ .

Построим формулы в  $\Sigma^+$  для описания вершин графа:

$$\begin{aligned}\psi_{Dom}(x) &= P_0(x) \ \& \ \neg P_1(x) \ \& \ \exists y[P_1(y) \ \& \ (x < y) \ \& \ Atom(y \wedge C(x))], \\ \psi_{\neg Dom}(x) &= \neg P_0(x) \ \vee \ P_1(x) \ \vee \ \exists y[P_0(y) \ \& \ (y < x) \ \& \ (y \neq 0)], \\ \psi_{Dom}\{\mathcal{A}\} &= \{a : \mathcal{A} \models \psi_{Dom}(a)\}, \\ \psi_{\neg Dom}\{\mathcal{A}\} &= \{a : \mathcal{A} \models \psi_{\neg Dom}(a)\}.\end{aligned}$$

Относительно данных формул справедлива следующая лемма.

**Лемма 1.** *Выполнены следующие свойства:*

1.  $\psi_{Dom}\{\mathcal{A}\} = \{L^2R^k(0) \mid k \geq 1\}$ .
2. Множества  $X = \psi_{Dom}\{\mathcal{A}\}$  и  $Y = \psi_{\neg Dom}\{\mathcal{A}\}$  образуют разбиение  $|\mathcal{A}|$ , т.е.  $X \cup Y = |\mathcal{A}|$  и  $X \cap Y = \emptyset$ .

*Доказательство.* 1) Элемент  $L^2(0)$  лежит в  $P_0$  и в  $P_1$  по построению, следовательно для него справедлива формула  $\psi_{\neg Dom}(L^2(0))$ .

Элемент вида  $L^2R^k(0)$  при  $k \geq 1$  не лежит в  $P_1$ , так как под порождающими  $LR^k(0)$  ( $k \geq 1$ ) подалгебры  $P_1$  нет других порождающих (по определению  $D_1$ ).

Элемент  $LR^k(0)$  при  $k \geq 1$  лежит выше  $L^2R^k(0)$ , а  $RLR^k(0)$  – атом. Значит,  $L^2R^k(0)$  удовлетворяет подформуле с квантором  $\exists$  в формуле  $\psi_{Dom}(x)$  и всей формуле. То есть

$$\psi_{Dom}\{\mathcal{A}\} \supseteq \{L^2R^k(0) \mid k \geq 1\}.$$

Покажем обратное включение. Пусть для элемента  $a$  справедлива формула  $\psi_{Dom}(a)$ . Без ограничения общности  $a$  состоит либо из конечного объединения элементов вида  $R^i(0)$ ,  $RLR^j(0)$ ,  $LR^s(0)$  при  $i, j \geq 1, s \geq 0$  (и каждый вид в объединении встречается при различных  $i, j, s$ ), либо из конечного объединения элементов вида  $L^2R^k(0)$  при  $k \geq 1$ . По условию  $a$  не лежит в подалгебре  $P_1$ , но существует атом  $b$  алгебры  $\mathcal{A}$ , который в объединении с  $a$  лежит в  $P_1$ .

В первом случае  $a \vee b = a$ , что невозможно. Во втором случае, если  $a \vee b$  в каноническом разложении содержит  $L^2R^k(0)$  (где  $k \geq 1$ ), то в подалгебру  $P_1$   $a \vee b$  не попадет, так как элементы подалгебры  $P_1$  состоят из конечных объединений элементов вида  $R^i(0)$ ,  $LR^j(0)$ ,  $RL(0)$ ,  $L^2(0)$  при  $i \geq 1, j \geq 0$ . Следовательно, возможен только один вариант, когда  $a = L^2R^k(0)$  и  $b = RLR^k(0)$ .

- 2) Достаточно показать, что  $\psi_{\neg Dom}(x) = \neg\psi_{Dom}(x)$ .

Бескванторная часть формулы  $\psi_{\neg Dom}(x)$  является отрицанием бескванторной части формулы  $\psi_{Dom}(x)$ .

По смыслу кванторная часть формулы  $\psi_{Dom}(x)$  говорит о том, что  $x$  является атомом подалгебры  $P_0$ . Подформула

$$\exists y[P_0(y) \ \& \ (y < x) \ \& \ (y \neq 0)]$$

в формуле  $\psi_{\neg Dom}(x)$  является отрицанием этого утверждения.  $\square$

При написании формул будем использовать следующее сокращение:

$$(y, z \mid x) \Leftrightarrow y \vee z = x \ \& \ y \wedge z = 0 \ \& \ y \neq 0 \ \& \ z \neq 0.$$

Для кодирования информации о ребрах (графа  $G$ ) формульно определим константу  $c = L(0)$ :

$$x = c \Leftrightarrow P_1(x) \ \& \ \exists y \exists z [y, z \mid x \ \& \ Atom(z) \ \& \ P_1(z) \ \& \ P_0(y)],$$

$$\begin{aligned} x \neq c \Leftrightarrow & P_0(x) \vee \neg P_1(x) \vee Atom(x) \vee \\ & \exists y \exists z [y, z \mid x \ \& \ ((P_1(y) \ \& \ P_1(z) \ \& \ \neg Atom(y) \ \& \ \neg Atom(z)) \vee \\ & (\psi_{Dom}(y)) \vee (P_1(y) \ \& \ \neg P_0(y)))]. \end{aligned}$$

Отметим, что константа  $c$  определима в построенной структуре  $(\mathcal{A}, P_0, P_1, Atom)$  посредством как экзистенциальной, так и универсальной формулы.

Наличие или отсутствие ребра в графе зададим через подалгебру. Для этого построим по шагам вычисляемое множество  $V_2 \subseteq |\mathcal{A}|$ .

По каждому числу  $m \in \mathbb{N}$  зададим множество

$$R_m = \{RL^n R^{m+1}(0) \mid n \geq 2\}.$$

Для  $m < k$  на шаге конструкции  $\langle m, k \rangle$  находим в каждом из множеств  $R_m$  и  $R_k$  ещё не использованный в конструкции (наименьший относительно  $\leq_{\mathbb{N}}$ ) атом.

Если в графе  $G$  есть ребро  $(m, k)$ , то в  $V_2$  добавляем объединение этих двух атомов. В противном случае находим не использованный на предыдущих шагах атом  $a$ , лежащий под  $c$  и не лежащий в подалгебре  $P_1$ , и добавляем в  $V_2$  объединение трех найденных атомов.

Полученным множеством  $V_2$  порождаем подалгебру  $P_2$  в алгебре  $\mathcal{A}$ .

**Следствие 1.** *Если в графе  $G$  существует бесконечно много пар вершин  $i \neq j$ , между которыми нет ребра, то каждый элемент  $z \in \mathcal{A}$ , такой что  $Atom(z) \ \& \ (z < c)$ , лежит под некоторым атомом подалгебры  $P_2$ .*

Итак, по заданному графу  $G = \langle \mathbb{N}, E \rangle$  можно построить структуру  $\mathcal{B}_G$  в сигнатуре  $\Sigma_G = \Sigma^+ \cup \{P_2\}$ . Отметим, что объединение  $\mathcal{B}_G$  до сигнатуры  $\Sigma^+$  является вычисляемой структурой, построение которой не зависит от выбора графа  $G$ .

Наличие/отсутствие ребра выразим следующим образом:

$$\psi_{Edge}(x, y) = \psi_{Dom}(x) \& \psi_{Dom}(y) \& \\ \exists z[P_2(z) \& z < (x \vee y) \& Atom(z \wedge x) \& Atom(z \wedge y)],$$

$$\psi_{\neg Edge}(x, y) = \psi_{\neg Dom}(x) \vee \psi_{\neg Dom}(y) \vee \\ \exists z[P_2(z) \& z < (x \vee y \vee c) \& Atom(z \wedge x) \& Atom(z \wedge y) \& Atom(z \wedge c)].$$

**Лемма 2.** *Выполнены следующие свойства:*

1. Множество  $\psi_{Edge}\{\mathcal{B}_G\}$  равно  $\{(L^2R^k(0), L^2R^m(0)) \mid k, m \geq 1, G \models E(k-1, m-1)\}$ .
2. Множества  $\psi_{Edge}\{\mathcal{B}_G\}$  и  $\psi_{\neg Edge}\{\mathcal{B}_G\}$  образуют разбиение для  $|\mathcal{A}|^2 \setminus \{(a, a) \in |\mathcal{A}|^2\}$ .

*Доказательство.* 1) По лемме 1 и построению подалгебры  $P_2$  включение справа налево очевидно.

Установим обратное включение. По той же лемме  $x = L^2R^k(0)$  и  $y = L^2R^m(0)$  для  $k, m \geq 1$ . Подформула

$$\exists z[P_2(z) \& z < (x \vee y) \& Atom(z \wedge x) \& Atom(z \wedge y)]$$

в формуле  $\psi_{Edge}(x, y)$  говорит о том, что  $z$  равен объединению двух атомов алгебры  $\mathcal{A}$ , лежащих под  $L^2R^k(0)$  и  $L^2R^m(0)$ .

Пусть  $k < m$ . Если  $G \models \neg E(k-1, m-1)$ , то на шаге  $\langle k, m \rangle$  в подалгебру  $P_2$  попал бы элемент  $z$ , равный объединению трех атомов алгебры  $\mathcal{A}$ , а не двух.

2) Напомним, что граф  $G$  не имеет петель, и в построении множества  $V_2$  рассматривались только пары различных вершин. Из этих фактов нетрудно получить, что  $\psi_{\neg Edge}(x, y) = \neg\psi_{Edge}(x, y)$ .  $\square$

## 4 Основной результат

Обозначим класс булевых алгебр с тремя выделенными подалгебрами и выделенным множеством атомов через  $\mathcal{K}_3$ .

**Теорема 6.** *Класс  $\mathcal{K}_3$  HKSS-полный.*

*Доказательство.* В разделе 2 обсуждалась идея доказательства для некоторых классов структур: достаточно нужным образом закодировать нетривиальный счетный симметричный иррефлексивный граф. В разделе 3 представлено, как можно провести эту процедуру. Иными словами, построено отображение  $\Psi_G$ , действующее из множества копий  $G$  в множество копий  $\mathcal{B}_G$  из теоремы 5. Каждому графу  $H$  ставится в соответствие структура  $\mathcal{B}_H$ .

Проверим условия теоремы 5.

1) По построению в разделе 3 структура  $\mathcal{B}_H$   $\deg(H)$ -вычислима.

В качестве отношений положим:

$$D(x) = \psi_{Dom}(x), \quad R(x, y) = \psi_{Edge}(x, y).$$

Из построения формул  $\psi_{Dom}(x), \psi_{Edge}(x, y)$  ясно, что отношения  $D(x)$  и  $R(x, y)$  инвариантны и относительно наследственно вычислимы.

По лемме 1, имеем

$$\psi_{Dom}\{\mathcal{B}_H\} = \{L^2R^{j+1}(0) \mid j \in \omega\}.$$

Для удобства далее будем обозначать  $e_j = L^2R^{j+1}(0)$  для  $j \in \omega$ .

2) Зададим  $f_H : \{e_j \mid j \in \omega\} \rightarrow |H|$ , положив  $f_H(e_j) = j$ . Это вычисляемая функция.

Поскольку вершину графа  $j$  отображали в  $L^2R^{j+1}(0)$  и функции  $L$  и  $R$  инъективные, то  $f_H$  — биекция. Причем  $R(e_i, e_j) \Leftrightarrow E(i, j)$ .

3) Рассмотрим теперь биекцию  $f : D(\mathcal{B}_G) \rightarrow D(\mathcal{B}_G)$ , такую что  $R(x, y) \Leftrightarrow R(f(x), f(y))$ . Зададим биекцию на  $\mathbb{N}$ :  $h(j) = i$  если  $f(e_j) = e_i$ .

Поскольку граф нетривиальный, то справедливо следствие 1 из раздела 3.

В таком случае из леммы 2 и условия  $R(x, y) \Leftrightarrow R(f(x), f(y))$  следует, что есть биекция на атомах, лежащих под  $c$  и не лежащих в подалгебре  $P_1$ , а также есть биекция на атомах, лежащих под элементами из множества  $D(\mathcal{B}_G)$ . Объединим такие биекции в одну биекцию  $\hat{f}$ .

Положим  $\hat{f}(L^2(0)) = L^2(0)$  и  $\hat{f}(RL(0)) = RL(0)$ .

Доопределим  $\hat{f}$  на атомах вида  $RLR^j(0)$ , где  $j \geq 1$ :

$$\hat{f}(RLR^j(0)) = RLR^{h(j)}(0).$$

Автоморфизм счетной булевой алгебры полностью определяется своим действием на атомах и безатомных элементах (см. главу 3 в [11]). Поэтому  $\hat{f}$  определен своим действием на атомах счетной атомной булевой алгебры.

4) Каждый элемент  $x \notin \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$  из  $\mathcal{B}_H$  с точностью до канонического представления можно единственным образом представить в виде конечного объединения:

$$x = x_0 \vee x_1 \vee \cdots \vee x_n,$$

где  $x_i \neq \mathbf{0}$ ,  $x_i \wedge x_k = \mathbf{0}$  при  $i \neq k$  и при этом каждый  $x_i$  удовлетворяет в точности одному из следующих девяти условий:

- (а) Элемент  $x_i$  — это константа  $c$ . Этот случай соответствует  $x_i = L(0)$ .
- (б) Элемент  $x_i$  — это атом алгебры  $\mathcal{B}_H$ , который лежит под  $c$ . Этот случай соответствует  $x_i = RL^n(0)$  для  $n \geq 1$ .
- (в) Элемент  $x_i$  лежит строго под  $c$  и при этом  $c \wedge C(x_i)$  есть конечная сумма атомов алгебры  $\mathcal{B}_H$ . Этот случай соответствует  $x_i = L^n(0)$  для  $n \geq 2$ .
- (г) Элемент  $x_i$  — это атом алгебры  $\mathcal{B}_H$ , который лежит под некоторым атомом  $e_j$  подалгебры  $P_0$ . Этот случай соответствует  $x_i = RL^nR^{j+1}(0)$  для  $n \geq 2$ .

- (e) Элемент  $x_i$  — это атом алгебры  $\mathcal{B}_H$ , для которого существует атом  $e_j$  подалгебры  $P_0$ , такой что элемент  $x_i \vee e_j$  есть атом в подалгебре  $P_1$ . Этот случай соответствует  $x_i = RLR^{j+1}(0)$ .
- (f) Элемент  $x_i$  — это элемент алгебры  $\mathcal{B}_H$ , такой что  $x_i < e_j$  и при этом  $e_j \wedge C(x)$  есть конечная сумма атомов алгебры  $\mathcal{B}_H$ . Этот случай соответствует  $x_i = L^n R^{j+1}(0)$  для  $n \geq 3$ .
- (g) Элемент  $x_i$  — это атом подалгебры  $P_1$ , не равный  $c$  и не лежащий под ним. Этот случай соответствует  $x_i = LR^{j+1}(0)$ .
- (h) Элемент  $C(x_i)$  есть конечная сумма атомов подалгебры  $P_1$ . Этот случай соответствует  $x_i = R^{j+1}(0)$ .
- (i) Элемент  $x_i$  — это элемент  $e_j$ .

Для случая (a)  $\exists$ -формула, определяющая элемент  $x_i$ , уже построена в разделе 3.

В случае (b) из свойств конструкции возможны два случая. В первом случае найдутся атом  $y$  подалгебры  $P_2$ , и элементы  $e_j, e_k$ , где  $j \neq k$ , такие что элементы  $y \wedge C(x_i) \wedge e_j$  и  $y \wedge C(x_i) \wedge e_k$  есть атомы алгебры  $\mathcal{B}_H$ . Элемент  $x_i$  — это единственный элемент из  $\mathcal{B}_H$ , удовлетворяющий следующей  $\exists$ -формуле:

$$\begin{aligned} \theta_{B_1}(x, e_j, e_k, c) = & Atom(x) \ \& \ (x < c) \ \& \\ & \exists y [P_2(y) \ \& \ x < y \ \& \ Atom(y \wedge C(x) \wedge e_j) \ \& \ Atom(y \wedge C(x) \wedge e_k) \ \& \\ & \phantom{\exists y [} y \wedge C(x) < e_j \vee e_k]. \end{aligned}$$

Во втором случае элемент  $x$  лежит в подалгебре  $P_1$ :

$$\theta_{B_2}(x, c) = Atom(x) \ \& \ (x < c) \ \& \ P_1(x).$$

В случае (c) находим атомы  $a_0, a_1, \dots, a_k$  алгебры  $\mathcal{B}_H$ , для которых верно  $a_l \neq a_m$  при  $l \neq m$ ,  $x_i \wedge a_m = \mathbf{0}$  и

$$c = x_i \vee a_0 \vee a_1 \vee \dots \vee a_k.$$

Для каждого атома  $a_l$  фиксируем формулу  $\theta_B(x, e_{j_l}, e_{s_l}, c)$ . Тогда  $x_i$  — это единственный элемент, удовлетворяющий  $\exists$ -формуле:

$$\begin{aligned} \theta_C(x, \bar{e}, c) = & \exists y_0 \exists y_1 \dots \exists y_k \left[ \bigwedge_{l \leq k} (\theta_B(y_l, e_{j_l}, e_{s_l}, c) \ \& \ y_l \wedge x = \mathbf{0}) \ \& \right. \\ & \left. (x \vee y_0 \vee y_1 \vee \dots \vee y_k = c) \right]. \end{aligned}$$

В случае (d) объединение  $x_i$  с другими атомами — порождающий элемент  $P_2$ . В таком случае найдётся атом  $y$  подалгебры  $P_2$ , такой что элемент  $y \wedge C(x_i)$  есть атом алгебры  $\mathcal{B}_H$  или двухатомный элемент алгебры  $\mathcal{B}_H$ , лежащий под некоторым  $e_k \vee c$  и только под ним. Элемент  $x_i$  — это единственный элемент из  $\mathcal{B}_H$ , удовлетворяющий следующей  $\exists$ -формуле:

$$\begin{aligned} \theta_D(x, e_j, e_k, c) = & Atom(x) \ \& \ (x < e_j) \ \& \ \exists y [P_2(y) \ \& \ x < y \ \& \\ & ((Atom(y \wedge C(x)) \ \& \ (y \wedge C(x) < e_k)) \vee (Atom(y \wedge C(x) \wedge e_k) \ \& \\ & \phantom{\exists y [} Atom(y \wedge C(x) \wedge c)) \ \& \ y \wedge C(x) < e_k \vee c]. \end{aligned}$$

В случае (е) находим  $e_j$ , такой что  $e_j \vee x_i$  есть атом в подалгебре  $P_1$ . Элемент  $x_i$  — это единственный элемент из  $\mathcal{B}_H$ , удовлетворяющий бескванторной формуле:

$$\theta_E(x, e_j) = Atom(x) \& (x \wedge e_j = \mathbf{0}) \& P_1(x \vee e_j) \& \neg P_1(x).$$

В случае (f) находим атомы  $a_0, a_1, \dots, a_k$  алгебры  $\mathcal{B}_H$ , для которых верно  $a_l \neq a_m$  при  $l \neq m$ ,  $x_i \wedge a_m = \mathbf{0}$  и

$$e_j = x_i \vee a_0 \vee a_1 \vee \dots \vee a_k.$$

Для каждого атома  $a_l$  фиксируем формулу  $\theta_D(x, e_j, e_{k_l}, c)$ , полученную в случае (d). Тогда  $x_i$  — это единственный элемент, удовлетворяющий  $\exists$ -формуле:

$$\theta_F(x, e_j, \bar{e}, c) = \exists y_0 \exists y_1 \dots \exists y_k \left[ \bigwedge_{l \leq k} (\theta_D(y_l, e_j, e_{k_l}, c) \& y_l \wedge x = \mathbf{0}) \& (x \vee y_0 \vee y_1 \vee \dots \vee y_k = e_j) \right].$$

В случае (g) находим  $e_j < x_i$  такой, что  $x_i \wedge C(e_j)$  есть атом алгебры  $\mathcal{B}_H$ . Элемент  $x_i$  — это единственный элемент из  $\mathcal{B}_H$ , удовлетворяющий бескванторной формуле:

$$\theta_G(x, e_j) = P_1(x) \& (e_j < x) \& Atom(x \wedge C(e_j)).$$

В случае (h) без ограничения общности можно найти атомы  $a_0, a_1, \dots, a_k$  в подалгебре  $P_1$ , для которых верно  $a_0 = c$ ,  $a_l \neq a_m$  при  $l \neq m$ ,  $x_i \wedge a_m = \mathbf{0}$  и

$$x_i \vee a_0 \vee a_1 \vee \dots \vee a_k = \mathbf{1}.$$

Элемент  $x_i$  — это единственный элемент, удовлетворяющий  $\exists$ -формуле:

$$\theta_H(x, \bar{e}, c) = \exists y_0 \exists y_1 \dots \exists y_k \left[ y_0 = c \& y_0 \wedge x = \mathbf{0} \bigwedge_{1 \leq l \leq k} (\theta_G(y_l, e_l) \& y_l \wedge x = \mathbf{0}) \& (x \vee y_0 \vee y_1 \vee \dots \vee y_k = \mathbf{1}) \right].$$

В случае (i) используем формулу  $x = e_j$ .

Как было отмечено выше, для каждого элемента  $x \notin \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$  найдутся элементы из случаев (a)–(i), задающие каноническое представление  $x$ . Такое условие записывается  $\exists$ -формулой относительно элементов типа (a)–(i), каждый из которых также записывается  $\exists$ -формулой относительно  $\bar{e}$ ,  $\mathbf{0}$  и  $\mathbf{1}$ . Элемент  $x$  — это единственный элемент, который удовлетворяет такой формуле, поскольку каноническое представление для  $x$  только одно.

Для  $\mathbf{0}, \mathbf{1}$  определим формулы  $x = \mathbf{0}$ ,  $x = \mathbf{1}$ .

По теореме 5 заключаем, что класс  $\mathcal{K}_3$  *HKSS*-полный. Теорема 6 доказана.  $\square$

## 5 Следствия

Так как существуют вычислимые графы любой конечной размерности, то существуют такие модели и в классе  $\mathcal{K}_3$ .

**Следствие 2.** *Для любого  $n \geq 1$  существует вычислимая булева алгебра с выделенными подалгебрами и выделенным множеством атомов, имеющая вычислимую размерность  $n$ .*

Теоремы 1–4 сформулированы для класса ориентированных графов. Из определения HKSS-полноты следует, что для любого HKSS-полного класса справедливы вышеупомянутые свойства.

**Следствие 3.** *Теоремы 1–4 справедливы для класса  $\mathcal{K}_3$ .*

## References

- [1] D. Hirschfeldt, B. Khossainov, R. Shore, A. Slinko, *Degree spectra and computable dimensions in algebraic structures*, Annals of Pure and Applied Logic, **115** (2002), 71–113.
- [2] A. Montalbán, *Computability theoretic classifications for classes of structures*, In: S. Y. Jang, Y. R. Kim, D.-W. Lee, and I. Yie, editors, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Seoul, Kyung Moon Sa, (2014), 79–101.
- [3] S.S. Goncharov, V.D. Dzgoev, *Autostability of Models*, Algebra and Logic, **19** (1980), 28–37.
- [4] B. Khossainov, T. Kowalski, *Computable isomorphisms of Boolean algebras with operators*, Studia Logica, **100** (2012), 481–496.
- [5] N.T. Kogabaev *Autostability of Boolean algebras with a distinguished ideal*, Siberian Mathematical Journal, **39** (1998), 927–935.
- [6] P.E. Alaev, *Computably categorical Boolean algebras enriched by ideals and atoms*, Annals of Pure and Applied Logic, **163**:5 (2012), 485–499.
- [7] J.B. Remmel, *Recursive Boolean algebras with recursive atoms*, Journal of Symbolic Logic, **46** (1981), 595–616.
- [8] N. Bazhenov, *Categoricity spectra for polymodal algebras*, Studia Logica, **104** (2016), 1083–1097.
- [9] N. Bazhenov, *Computable contact algebras*, Fundamenta Informaticae, **167** (2019), 257–269.
- [10] N. Bazhenov, *Computable Heyting Algebras with Distinguished Atoms and Coatoms*, Journal of Logic, Language and Information, **32** (2023), 3–18.
- [11] S.S. Goncharov, *Countable Boolean Algebras and Decidability*, Springer New York, New York, 1997.
- [12] R.I. Soare, *Recursively Enumerable Sets and Degrees*, Springer Berlin, Heidelberg, 1987.
- [13] C.J. Ash, J.F. Knight, *Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy*, Elsevier, Amsterdam, 2000.
- [14] S.S. Goncharov, *On the number of nonautoequivalent constructivizations*, Algebra and Logic, **16**:3 (1977), 257–282.
- [15] B. Khossainov, R. Shore, *Computable isomorphisms, degree spectra of relations, and Scott families*, Annals of Pure and Applied Logic, **93** (1998), 153–193.
- [16] D. Hirschfeldt, *Degree spectra of relations on structures of finite computable dimension*, Annals of Pure and Applied Logic, **115** (2002), 233–277.
- [17] B. Khossainov, R. Shore, *Solution of the Goncharov-Ash problem and the spectrum problem in the theory of computable models*, Doklady Math, **61** (2000), 178–179.

- [18] P. Cholak, S. Goncharov, B. Khossainov, R. Shore, *Computably categorical structures and expansions by constants*, The Journal of Symbolic Logic, **64** (1999), 13–37.
- [19] D. Hirschfeldt, B. Khossainov, R. Shore, *A computably categorical structure whose expansion by a constant has infinite computable dimension*, The Journal of Symbolic Logic, **68** (2003), 1199–1241.
- [20] M. Harrison-Trainor, A. Melnikov, R. Miller, A. Montalban, *Computable functors and effective interpretability*, The Journal of Symbolic Logic, **82** (2017), 77–97.

VALERIY SERGEEVICH ISAKOV  
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,  
PIROGOVA ST., 1,  
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*Email address:* [v.isakov@ng.su.ru](mailto:v.isakov@ng.su.ru)