

УДК 517.958:531.3-324, 517.958:539.3(5), 519.677
MSC 65Z05; 76Z05

**Численный алгоритм проверки инъективности оператора и
задача идентификация параметров стенки артерии по данным
видеоизображений УЗИ и артериального давления ¹**

**М.М. Кокурин, Д.В. Пасынков,
Д.А. Пахмутов, И.А. Винокуров, И.А. Егошин**

Abstract. We propose a numerical algorithm for checking the injectivity of a nonlinear operator in a finite-dimensional space. This algorithm can be used to justify the uniqueness of a solution to an operator equation in such spaces. We apply the algorithm to the problem of identifying arterial wall parameters based on blood pressure measurements and ultrasound video images. To describe the blood flow, a mathematical model of a viscous incompressible fluid in a tube with flexible anisotropic walls is used. We consider different formulations of the problem under study, and we establish the uniqueness of its solution in some formulations. Finally, we propose a numerical algorithm for finding this solution and present the results of numerical experiments.

Keywords: arterial stiffness, Navier-Stokes equations, Young's modulus, optimization problem, uniqueness of a solution, Jacobian determinant, triangulation, degree of mapping

1. Введение. Широкий класс прикладных обратных задач допускает представление в виде операторных уравнений в конечномерных или бесконечномерных пространствах. Даже если используемая математическая модель включает бесконечномерные пространства и действующие в них операторы, любые реализуемые на практике алгоритмы решения задачи предполагают её сведение к конечномерной постановке. Это связано с тем, что доступные для измерения входные данные, равно как и решения задачи в готовом для использования виде, всегда представляют собой конечные массивы чисел. Для решения конечномерных операторных уравнений известно множество различных численных методов, например, итерационных. Но для успешного применения этих методов

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 22-71-10070)

необходимо иметь уверенность в единственности решения рассматриваемого уравнения, поскольку отсутствие единственности решения означает недостаточность известных входных данных для его однозначной идентификации. Традиционно, для доказательства единственности решения операторного уравнения, или, равносильно, инъективности оператора прямой задачи, сопоставляющего вектору искомых параметров вектор доступных для измерения данных, используются аналитические методы, основанные на исследовании свойств этого оператора. Однако в случае сложных или алгоритмически заданных операторов аналитический подход может быть затруднительным. В таких ситуациях целесообразно применять численные методы для проверки инъективности оператора (см., например, [1]). В статье строится и обосновывается один такой метод.

В качестве примера применения предлагаемого метода рассматривается задача восстановления параметров упругости стенки артерии по данным измерения давления и видеоизображения УЗИ артерии. Артерии человека имеют трёхслойную стенку, наружный слой которой состоит из соединительной ткани, средний — из гладких мышц, а внутренний представлен одним слоем клеток (эндотелием). Суммарная жёсткость артериальной стенки определяется вкладом каждого из её слоёв. При этом соотношение соединительной и мышечной ткани в стенке различных артерий неодинаково. По мере старения организма возможны отложения более плотного материала (холестериновой бляшки, которая на поздних этапах существования может обызвествляться) на поверхности эндотелия, а также изменения соотношения структурных белков соединительной ткани (коллагена и эластина), что приводит к повышению жёсткости артериальной стенки. В результате артериальное русло частично утрачивает способность компенсировать пульсации давления, обусловленные выбросами крови в систолу, что, в свою очередь, повышает постнагрузку на левый желудочек сердца, вызывая в итоге повреждение миокарда [2].

В настоящее время известно, что повышение жёсткости артериальной стенки является фактором риска тяжёлой сердечно-сосудистой патологии (инфаркта миокарда, артериальной гипертензии, сердечной недостаточности и инсульта), являющейся основной причиной смерти в современном мире. Кроме того, было показано, что повышение жёсткости артериальной стенки также ассоциировано с ускоренным старением головного мозга, когнитивной дисфункцией и деменцией [3]. В то же время, получены данные, что указанный процесс, вероятно, обратим, например,

при коррекции образа жизни [4] или определённых видах лекарственной терапии [5], что было продемонстрировано в моделях на животных. Поэтому оценка данного показателя приобретает большое клиническое значение.

В последние годы для косвенной оценки жесткости артериальной стенки предложено измерение скорости пульсовой волны по времени её прохождения между двумя точками регистрации (например, в виде различия времени ее появления на сонной и бедренной артериях относительно систолы, регистрируемой путем электрокардиографии), однако таким образом можно лишь усредненно оценить данный показатель для анализированного участка кровеносного русла [6]. Кроме того, для этого необходимо специальное оборудование, которое не применимо для других задач. В то же время, при ультразвуковом исследовании (УЗИ), широко используемом в современной клинике, возможна уверенная визуализация различных поверхностно расположенных артерий в режиме кинопетли в реальном времени, что позволяет использовать данный метод и для прямой оценки параметров пульсации стенки визуализируемого сосуда. Ранее нами была разработана методика сегментации пульсирующего артериального сосуда на его ультразвуковых изображениях в режиме видеопотока [7]. В статье предлагается подход к идентификации параметров стенки артерии, которые могут отражать ее жесткость, на основе получаемых при этом данных, и исследуется единственность решения соответствующей задачи.

2. Сведения из теории нелинейных отображений конечномерных пространств. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, т.е. ограниченное открытое связное множество. Ниже мы будем использовать следующие стандартные обозначения и определения: $J_F(x) = \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ — якобиан оператора $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ в точке $x \in D$; $Z_F(D) = \{x \in D \mid J_F(x) = 0\}$ — множество критических точек этого оператора; ∂D — граница множества D ; ρ — стандартная евклидова метрика в пространстве \mathbb{R}^n ; $\rho(x, M) = \inf_{y \in M} \rho(x, y)$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $M \subset \mathbb{R}^n$;

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} 1, & a < 0, \\ -1, & a > 0. \end{cases}$$

Через $C(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$ ниже обозначается пространство непрерывных отобра-

жений из замыкания \overline{D} множества D в пространство \mathbb{R}^n с нормой

$$\|F\|_{C(\overline{D}, \mathbb{R}^n)} = \max_{x \in \overline{D}} \|F(x)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Наконец, $C^{(1)}(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$ есть класс непрерывно дифференцируемых отображений из \overline{D} в \mathbb{R}^n .

Предположим, что $F \in C(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$ и $p \notin F(\partial D)$. Степень $\deg(F, p, D)$ отображения F в точке p определяется следующим образом (см. [8-11]). Если $F \in C^{(1)}(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$ и $p \notin F(Z_F(D))$, то

$$\deg(F, p, D) = \begin{cases} 0, & p \notin F(D) \\ \sum_{x \in D: F(x)=p} \text{sign}(J_F(x)), & p \in F(D). \end{cases}$$

Если $F \in C^{(1)}(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$, но $p \in F(Z_F(D))$, то выбирают произвольную точку q , не лежащую в $F(Z_F(D))$ и находящуюся в той же компоненте множества $\mathbb{R}^n \setminus F(\partial D)$, что и p , и полагают

$$\deg(F, p, D) = \deg(F, q, D).$$

Наконец, если $F \notin C^{(1)}(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$, то выбирают произвольное отображение $G \in C^{(1)}(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$, такое что

$$\|F - G\|_{C(\overline{D}, \mathbb{R}^n)} < \frac{1}{2}\rho(p, F(\partial D)),$$

и полагают

$$\deg(F, p, D) = \deg(G, p, D).$$

При этом значение $\deg(F, p, D)$ не зависит от выбора точки q или отображения G .

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1 [11, §2.2; 12]. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — многогранная область, $F \in C^{(1)}(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$, якобиан $J_F(x) \neq 0$ при $x \in D$. Предположим, что для некоторой области $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, оператор F взаимно однозначно отображает ∂D на $\partial \Delta$. Тогда F устанавливает взаимно-однозначное соответствие между замыканиями \overline{D} и $\overline{\Delta}$.

Теорема 2 [9; 11, §2.2]. Пусть D — область в \mathbb{R}^n и $F \in C^{(1)}(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$. Пусть $J_F(x) \neq 0$, $x \in D$ и

$$F(\partial D) = \partial F(D). \quad (1)$$

Тогда определена величина $\deg(F, F(D), D) = \deg(F, p, D)$, не зависящая от выбора точки $p \in F(D)$. Если

$$|\deg(F, F(D), D)| = 1, \quad (2)$$

то отображение $F : D \rightarrow F(D)$ инъективно.

Теорема 3 [9; 11, §2.2; 13]. Пусть $F \in C^{(1)}(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$, множество $Z_F(D)$ не имеет внутренних точек и якобиан $J_F(x)$ имеет один и тот же знак во всех точках $x \in D$. Тогда имеет место включение

$$\partial F(D) \subset F(\partial D).$$

Теорема 3 позволяет заменить равенство (1) в условии теоремы 2 на соотношение $F(\partial D) \subset \partial F(D)$.

Теорема 4 [9; 11, §3.2]. Пусть $F \in C^{(1)}(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$. Если точка $p \notin F(\partial D) \cup F(Z_F(D))$, то для достаточно малого $\varepsilon > 0$, зависящего от F , имеет место представление

$$\deg(F, p, D) = \int_D j_\varepsilon(F(x) - p) J_F(x) dx, \quad (3)$$

где

$$j_\varepsilon(x) = C_{n,\varepsilon} \max \{ \varepsilon^2 - \|x\|_{\mathbb{R}^n}^2, 0 \},$$

$$C_{n,\varepsilon} = \frac{\Gamma(n/2)n(n+2)}{4\pi^{n/2}\varepsilon^{n+2}},$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Приведённые результаты используются ниже в конструкции предлагаемого алгоритма численного анализа инъективности оператора F .

3. Алгоритм проверки инъективности оператора. Опишем алгоритм проверки на инъективность отображения $F \in C^{(1)}(\Pi, \mathbb{R}^n)$, где $\Pi = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ — n -мерный прямоугольный параллелепипед. Алгоритм основан на проверке условия теоремы 1, где в качестве D берётся соответствующий открытый параллелепипед: $D = \text{Int } \Pi$. Разобьём каждый из отрезков $[a_i, b_i]$, $1 \leq i \leq n$ на k_i равных частей и рассмотрим соответствующую равномерную прямоугольную сетку на множестве Π .

Таким образом, шаг сетки вдоль i -й оси равен $h_i = \frac{b_i - a_i}{k_i}$, $1 \leq i \leq n$. Обозначим через S множество точек указанной сетки.

Шаг 1. *Вычисление якобиана $J_F(x)$ отображения F в каждом узле сетки $x \in S$.*

Частные производные, составляющие матрицу Якоби данного оператора, можно найти любым подходящим численным методом. Если все эти значения имеют один и тот же знак и модули $|J_F(x)|$ больше некоторого значения $a > 0$ во всех точках $x \in S$, то при условии достаточной густоты сетки S это позволяет утверждать, что $J_F(x) \neq 0$ при $x \in D$, как это и требуется в условии теоремы 1. Последнее утверждение можно сделать строгим, если получить оценку производных функции $J_F(x)$ по переменным x_i , $1 \leq i \leq n$ на области D . Напротив, если якобиан принимает на S значения разных знаков, то множество критических точек $Z_F(D)$ отображения F заведомо непусто, условия теоремы 1 не выполнены и инъективность отображения F не гарантирована. В типичных случаях такая ситуация имеет место при неинъективности отображения F , что можно обосновать при наложении некоторых дополнительных условий (см. [11, §1.6]).

Шаг 2. *Триангуляция границы множества Π .*

Вначале разобьём каждую грань n -мерного параллелепипеда Π , представляющую собой $(n - 1)$ -мерный прямоугольный параллелепипед, на более мелкие $(n - 1)$ -мерные прямоугольные параллелепипеды с вершинами в узлах сетки S и длинами сторон h_i , $i \in \{1, \dots, n\}$. Затем разобьём каждый из полученных $(n - 1)$ -мерных параллелепипедов на $(n - 1)$ -мерные симплексы с помощью триангуляции K_1 (см., например, [14]). Для этого рассмотрим всевозможные размещения из 2^{n-1} вершин параллелепипеда по n и выберем только те из них, в которых все одноимённые координаты расположены в порядке возрастания; тогда выбранные размещения укажут вершины симплексов искомого разбиения.

Например, при $n = 4$ требуется разбить трёхмерный параллелепипед (пусть для простоты это будет единичный куб) на тетраэдры. В соответствии со сказанным выше, рассмотрим всевозможные размещения по 4 из вершин куба и выберем шесть размещений, в которых все одноимённые координаты расположены по возрастанию (см. таблицу 1). Эти шесть наборов из четырёх вершин каждый определяют разбиение куба на шесть тетраэдров.

Обозначим через \widehat{S} полученное множество симплексов, на которые

(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)
(1, 0, 0)	(1, 0, 0)	(0, 1, 0)	(0, 1, 0)	(0, 0, 1)	(0, 0, 1)
(1, 1, 0)	(1, 0, 1)	(1, 1, 0)	(0, 1, 1)	(1, 0, 1)	(0, 1, 1)
(1, 1, 1)	(1, 1, 1)	(1, 1, 1)	(1, 1, 1)	(1, 1, 1)	(1, 1, 1)

Таблица 1: Координаты вершин тетраэдров, составляющих единичный куб в \mathbb{R}^3

разбита граница параллелепипеда Π .

Шаг 3. *Триангуляция аппроксимации $F(\partial\Pi)$.*

Применим оператор F к каждому элементу множества S и получим множество $F(S) \subset \mathbb{R}^n$. Применив оператор F к каждой вершине симплекса из множества \widehat{S} и построив соответствующие симплексы с вершинами в полученных точках, получим новое множество симплексов, которое обозначим через $F(\widehat{S})$. Отметим, что если какие-то из этих симплексов окажутся вырожденными, то оператор F заведомо неинъективен.

Шаг 4. *Установление отсутствия самопересечения образа границы множества Π .*

Отсутствие взаимных пересечений симплексов из $F(\widehat{S})$, не считая пересечения по общей грани той или иной размерности симплексов из $F(\widehat{S})$, соответствующих соседствующим симплексам из \widehat{S} , пересекающимся по такой же грани, проверяется непосредственно. Мы использовали для этого библиотеку `Simplices.jl` для работы с симплексами на языке программирования Julia. Если сетка S достаточно густая, то из отсутствия таких взаимных пересечений следует, что оператор F взаимно однозначно отображает ∂D на $F(\partial D)$. В самом деле, если бы две разные точки $x_1, x_2 \in \partial D$ отображались в одну точку из $F(\partial D)$, то при достаточно мелкой триангуляции нашлись бы два непересекающихся симплекса, содержащие эти две точки, и их образы бы пересекались. Тогда в силу теоремы 1 отображение F инъективно на всём параллелепипеде Π , и на этом алгоритм завершён.

Задача проверки каждой пары симплексов на отсутствие пересечения является ресурсоёмкой ввиду возможного большого количества таких пар, особенно в случае высокой размерности параллелепипеда Π . Поэтому целесообразно оптимизировать решение указанной задачи. Это можно сделать следующим образом. Для каждого симплекса найдем центр

масс и расстояние от него до самой удалённой вершины. Разобьём все симплексы на несколько классов, причём в каждый класс отнесём лишь те симплексы, расстояние между центрами масс которых строго меньше чем сумма расстояний от их центров масс до самой удаленной вершины. Тогда очевидно, что симплексы, находящиеся в различных классах, не пересекаются, и поэтому можно не проверять их на наличие пересечений. Для реализации алгоритма в многопоточном режиме можно параллельно проверять пересечения симплексов в различных классах.

В инъективности оператора F можно дополнительно убедиться и ещё одним способом, опирающимся на проверку условия теоремы 2 с использованием теорем 3, 4. Пусть мы уже установили отсутствие критических точек оператора F , а также проверили отсутствие взаимных пересечений симплексов из $F(\hat{S})$ и пришли к выводу об инъективности отображения F на ∂D . Так как ∂D — компактное множество, а отображение $F : \partial D \rightarrow F(\partial D)$ непрерывно и взаимно однозначно, то множество $F(\partial D)$ гомеоморфно ∂D , т.е. гомеоморфно $(n - 1)$ -мерной сфере. Согласно известной теореме Жордана–Брауэра, это значит, что $F(\partial D)$ разбивает пространство \mathbb{R}^n на две связные компоненты и является их общей границей. Отсюда следует, что никакое собственное подмножество множества $F(\partial D)$ не разбивает пространство на две связные компоненты — так как объединение двух связных множеств с любым непустым множеством точек их общей границы связно. Но в силу теоремы 3, $\partial F(D) \subset F(\partial D)$, а дополнение к $\partial F(D)$ состоит как минимум из двух связных компонент, поскольку является объединением непустых непересекающихся множеств $\text{Int } F(D)$ и $\mathbb{R}^n \setminus \overline{F(D)}$. Непустота первого из этих множеств вытекает из того, что D есть непустая область, а якобиан отображения F не обращается в нуль на D ; непустота второго связана с тем, что $F(\overline{D})$ есть компакт в \mathbb{R}^n и, значит, является ограниченным множеством, а множество $F(D)$ ограничено тем более. Значит, $\partial F(D)$ не является собственным подмножеством множества $F(\partial D)$, так что $F(\partial D) = \partial F(D)$. Теперь для проверки условия теоремы 2 и вывода об инъективности отображения F на всём множестве Π остаётся проверить равенство (2). Для этого достаточно выполнить следующие шаги.

Шаг 5. Выбор точки p и значения ε в формуле (3) из теоремы 4.

Оптимальный выбор точки p и значения ε оказывает значительное влияние на точность численного интегрирования. Из множества $F(S)$, наиболее подходящей на роль точки p будет наиболее удаленная от каж-

дого симплекса из множества $F(\widehat{S})$.

Для её определения можно перебрать все точки из множества $F(S)$, сразу исключив те, что принадлежат вершинам симплексов из множества $F(\widehat{S})$. Для нахождения расстояния от точки в \mathbb{R}^n до $(n-1)$ -мерного симплекса следует вначале спроектировать её на $(n-1)$ -мерную гиперплоскость, в которой лежит симплекс. Если проекция принадлежит самому симплексу, то расстояние до неё и есть расстояние до симплекса. Если же нет, следует таким же способом рассмотреть расстояния от заданной точки до $(n-2)$ -мерных граней симплекса и выбрать из них наименьшее. При нахождении этих расстояний, возможно, придётся рассматривать расстояния до граней ещё меньшей размерности, вплоть до нульмерных граней — вершин симплекса. В качестве p следует выбрать такую точку из $F(S)$, наименьшее из расстояний от которой до симплексов из $F(\widehat{S})$ максимально. Параметр ε в (3) полагается равным этому расстоянию. Таким образом, этот параметр выбирается максимально допустимым для того, чтобы можно было гарантировать справедливость формулы (3), см. [11, §2.4]. Это увеличивает точность численного интегрирования, так как подынтегральная функция при большом ε меняется менее резко.

Шаг 6. *Вычисление степени отображения по формуле (3) с помощью численного интегрирования.*

Для интегрирования, особенно в случае высокой размерности n , можно рекомендовать использование метода Монте-Карло. При этом область интегрирования в формуле (3) можно изменить, удалив из неё все точки x , для которых заведомо $\|F(x) - p\| \geq \varepsilon$ и подынтегральная функция равна нулю. Если полученное значение $\deg(F, p, \Pi)$ приближенно равно 1 или -1 , то можно утверждать, что отображение F на множестве Π действительно является инъективным.

4. Математическая модель тока крови по артерии. Перейдём к рассмотрению задачи восстановления параметров упругости стенки артерии по данным измерения давления, к которой будет применяться изложенный выше алгоритм. Для описания тока крови по артерии будем использовать математическую модель потока вязкой несжимаемой жидкости в трубке с гибкими стенками. Подобные модели описаны, например, в [15-17]. Широкий обзор последних исследований на эту тему представлен в [18].

Введём цилиндрические координаты (z, r, θ) , где ось z есть ось симметрии трубки. Упругие свойства стенки артерии с учетом ее анизотроп-

ной структуры описываются двумя модулями Юнга E_z и E_θ для продольных и поперечных деформаций и двумя коэффициентами Пуассона ν_z , ν_θ . Они позволяют учесть, что материал стенки ведет себя по-разному при растяжениях вдоль оси трубки z и вдоль окружности её поперечного сечения. Деформацию стенки артерии под действием сил натяжения будем описывать парой функций $\xi(z, t)$, $\eta(z, t)$, показывающих соответственно продольное (в направлении z) и радиальное (в направлении r) смещение точек артериальной стенки с координатой z в момент t . Эти функции связаны со скоростью потока крови и параметрами упругости E_z , E_θ , ν_z , ν_θ следующими уравнениями [15]:

$$\begin{aligned} (1 + L^+) \xi'' + (\nu_\theta - P^+) \eta' - \frac{R\mu}{E^+} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)_{R-\frac{h}{2}} - \frac{\rho_0 h R}{E^+} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= 0, \\ (a\nu_z - P^+) \xi' + a\eta - L^+ \eta'' - \frac{R}{E^+} \left(p(z, t) - 2\mu \frac{\partial w}{\partial r} \right)_{R-\frac{h}{2}} + \frac{\rho_0 h R}{E^+} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь u , w — компоненты скорости потока крови в направлениях z и r соответственно, R — средний радиус артерии, h — толщина стенки артерии, ρ_0 — плотность стенки артерии, μ — динамическая вязкость крови, $p(z, t)$ — давление в поперечном сечении артерии с координатой z в момент t . Через f' , где $f = f(z, t)$ — функция двух переменных, обозначена величина $f' = R \frac{\partial f}{\partial z}$. Запись $\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{R-h/2}$ обозначает производную $\frac{\partial u}{\partial r}$ в точке $r = R_i$, где $R_i = R - h/2$ — внутренний радиус артерии. Параметры a , L^+ , P^+ задаются следующим образом:

$$a = \frac{E_\theta}{E_z}, \quad L^+ = \frac{T_{zz}^0}{RE^+}, \quad P^+ = \frac{P_0}{E^+}, \quad E^+ = \frac{E_z h}{R(1 - \nu_z \nu_\theta)}. \quad (5)$$

Здесь T_{zz}^0 — начальное продольное натяжение оболочки.

Следуя [15], для описания движения крови по артерии будем использовать линеаризованные уравнения Навье-Стокса:

$$\begin{aligned} R_i^2 \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{R_i^2}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ R_i^2 \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{R_i^2}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{w}{y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $y = r/R_i$ — безразмерная радиальная координата, $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость крови. Будем искать комплексные решения этих

уравнений в виде

$$\begin{cases} \tilde{u}(z, t) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{in\omega(t - \frac{z}{c_n})} \\ \tilde{w}(z, t) = w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n e^{in\omega(t - \frac{z}{c_n})} \\ \tilde{p}(z, t) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{in\omega(t - \frac{z}{c_n})}, \end{cases} \quad (7)$$

где $\omega = 2\pi/T$ — угловая частота, T — период, c_n — скорости компонент пульсовой волны. Тогда вещественные части этих решений будут также решениями уравнений (6). Подставляя выражения (7) в эти уравнения, получаем формулы, связывающие между собой коэффициенты u_n , w_n , p_n , и затем находим соответствующие решения $\tilde{\xi}(z, t)$ и $\tilde{\eta}(z, t)$ уравнений (4), см. [15]:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(z, t) &= -i \sum_{n=1}^{\infty} p_n^* \left(\frac{\zeta}{n^2 \omega^2 \rho E^+} \right)^{1/2} (1 + m) e^{in\omega(t - \frac{z}{c_n})}, \\ \tilde{\eta}(z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_i \zeta}{2E^+} (1 + m F_{10}) p_n^* e^{in\omega(t - \frac{z}{c_n})}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_{10} &= \frac{2J_1(i^{3/2}\alpha_n)}{i^{3/2}\alpha_n J_0(i^{3/2}\alpha_n)}, \quad \alpha_n = R_i \sqrt{\frac{n\omega}{\nu}}, \\ m &= m(n) = \frac{1 + \zeta (a\nu_z - P^+ - \frac{aR_i}{2R})}{\zeta (\frac{aR_i F_{10}}{2R} - (a\nu_z - P^+))}, \\ \zeta &= \frac{b_3 - F_{10}b_2}{2b_1(1 - F_{10})} + \sqrt{\left(\frac{b_3 - F_{10}b_2}{2b_1(1 - F_{10})} \right)^2 - \frac{F_{10} + \frac{2h\rho_0}{R_i\rho}}{b_1(1 - F_{10})}}, \\ b_1 &= (1 + L^+)a - (a\nu_z - P^+)(\nu_\theta - P^+), \\ b_2 &= a\nu_z + \nu_\theta - 2P^+ + \frac{2ah\rho_0 - aR_i\rho}{2R\rho}, \\ b_3 &= \frac{2R}{R_i}(1 + L^+) + \frac{ah\rho_0}{R\rho}, \end{aligned} \quad (9)$$

J_0 , J_1 есть функции Бесселя. Ввиду двузначности комплексного корня, параметр ζ определён неоднозначно [15]. Наши численные эксперименты

показывают, что к реалистичным результатам приводит выбор значения корня с положительной вещественной частью. Наконец, величина p_n^* в (8) определяется как

$$p_n^* = \frac{p_n}{J_0(i\beta_n y)}$$

с подходящими параметрами β_n . При $y = 0$, т.е. в центре сосуда, имеем $p_n^* = p_n$. Известно, что давление приблизительно одинаково в разных точках поперечного сечения сосуда, поэтому далее мы считаем p_n^* равным p_n для любых значений y . Математически такое приближение оправдано в силу малости значений β_n , вычисляемых по формулам

$$\beta_n = \frac{n\omega R_i}{c_n}, \quad c_n = \sqrt{\frac{E^+}{\rho\zeta}}.$$

Нашей целью является решение обратной задачи идентификации параметров стенки артерии при известной функции $p(0, t) = p(t)$, показывающей давление в некоторой точке $z = 0$, и известной функции $\eta(0, t) = \eta(t)$, описывающей пульсацию артерии. Эти функции могут быть найдены путем измерения артериального давления и анализа видеоизображений УЗИ артерии. Для тестирования предлагаемого ниже метода решения мы вначале строим модельные примеры с заранее известным решением. Эти модельные примеры мы получаем, решая прямую задачу, которая заключается в нахождении функции $\eta(t)$, соответствующей известной функции $p(t)$ при заданном наборе параметров стенки артерии.

5. Прямая и обратные задачи о параметрах упругости стенки артерии. Опишем вспомогательную прямую задачу более подробно. Она состоит в определении колебаний стенки артерии, описываемых функциями $\xi(t)$ и $\eta(t)$ (основной интерес при этом для нас представляет вторая функция) под действием заданного давления $p(t)$. В рамках прямой задачи известными считаются параметры стенки артерии (толщина h , внутренний радиус R_i , плотность ρ_0 , модули Юнга E_z , E_θ , коэффициенты Пуассона ν_z , ν_θ , начальная сила продольного натяжения T_{zz}^0) и параметры потока крови (динамическая вязкость μ , плотность ρ , период сердцебиения T).

Пусть задана комплексная функция давления

$$\tilde{p}(t) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{in\omega t}. \quad (10)$$

Практический смысл для нас имеет её вещественная часть $p(t) = \operatorname{Re} \tilde{p}(t)$. Частота ω связана с периодом сердцебиения T соотношением $\omega = 2\pi/T$. Заметим, что если $p_n = A_n - iB_n$, то

$$p(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

с коэффициентами разложения

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt, \quad A_n = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt, \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt.$$

Теперь, исходя из второго равенства в (8) при $z = 0$, запишем комплексную функцию радиального смещения:

$$\tilde{\eta}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_i \zeta}{2E^+} (1 + mF_{10}) p_n e^{in\omega t}.$$

Практический смысл имеет вещественная часть $\eta(t) = \operatorname{Re} \tilde{\eta}(t)$.

Перейдём теперь к описанию обратной задачи. Рассматриваемая модель содержит ряд параметров, которые могут быть важными в диагностических целях: $E_z, E_\theta, \nu_z, \nu_\theta, \mu, \rho, \rho_0, h, T_{zz}^0$. Пусть $\pi \in \mathbb{R}^m$ — вектор, который содержит интересующий нас набор параметров из данного списка. Этот набор может быть различным в зависимости от конкретной постановки задачи. На практике обычно бывают известны диапазоны, в которых должны лежать выбранные параметры. Таким образом, априори известна принадлежность вектора π некоторому m -мерному параллелепипеду $\Pi \subset \mathbb{R}^m$. Известными являются функции $p(t)$ и $\eta(t)$.

Обозначим

$$C_n^* = \frac{R_i \zeta}{2E^+} (1 + mF_{10}). \quad (11)$$

Пусть $C_n^* p_n = a_n - ib_n$, $a_n = \operatorname{Re}(C_n^* p_n)$, $b_n = -\operatorname{Im}(C_n^* p_n)$. Тогда

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}(C_n^* p_n e^{in\omega t}) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}((a_n - ib_n)(\cos n\omega t + i \sin n\omega t)) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t). \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, $a_n = a_n(\pi)$, $b_n = b_n(\pi)$ есть коэффициенты разложения $\eta(t)$ в ряд Фурье. В обратной задаче функция $\eta(t)$ известна, а значит, известны и её коэффициенты Фурье. По этим данным необходимо найти искомый вектор π . Для его нахождения будем минимизировать функцию

$$f_M(\pi) = \sum_{n=1}^M (|a_n(\pi) - a_n^*| + |b_n(\pi) - b_n^*|), \quad \pi \in \Pi. \quad (13)$$

Выше функция давления $p(t)$ считалась известной. Однако на практике её непрерывное измерение требует использования дорогостоящих измерительных приборов. Чаще бывают известны лишь максимальное и минимальное значения этой функции, измеряемые обычным тонометром: p_{\max}^* и p_{\min}^* . В связи с этим, рассмотрим другую постановку обратной задачи, включив в список неизвестных параметров коэффициенты A_n и B_n разложения функции $p(t)$ в ряд Фурье. Зафиксируем $M \in \mathbb{N}$ и определим вектор $\varphi = (A_0, A_1, \dots, A_M, B_1, \dots, B_M)$ подлежащих нахождению коэффициентов Фурье функции $p(t)$. Заметим, что определённые выше функции $a_n = a_n(\pi)$, $b_n = b_n(\pi)$ включали зависимость от коэффициентов $p_n = A_n - iB_n$, так что $a_n = a_n(\pi, \varphi)$, $b_n = b_n(\pi, \varphi)$. Здесь a_n и b_n есть коэффициенты Фурье функции $\eta(t)$, определяемой по видеоизображениям УЗИ, так что в обратной задаче известны их значения a_n^* и b_n^* . Обратная задача в модифицированной постановке сводится к минимизации функции

$$\begin{aligned} \tilde{f}_M(\pi, \varphi) = & \frac{1}{(\eta_{\max}^* - \eta_{\min}^*)/2} \sum_{n=1}^M (|(a_n(\pi, \varphi) - a_n^*)| + |(b_n(\pi, \varphi) - b_n^*)|) + \\ & + \frac{1}{(p_{\max}^* + p_{\min}^*)/2} (|p_{\max}(\varphi) - p_{\max}^*| + |p_{\min}(\varphi) - p_{\min}^*|), \end{aligned} \quad (14)$$

где η_{\max}^* и η_{\min}^* — известные максимальное и минимальное значения функции $\eta(t)$ на отрезке $[0, T]$; величины $p_{\max}(\varphi)$ и $p_{\min}(\varphi)$ суть максимальное и минимальное значения функции $p(t)$, построенной по её коэффициентам Фурье φ (коэффициенты с номерами, большими M , принимаются равными нулю). Весовые коэффициенты $((\eta_{\max}^* - \eta_{\min}^*)/2)^{-1}$ и $((p_{\max}^* + p_{\min}^*)/2)^{-1}$ введены для того, чтобы слагаемые в функции (14) имели сопоставимую друг с другом величину. Например, выбор первого из этих коэффициентов связан с тем, что основные коэффициенты Фурье функции $\eta(t)$, кроме коэффициента a_0 , не входящего в формулу (14),

должны быть сопоставимы по величине с разностью между максимальным и минимальным значениями этой функции.

6. Решение обратной задачи с известной функцией давления и модельными данными. В этом разделе представлены численные эксперименты по решению обратной задачи восстановления параметров стенки артерии. Для проведения расчётов в модельных примерах использовались следующие значения параметров (см. [19] и приведённые там ссылки, а также [20-22]):

- период сердцебиения человека $T = 0.85$ с;
- толщина стенки артерии $h = 0.001$ м;
- внутренний радиус артерии $R_i = 0.0035$ м;
- плотность стенки артерии $\rho_0 = 1060$ кг/м³.
- плотность крови $\rho = 1060$ кг/м³;
- динамическая вязкость крови $\mu = 0.0035$ Па · с;
- модули Юнга $E_z = E_\theta = 210\,000$ Па;
- коэффициенты Пуассона $\nu_z, \nu_\theta = 0.45$;
- начальная сила продольного натяжения $T_{zz}^0 = 315$ Н/м;

В минимизируемых функциях (13), (14) был произведён переход к новым безразмерным аргументам, составляющим вектор неизвестных π , пропорциональным исходным аргументам и равным 1, когда те принимают указанные выше значения. Это равносильно использованию для измерения данных параметров не единиц СИ, а специальных единиц, показывающих, во сколько раз эти параметры отличаются от указанных «стандартных» значений. Были рассмотрены несколько постановок обратной задачи, в которых неизвестными служили те или иные наборы параметров: (E_z, T_{zz}^0) , (E_θ, T_{zz}^0) , $(E_z, E_\theta, T_{zz}^0)$, $(E_z, E_\theta, \rho_0, T_{zz}^0)$. Выбор именно этих наборов неизвестных параметров связан с тем, что именно значения E_z, E_θ, ρ_0 в максимальной мере соответствуют неформальному понятию «жёсткости» стенки сосуда, а параметр T_{zz}^0 сложно измерить. Остальные параметры считались известными. В модельных примерах использовалась функция давления $p(t)$ из [23], график которой представлен на рис.

1. Время t на этом и следующих графиках указано в секундах. Значения функции были переведены в паскали, а затем были численно найдены коэффициенты Фурье этой функции:

$$\begin{aligned} A_0 &= 11310, A_1 = 3820, B_1 = 1300, A_2 = 2720, B_2 = 300, \\ A_3 &= 1380, B_3 = 180, A_4 = 160, B_4 = -40 \text{ (Па)}. \end{aligned} \quad (15)$$

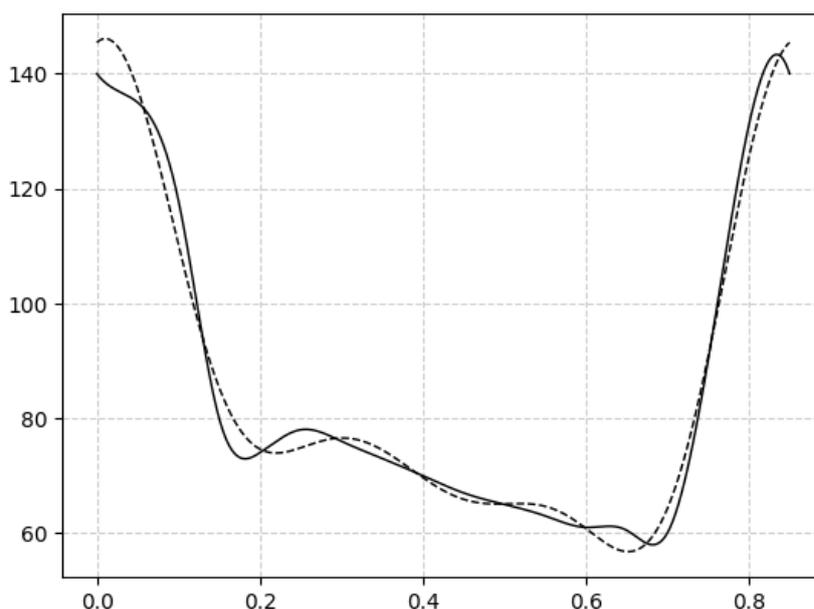


Рис. 1: График давления $p(t)$, мм.рт.ст. Пунктирной линией показано её приближение $A_0 + \sum_{n=1}^4 (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$, восстановленное по коэффициентам Фурье (15).

Вначале по формулам из раздела 5 решалась прямая задача. График полученной функции $\eta(t)$ представлен на рис. 2.

Далее решалась обратная задача с заранее известным решением, в силу обезразмеривания параметров представляющим собой вектор, составленный из единиц. В качестве входных данных в этой задаче использовалась функция $\eta(t)$, полученная при решении прямой задачи. Её коэффициенты Фурье a_n^*, b_n^* , $1 \leq n \leq M$ находились с помощью численного интегрирования. Затем мы искали точку минимума функции (13) с

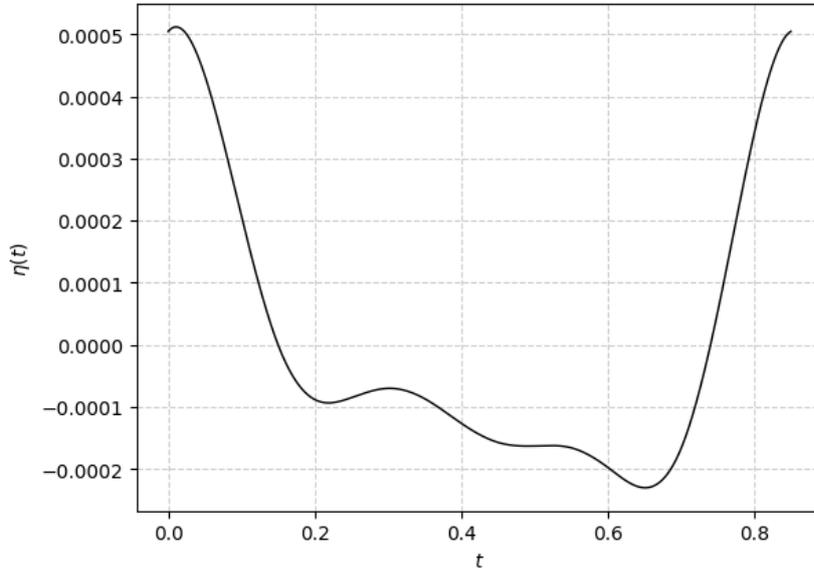


Рис. 2: График функции $\eta(t)$, м., полученной путём решения прямой задачи

помощью метода роя частиц (PSO, см., например, [24]), для реализации которого использовалась библиотека `pyswarm` языка программирования Python. В наших численных экспериментах этот метод показал заметно лучшие результаты, чем, например, при замене модулей в функции (13) на квадраты и использовании классических методов минимизации гладких функций. Параметры метода роя частиц были заданы следующим образом: размер роя — 300 частиц; максимальное число итераций — 300; диапазоны изменения каждого параметра, в рамках которых производился поиск точки минимума — $[0.8, 1.2]$. Количество слагаемых в функции (13) принималось равным $M = 4$. Для различных наборов искомых параметров результаты расчётов представлены в таблице 2. Близость рассчитанного решения к точному и малость значения минимизируемой функции f_M на рассчитанном решении указывают на высокую точность решения обратной задачи с помощью выбранного нами метода. Для сравнения приведены значения функции f_M не только в рассчитанном решении π , но и в точке π_0 , все координаты которой равны 0.8.

Была исследована однозначная разрешимость обратной задачи при помощи алгоритма, описанного в разделе 3. При этом входными дан-

Таблица 2: Обратная задача с известной функцией $p(t)$ и модельными данными. Указаны наборы неизвестных параметров, точное решение π^* , рассчитанное решение π , значение минимизируемой функции $f_M(\pi)$ на рассчитанном решении и в точке π_0 , приближённое значение степени отображения $\deg(F, p, \Pi)$, размеры сетки S в алгоритме проверки инъективности оператора F

Неизвестные	π^*	π	$f_M(\pi)$	$f_M(\pi_0)$	$\deg(F, p, \Pi)$	S
E_z, T_{zz}^0	[1, 1]	[1.000, 1.000]	$4.6 \cdot 10^{-7}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$	1.006	50×50
E_θ, T_{zz}^0	[1, 1]	[1.000, 1.000]	$2.6 \cdot 10^{-8}$	$4.2 \cdot 10^{-1}$	-1.012	50×50
E_z, E_θ, T_{zz}^0	[1, 1, 1]	[0.946, 0.997, 1.036]	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$4.0 \cdot 10^{-1}$	0.957	$25 \times 25 \times 25$
$E_z, E_\theta, \rho_0, T_{zz}^0$	[1, 1, 1, 1]	[1.025, 1.001, 1.060, 0.990]	$1.1 \cdot 10^{-6}$	$4.0 \cdot 10^{-1}$	-0.960	$10 \times 10 \times 10 \times 10$

ными задачи считались коэффициенты Фурье функции $\eta(t)$, взятые в количестве, равном количеству искомых коэффициентов. Таким образом, для задач с неизвестными (E_z, T_{zz}^0) и (E_θ, T_{zz}^0) входными данными были коэффициенты (a_1^*, b_1^*) ; для задачи с неизвестными $(E_z, E_\theta, T_{zz}^0)$ — коэффициенты (a_1^*, b_1^*, a_2^*) ; для задачи с неизвестными $(E_z, E_\theta, \rho_0, T_{zz}^0)$ — коэффициенты $(a_1^*, b_1^*, a_2^*, b_2^*)$. Рассматривался оператор F , действующий согласно формулам решения прямой задачи и устанавливающий соответствие между решениями обратной задачи и её входными данными. Размеры сетки S , указанные в таблице 2, подбирались экспериментально для достижения баланса между временем и точностью счёта. Во всех рассмотренных постановках алгоритм показал инъективность данного оператора на кубе $\Pi = [0.8, 1.2] \times \dots \times [0.8, 1.2]$ соответствующей размерности. При реализации шестого шага алгоритма использовался метод интегрирования Монте-Карло с 10^5 случайных точек. Вычисленные значения степени отображения приведены в таблице 2. Полученный результат означает, что двух, трёх или четырёх первых коэффициентов Фурье функции $\eta(t)$ достаточно для однозначного восстановления указанных наборов из двух, трёх или четырёх неизвестных параметров соответственно, в рамках рассматриваемых диапазонов их изменения. Тем более для восстановления параметров достаточно восьми коэффициентов a_n^*, b_n^* , используемых в численных расчётах.

7. Решение обратной задачи с неизвестной функцией давле-

ния и модельными данными. Теперь рассмотрим модифицированную постановку обратной задачи, в которой функция $p(t)$ считается неизвестной, а $\eta(t)$ — известной. В число неизвестных дополнительно вошли коэффициенты разложения $p(t)$ в ряд Фурье. Чтобы все искомые параметры имели сопоставимую величину, был произведён переход от этих коэффициентов Фурье $A_0, A_n, B_n, 1 \leq n \leq M$ к новым неизвестным $\hat{A}_0, \hat{A}_n, \hat{B}_n$ по формулам

$$\begin{aligned} A_0 &= \hat{A}_0 \cdot \frac{p_{\max}^* + p_{\min}^*}{2}, \\ A_n &= \hat{A}_n \cdot \frac{p_{\max}^* - p_{\min}^*}{2}, \quad 1 \leq n \leq M, \\ B_n &= \hat{B}_n \cdot \frac{p_{\max}^* - p_{\min}^*}{2}, \quad 1 \leq n \leq M. \end{aligned}$$

В модельной задаче точные значения этих новых неизвестных, соответствующие коэффициентам Фурье (15), равны

$$\begin{aligned} \hat{A}_0 &= 0.843, \quad \hat{A}_1 = 0.671, \quad \hat{B}_1 = 0.228, \quad \hat{A}_2 = 0.478, \quad \hat{B}_2 = 0.053, \\ \hat{A}_3 &= 0.242, \quad \hat{B}_3 = 0.032, \quad \hat{A}_4 = 0.028, \quad \hat{B}_4 = -0.007. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем разделе, использовалось значение $M = 4$. Была проведена минимизация функции (14) методом PSO, причём для искомых параметров стенки артерии использовался тот же диапазон изменения $[0.8, 1.2]$, что и в разделе 6. Для новых неизвестных были выбраны диапазоны $\hat{A}_0 \in [0.5, 1.5]$, $\hat{A}_n, \hat{B}_n \in [-1, 1]$, $1 \leq n \leq M$. Результаты расчётов для различных наборов искомых параметров представлены в таблице 3. Для сравнения приведены значения функции f_M не только на рассчитанном решении, но и в точке (π_0, φ_0) , где все координаты π_0 равны 0.8, а все координаты φ_0 равны 1.

Численные эксперименты показывают, что качество отыскания решения повышается при следующей модификации минимизируемой функции (14):

$$\begin{aligned} \tilde{f}_M(\pi, \varphi) &= \frac{100}{(\eta_{\max}^* - \eta_{\min}^*)/2} \sum_{n=1}^M (|a_n(\pi, \varphi) - a_n^*| + |b_n(\pi, \varphi) - b_n^*|) + \\ &+ \frac{0.01}{(p_{\max}^* + p_{\min}^*)/2} (|p_{\max}(\varphi) - p_{\max}^*| + |p_{\min}(\varphi) - p_{\min}^*|). \end{aligned} \quad (16)$$

Таблица 3: Обратная задача с неизвестной функцией $p(t)$ и модельными данными. Минимизируемая функция (14). Указаны наборы неизвестных параметров, точное решение π^* , рассчитанное решение π , значение минимизируемой функции f_M на рассчитанном решении и в точке (π_0, φ_0)

Неизвестные	π^*	π	$f_M(\pi, \varphi)$	$f_M(\pi_0, \varphi_0)$
E_z, T_{zz}^0	[1, 1]	[0.876, 0.930]	$3.9 \cdot 10^{-2}$	8.8
E_θ, T_{zz}^0	[1, 1]	[1.027, 1.049]	$6.1 \cdot 10^{-2}$	10.8
E_z, E_θ, T_{zz}^0	[1, 1, 1]	[0.956, 1.064, 1.200]	$9.8 \cdot 10^{-2}$	10.7
$E_z, E_\theta, \rho_0, T_{zz}^0$	[1, 1, 1, 1]	[0.863, 1.069, 1.179, 1.090]	$1.0 \cdot 10^{-1}$	10.7

Смысл модификации заключается в том, что максимум и минимум функции $p(t)$, равные p_{\max}^* и p_{\min}^* , заметно отличаются от максимума и минимума её приближения Фурье $A_0 + \sum_{n=1}^4 (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$, равных $p_{\max}(\varphi)$ и $p_{\min}(\varphi)$, поэтому функция (14) принимает заметно ненулевое значение, даже если все параметры найдены точно. При использовании функции (16) этот эффект существенно слабее, и минимум этой функции гораздо ближе к нулю. Результаты расчётов с модифицированной функцией (16) представлены в таблице 4. Видно, что значение минимизируемой функции на рассчитанном решении меньше значения в точке (π_0, φ_0) в значительно большей степени, чем в таблице 3.

Коэффициенты Фурье из вектора π , находимые при минимизации функции (14) или (16), позволяют восстановить функцию $p(t)$. Близость этой функции к точной функции $p(t)$, известной в наших модельных примерах, может служить косвенным показателем качества решения обратной задачи. Для нескольких различных постановок задачи эти две функции сравниваются на рис. 3.

Отметим, что единственность решения обратной задачи с неизвестной функцией $p(t)$ затруднительно исследовать с помощью алгоритма из раздела 3. Это связано с тем, что среди входных данных обратной задачи в этой постановке есть измеряемые тонометром величины p_{\min}^* , p_{\max}^* , а среди неизвестных — коэффициенты Фурье функции $p(t)$ в некотором конечном, и притом небольшом, количестве. Но тогда соответствующая прямая задача не является однозначно разрешимой, поскольку найти минимум и максимум p_{\min}^* , p_{\max}^* функции $p(t)$ по небольшому количеству её коэффициентов Фурье можно лишь приближённо. Таким образом, конечномерный оператор F прямой задачи здесь не может быть определён,

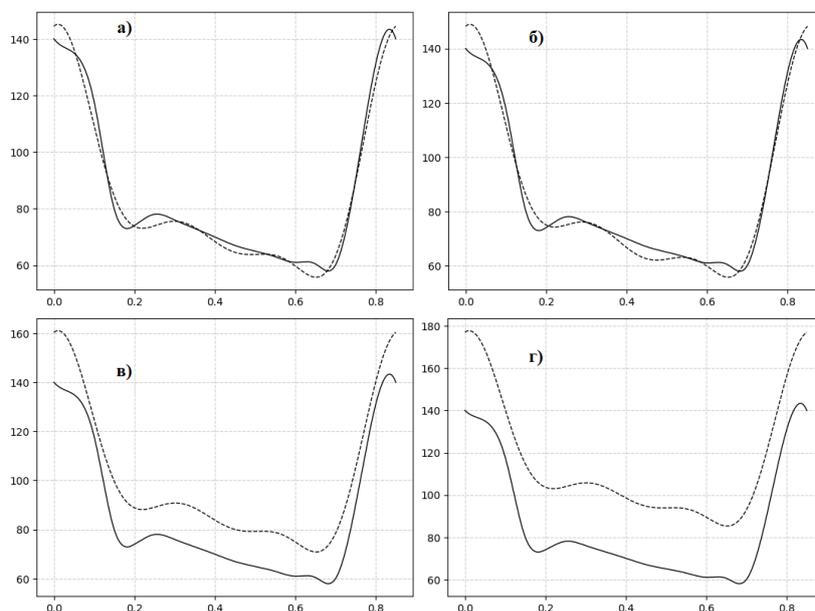


Рис. 3: График давления $p(t)$, мм.рт.ст. Жирной линией показана точная функция, пунктирной линией — восстановленная по решению обратной задачи. а) — неизвестные параметры $E_z, T_{zz}^{(0)}$, минимизируемая функция (14); б) — неизвестные параметры $E_z, E_\theta, \rho_0, T_{zz}^{(0)}$, минимизируемая функция (14); в) — неизвестные параметры $E_z, T_{zz}^{(0)}$, минимизируемая функция (16); г) — неизвестные параметры $E_z, E_\theta, \rho_0, T_{zz}^{(0)}$, минимизируемая функция (16)

а значит, не может быть и проверен на инъективность.

8. Решение обратной задачи с неизвестной функцией давления и реальными данными. В этом разделе описываются численные эксперименты по решению обратной задачи с неизвестной функцией $p(t)$, входными данными для которой выступали видеоизображения УЗИ и данные измерения давления у шести пациентов Республиканского онкологического клинического диспансера Республики Марий Эл. В таблице 5 приведены данные о пациентах. Для каждого пациента была найдена функция $\eta(t)$ путём анализа видеоизображений УЗИ сонной артерии с использованием алгоритма, изложенного в [7]. Типичный график такой функции изображён на рис. 4. Отметим, что после применения этого алгоритма вначале получается функция $R(t)$, заданная на временной сетке

Таблица 4: Обратная задача с неизвестной функцией $p(t)$ и модельными данными. Минимизируемая функция (16). Указаны наборы неизвестных параметров, точное решение π^* , рассчитанное решение π , значение минимизируемой функции \tilde{f}_M на рассчитанном решении и в точке (π_0, φ_0)

Неизвестные	π^*	π	$\tilde{f}_M(\pi, \varphi)$	$\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0)$
E_z, T_{zz}^0	[1, 1]	[0.991, 1.047]	$3.6 \cdot 10^{-3}$	$5.9 \cdot 10^2$
E_θ, T_{zz}^0	[1, 1]	[1.062, 1.048]	$8.9 \cdot 10^{-3}$	$7.9 \cdot 10^2$
E_z, E_θ, T_{zz}^0	[1, 1, 1]	[1.065, 1.059, 1.082]	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$7.8 \cdot 10^2$
$E_z, E_\theta, \rho_0, T_{zz}^0$	[1, 1, 1, 1]	[0.934, 1.021, 1.087, 0.984]	$6.1 \cdot 10^{-3}$	$7.8 \cdot 10^2$

с шагом в 1/12 секунды и показывающая изменения во времени радиуса сосуда, причём её значения даны в количестве пикселей на видеоизображении. Период данной функции выбирался в качестве параметра T ; для всех других параметров модели, кроме двух, трёх или четырёх выбранных неизвестных, использовались значения из раздела 6. Чтобы получить функцию $\eta(t)$, мы находили среднее значение функции $R(t)$ и умножали её на такую константу, чтобы среднее значение стало равно внутреннему радиусу артерии R_i . Затем мы вычитали из полученной функции значение R_i и получали функцию $\eta(t)$. Переход от сеточной функции к непрерывной осуществлялся с помощью кубической сплайн-интерполяции.

Результаты решения обратной задачи с указанными входными данными приведены в таблице 5. Минимизация функции (16) производилась в рамках диапазонов [0.8, 1.2] для параметров стенки артерии (в тех же единицах, что и в разделах 6-7), [0.5, 1.5] для \hat{A}_0 , [-1.5, 1.5] для \hat{A}_n, \hat{B}_n , $1 \leq n \leq M$, $M = 4$. В отличие от задач с модельными данными, рассматривавшихся в предыдущих разделах, в задаче с реальными данными точное решение заранее неизвестно и значения искомым параметров могут отличаться от единиц. Единственным указанием на качество работы алгоритма является значение на полученном решении минимизируемой функции (16), которое должно быть как можно ближе к нулю, и должно быть значительно меньше значения в точке (π_0, φ_0) , определённой в разделе 7.

9. Упрощенный способ определения параметра жёсткости сосуда. Когда функция давления $p(t)$ неизвестна, а известны лишь её максимальное и минимальное значения, неизбежны существенные погреш-

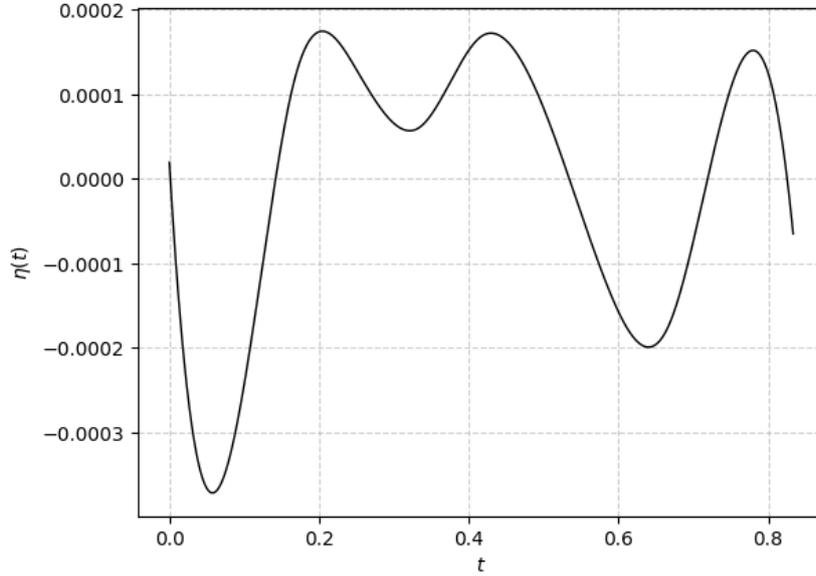


Рис. 4: Типичный график функции $\eta(t)$, м., полученный путём анализа видеоизображений УЗИ

ности в решении обратной задачи восстановления параметров стенки артерии. Поэтому может быть целесообразно упрощение используемой математической модели, если оно не приведёт к заметному снижению качества получаемых результатов. Рассмотрим одно возможное упрощение. Будем считать, что жёсткость стенки сосуда описывается одним параметром $E = E_z = E_\theta$. Тогда $a = E_\theta/E_z = 1$, параметр b_1 в формулах (9) удовлетворяет соотношению

$$b_1 \in (1 + L^+ - \nu_z \nu_\theta, 1 + L^+),$$

а так как для артерий человека $\nu_z, \nu_\theta \approx 0.45$, можно принять $b_1 \approx 1 + L^+$ вне зависимости от значения $L^+ > 0$. Далее, имеем $\rho_0/\rho \approx 1$, $h/R < 1$, $R/R_i > 1$, поэтому в формуле для коэффициента b_3 второе слагаемое мало по сравнению с первым и

$$b_3 \approx \frac{2R}{R_i}(1 + L^+).$$

Заметим теперь, что $|F_{10}| \ll 1$ и

$$\zeta \approx \frac{b_3 - F_{10}b_2}{b_1(1 - F_{10})} \approx \frac{b_3}{b_1} \approx \frac{2R}{R_i}.$$

Согласно (11),

$$C_n^* \approx \frac{R_i \zeta}{2E^+} \approx \frac{R}{E^+}.$$

Подставляя сюда формулу для параметра E^+ из (5), получаем:

$$C_n^* \approx \frac{R^2(1 - \nu_z \nu_\theta)}{Eh} \equiv C^*. \quad (17)$$

Наши расчёты вполне подтверждают эту приближённую формулу. Например, для значений параметров из раздела 6 имеем

$$C_1^* \approx 6.21 \cdot 10^{-8} + i \cdot 8.65 \cdot 10^{-10}, \quad C_2^* \approx 6.24 \cdot 10^{-8} + i \cdot 6.35 \cdot 10^{-10},$$

$$C_3^* \approx 6.25 \cdot 10^{-8} + i \cdot 5.27 \cdot 10^{-10}, \quad C_4^* \approx 6.26 \cdot 10^{-8} + i \cdot 4.60 \cdot 10^{-10},$$

в то время как формула (17) даёт приближение $C_n^* \approx 6.1 \cdot 10^{-8}$ для любых n .

Подставим (17) в (12) и используем равенство (10):

$$\eta(t) \approx C^*(\operatorname{Re} \tilde{p}(t) - p_0) = \frac{R^2(1 - \nu_z \nu_\theta)}{Eh}(p(t) - p_0).$$

Отсюда следует, что

$$\eta_{\max}^* - \eta_{\min}^* \approx \frac{R^2(1 - \nu_z \nu_\theta)}{Eh}(p_{\max}^* - p_{\min}^*).$$

Заметим теперь, что $\eta_{\max}^* - \eta_{\min}^* = R_{\max}^* - R_{\min}^*$, где R_{\max}^* , R_{\min}^* — максимальный и минимальный (внутренние) радиусы сосуда в процессе его пульсации. Таким образом,

$$\tilde{E} = \frac{p_{\max}^* - p_{\min}^*}{(R_{\max}^* - R_{\min}^*)/R_i} \approx \frac{R_i h}{R^2(1 - \nu_z \nu_\theta)} E. \quad (18)$$

Как видим, эта величина пропорциональна параметру жёсткости E . В то же время она может быть вычислена по данным измерения давления

p_{\max}^* , p_{\min}^* , а также максимальному, минимальному и среднему значениям внутреннего радиуса сосуда (R_{\max}^* , R_{\min}^* , R_i), определяемым по видеоизображению УЗИ. При этом важно, что величина $(R_{\max}^* - R_{\min}^*)/R_i$ безразмерна и не зависит от используемых единиц измерения радиуса, которые при обработке видеоизображения могут быть неизвестны.

В таблице 5 приведены результаты вычисления величины (18) для пациентов 1-8. Чем больше значение этой величины, тем выше жёсткость артерии.

10. Анализ результатов. Из таблицы 5 видно, что результат нахождения каждого параметра стенки артерии, например E_z , может заметно различаться в зависимости от набора неизвестных параметров, используемых в постановке обратной задачи. Мы считаем, что в наибольшей степени заслуживают доверия значения параметров, полученные при решении обратной задачи с четырьмя неизвестными параметрами E_z , E_θ , ρ_0 , T_{zz}^0 , причём в качестве показателей жёсткости стенки артерии следует использовать первые два из них. Будем обозначать их через $E_z^{(4)}$ и $E_\theta^{(4)}$, чтобы не путать с параметрами E_z , E_θ , рассчитанными в других постановках обратной задачи. Также в качестве показателя жёсткости подходит величина \tilde{E} , рассчитываемая по алгоритму из раздела 9. Между указанными тремя величинами наблюдается отчётливая корреляция (коэффициенты корреляции, рассчитанные по таблице 5, равны $r_{E_z^{(4)} E_\theta^{(4)}} = 0.88$, $r_{E_z^{(4)} \tilde{E}} = 0.72$, $r_{E_\theta^{(4)} \tilde{E}} = 0.89$). В то же время, корреляции между параметрами жёсткости стенки артерии, найденными в рамках других постановок обратной задачи, значительно слабее или вообще отрицательны. Это может быть связано с тем, что в этих постановках параметр ρ_0 , который может отличаться у разных людей и сам зависит от состояния артерии, принимается равным одному и тому же «стандартному» значению.

Также таблица 5 позволяет увидеть отчётливую корреляцию параметров $E_z^{(4)}$, $E_\theta^{(4)}$, \tilde{E} с возрастом пациента. Это и должно выполняться из медицинских соображений, поскольку в старости жёсткость стенки артерии увеличивается.

В целом, результаты расчётов свидетельствуют о перспективности разработанного нами подхода к неинвазивному исследованию жёсткости кровеносных сосудов. Для более точных выводов требуется тестирование подхода на более широкой выборке пациентов.

References

1. Maksimov V.P. Reliable Computing Experiment in the Study of Functional-Differential Equations: Theory and Applications // Journal of Mathematical Sciences. 2018. V.230. P.712-716.
2. Boutouyrie P, Chowienczyk P, Humphrey J.D, Mitchell G.F. Arterial Stiffness and Cardiovascular Risk in Hypertension // Circ Res. 2021. V.128, N7. P.864-886.
3. Xuereb R.A., Magri C.J., Xuereb R.G. Arterial Stiffness and its Impact on Cardiovascular Health // Curr Cardiol Rep. 2023. V.25. P.1337-1349.
4. Steppan J., et al. Exercise, vascular stiffness, and tissue transglutaminase // J Am Heart Assoc. 2014. V.3, N2. e000599.
5. Mattison J.A., et al. Resveratrol prevents high fat / sucrose diet-induced central arterial wall inflammation and stiffening in nonhuman primates // Cell Metab. 2014. V.20, N1. P.183-90.
6. Jannasz I., Sondej T., Targowski T., Dobrowolski A., Olszewski R. Pulse wave velocity — a useful tool in assessing the stiffness of the arteries // Pol Merkur Lekarski. 2019. V.46, N276. P.257-262. (in Polish)
7. Pasynkov D.V., Kolchev A.A., Egoshin I.A., Klyushkin I.V., Pasynkova O.O. A Method for Automatic Calculation of the Diameter of a Pulsating Blood Vessel on Ultrasound Images in Video Stream Mode // Biomedical Engineering. 2023. V.57, N1. P.23-27.
8. Nirenberg L. Topics in Nonlinear Functional Analysis. New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 2001.
9. Hutson V.C.L., Pym J.S. Applications of Functional Analysis and Operator Theory. London: Academic Press, 1980.
10. Schwartz J.T. Nonlinear Functional Analysis. N.Y.: Gordon and Breach Science Publishers, 1969.
11. Kokurin M.Yu. Additional chapters of mathematical analysis. Elements of the theory of nonlinear maps of finite-dimensional spaces. Yoshkar-Ola: Mari State University, 2021. (in Russian)
12. Kudryavtsev L.D. On differentiable maps // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1954. V.XCV, N5. P.921-923. (in Russian)
13. Rodnyansky A.M. On continuously differentiable maps of open sets // Mathematical Collection. 1955. V.36, N2. P.233-262. (in Russian)
14. Todd M.J. The Computation of Fixed Points and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 1976.

15. Schwerdt H., Constantinesco A. Periodic flow of a viscous fluid superposed on steady flow in an orthotropic initially stressed elastic tube. Determination of fluid velocities and displacement components of the wall // *Biorheology*. 1976. V.13, N1. P.7-20.
16. Atabek H.B. Wave propagation through a viscous fluid contained in a tethered, initially stresses, orthotropic elastic tube // *Biophys J*. 1968. V.8, N5. P.626-649.
17. Myers L.J., Capper W.L. Analytical Solution for Pulsatile Axial Flow Velocity Waveforms in Curved Elastic Tubes // *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. 2001. V.48, N8. P.864-873.
18. Simakov S.S. New Boundary Conditions for One-Dimensional Network Models of Hemodynamics // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2021. V.61. P.2102-2117.
19. Maerefat M., Rahgozar S., Mokhtari-Dizaji M. Estimation of Elasticity by Modeling Blood Flow Using Clinical Ultrasound Data // *Pakistan Journal of Biological Sciences*. 2007. V.10. P.2569-2574.
20. Howard G., Sharrett A.R., Heiss G., Evans G.W., Chambless L.E., Riley W.A., Burke G.L. Carotid artery intimal-medial thickness distribution in general populations as evaluated by B-mode ultrasound // *ARIC Investigators. Stroke*. 1993. V.24, N9. P.1297-1304.
21. Yin Z., Guo J., Li R., et al. Common carotid artery diameter and the risk of cardiovascular disease mortality: a prospective cohort study in northeast China // *BMC Public Health*. 2024. V.24, 251.
22. Tsangaris S., Drikakis D. Pulsating blood flow in an initially stressed, anisotropic elastic tube: linear approximation of pressure waves // *Medical and Biological Engineering and Computing*. 1989. V.27. P.82-88.
23. Myers T.G., Ripoll V.R., Cuenca A.S.T., Mitchell S.L., McGuinness M.J. Modelling the cardiovascular system for assessing the blood pressure curve // *Mathematics-in-Industry Case Studies*. 2017. V.8, N2. <https://doi.org/10.1186/s40929-017-0011-1>
24. Poli R. Analysis of the Publications on the Applications of Particle Swarm Optimisation // *Journal of Artificial Evolution and Applications*. 2008. 685175.

Mikhail Mikhailovich Kokurin,
Mari State University,
Lenin sqr., 1,
424000, Yoshkar-Ola, Russia
Email address: kokurin@nextmail.ru

Dmitry Valerevich Pasyнков,
Mari State University,
Lenin sqr., 1,
424000, Yoshkar-Ola, Russia
Email address: passynkov@mail.ru

Dmitry Alekseevich Pakhmutov,
Mari State University,
Lenin sqr., 1,
424000, Yoshkar-Ola, Russia
Email address: dmitryaric@mail.ru

Ivan Alekseevich Vinokurov,
Mari State University,
Lenin sqr., 1,
424000, Yoshkar-Ola, Russia
Email address: iavinokurovworking@gmail.com

Ivan Aleksandrovich Egoshin,
Mari State University,
Lenin sqr., 1,
424000, Yoshkar-Ola, Russia
Email address: jungl91@mail.ru

Таблица 5: Обратная задача с неизвестной функцией $p(t)$ и реальными данными. Минимизируемая функция (16). Для каждого пациента указаны возраст и давление (в ед. рт. ст.), рассчитанное решение π , значение минимизируемой функции на рассчитанном решении и в точке (π_0, φ_0)

Пациенты	Неизвестные E_z, T_{zz}^0	Неизвестные E_θ, T_{zz}^0	Неизвестные E_z, E_θ, T_{zz}^0	Неизвестные $E_z, E_\theta, \rho_0, T_{zz}^0$	Упрощенный подход
Пациент 1 (18 лет, 110/70)	$\pi = [0.920, 0.811],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 1.9 \cdot 10^{-3},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 6.0 \cdot 10^2$	$\pi = [1.199, 0.888],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 4.5 \cdot 10^{-3},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 7.9 \cdot 10^2$	$\pi = [1.180, 1.181, 0.934],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 7.0 \cdot 10^{-3},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 7.8 \cdot 10^2$	$\pi = [0.882, 0.998, 0.826, 0.885],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 3.0 \cdot 10^{-3},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 7.8 \cdot 10^2$	$\tilde{E} = 66.14$
Пациент 2 (39 лет, 125/90)	$\pi = [1.066, 0.951],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 1.9 \cdot 10^{-3},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 8.2 \cdot 10^2$	$\pi = [1.102, 0.868],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 3.3 \cdot 10^{-3},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 1.0 \cdot 10^3$	$\pi = [1.052, 0.998, 1.081],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 8.9 \cdot 10^{-4},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 1.0 \cdot 10^3$	$\pi = [0.891, 1.048, 1.000, 1.025],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 2.0 \cdot 10^{-3},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 1.0 \cdot 10^3$	$\tilde{E} = 135.8$
Пациент 3 (49 лет, 110/80)	$\pi = [0.948, 0.886],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 3.8 \cdot 10^{-3},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 7.4 \cdot 10^2$	$\pi = [1.073, 0.877],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 2.6 \cdot 10^{-3},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 9.3 \cdot 10^2$	$\pi = [0.932, 1.029, 0.953],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 3.5 \cdot 10^{-3},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 9.3 \cdot 10^2$	$\pi = [0.876, 1.026, 0.950, 0.913],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 4.1 \cdot 10^{-4},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 9.3 \cdot 10^2$	$\tilde{E} = 266.2$
Пациент 4 (67 лет, 130/90)	$\pi = [0.937, 0.910],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 1.1 \cdot 10^{-2},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 1.0 \cdot 10^3$	$\pi = [1.191, 1.110],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 7.8 \cdot 10^{-4},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 1.3 \cdot 10^3$	$\pi = [1.195, 1.188, 0.957],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 1.1 \cdot 10^{-2},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 1.3 \cdot 10^3$	$\pi = [1.049, 1.168, 0.994, 0.905],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 1.6 \cdot 10^{-3},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 1.3 \cdot 10^3$	$\tilde{E} = 352.9$
Пациент 5 (70 лет, 145/90)	$\pi = [0.809, 0.917],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 5.7 \cdot 10^{-3},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 1.8 \cdot 10^3$	$\pi = [1.181, 1.008],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 3.5 \cdot 10^{-3},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 2.3 \cdot 10^3$	$\pi = [1.032, 0.887, 1.006],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 5.1 \cdot 10^{-3},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 2.3 \cdot 10^3$	$\pi = [1.082, 1.200, 1.080, 1.084],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 9.7 \cdot 10^{-3},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 2.3 \cdot 10^3$	$\tilde{E} = 663.9$
Пациент 6 (74 года, 160/100)	$\pi = [1.023, 0.957],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 9.8 \cdot 10^{-3},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 5.3 \cdot 10^2$	$\pi = [1.187, 1.042],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 4.7,$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 6.3 \cdot 10^2$	$\pi = [1.000, 1.114, 1.136],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 7.0 \cdot 10^{-3},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 6.3 \cdot 10^2$	$\pi = [1.011, 1.043, 0.860, 0.834],$ $\tilde{f}_M(\pi, \varphi) = 7.0 \cdot 10^{-2},$ $\tilde{f}_M(\pi_0, \varphi_0) = 6.3 \cdot 10^2$	$\tilde{E} = 124.0$