

# СРАВНЕНИЕ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКУ НЕВАНЛИННЫ И ДЖРБАШЯНА

Е.Г. Родикова, К.В. Кислакова

**АННОТАЦИЯ.** Центральным понятием теории мероморфных функций Р. Неванлинны является понятие характеристической функции. В комплексном анализе хорошо известны классы функций ограниченного вида и классы Неванлинны-Джрбашяна, введенные в монографии Р. Неванлинны. Эти классы и их аналитические подклассы сыграли важную роль в развитии теории функций комплексного переменного. В 1964 году М. Джрбашян предпринял попытку обобщить стройную теорию Р. Неванлинны введением новой характеристической функции и классов мероморфных функций с ограниченной  $\alpha$ -характеристикой. Оказалось, что введенные им классы шире классов Неванлинны-Джрбашяна. Развивая теорию Неванлинны, Ф.А. Шамоян в 1999 году ввел и исследовал классы мероморфных функций с характеристикой Р. Неванлинны из  $L^p$ -весовых пространств. Связь между классами Шамояна и весовыми классами Джрбашяна исследуется в этой работе.

**Ключевые слова:** аналитические функции, характеристика Неванлинны,  $\alpha$ -характеристика Джрбашяна, оператор дифференцирования.

**УДК:** 517.53

**АБСТРАКТ.** The central concept of R. Nevanlinna's theory of meromorphic functions is the concept of characteristic function. In complex analysis, classes of functions of bounded type and Nevanlinna-Dzhrbashyan classes, introduced in R. Nevanlinna's monograph, are well known. These classes and their analytic subclasses played an important role in the development of the theory of functions of a complex variable. In 1964, M. Djrbashyan attempted to generalize R. Nevanlinna's harmonious theory by introducing a new characteristic function and classes of meromorphic functions with bounded  $\alpha$ -characteristic. It turned out that the introduced classes are wider than the Nevanlinna-Dzhrbashyan classes. Developing Nevanlinna's theory, F.A. Shamoyan in 1999 introduced and studied classes of meromorphic functions with R. Nevanlinna characteristic from  $L^p$ -weighted spaces. The connection between Shamoyan's classes and Djrbashyan's weight classes is studied in this paper.

**Key words:** analytic functions, Nevanlinna's characteristic, Djrbashyan's  $\alpha$ -characteristic, differential operator.

**AMS Subject Classification:** Primary 30H99; Secondary 30H15, 30H50.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $\mathbb{C}$  - комплексная плоскость,  $D$  - единичный круг на  $\mathbb{C}$ ,  $H(D)$  - множество всех функций, аналитических в  $D$ ,  $h(D)$  - множество всех функций, гармонических в  $D$ ,  $a^+ = \max(0, a)$ ,  $a^- = \max(0, -a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Обозначим через  $T(r, f)$  характеристику Р. Неванлинны функции  $f \in H(D)$  [3], а через  $T_\alpha(r, f)$  -  $\alpha$ -характеристику М.М. Джрбашяна [1]:

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi,$$
$$T_\alpha(r, f) = \frac{r^{-(\alpha+1)}}{2\pi \cdot \Gamma(\alpha+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_0^r (r-t)^\alpha \ln |f(te^{i\varphi})| dt \right)^+ d\varphi, \alpha > -1,$$

где  $\Gamma$  — функция Эйлера.

Отметим, что  $\alpha$ -характеристика была введена М.М. Джрбашяном в 1964 г. при обобщении им теории Р. Неванлинны, краеугольным камнем которой является понятие характеристической функции:  $\lim_{\alpha \rightarrow -1} T_\alpha(r, f) = T(r, f)$ .

Для множества  $E \subset \mathbb{C}$  и функций  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  будем писать  $f(\zeta) \lesssim g(\zeta)$ ,  $\zeta \in E$ , если существует постоянная  $C > 0$ , для которой  $f(\zeta) \leq Cg(\zeta)$  для всех  $\zeta \in E$ .

При любом  $\alpha > -1$  справедливо неравенство:

$$\sup_{0 < r < 1} T_\alpha(r, f) \lesssim \int_0^1 (1-r)^\alpha T(r, f) dr,$$

поэтому введённый М. Джрбашяном класс аналитических функций в круге, имеющих там ограниченную  $\alpha$ -характеристику, шире класса Неванлинны-Джрбашяна

$$S_\alpha = \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 (1-r)^\alpha T(r, f) dr < +\infty \right\},$$

введённого Р. Неванлинной в [3]. Обозначим  $\Omega$  — множество всех измеримых положительных функций на  $\Delta = (0, 1]$ , для которых существуют числа  $m_\omega, q_\omega$  из  $\Delta$ ,  $M_\omega$  такие, что (см. [8, с. 7])

$$(1) \quad m_\omega \leq \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leq M_\omega, \quad r \in \Delta, \quad \lambda \in [q_\omega, 1].$$

Простейшими примерами таких функций могут служить  $\omega(t) = t^\gamma (\ln \dots \ln \frac{e}{t})^\beta$ ,  $t \in \Delta$ ,  $\gamma > -1$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Обозначим через  $L_\omega^p$ ,  $0 < p < +\infty$  весовое пространство измеримых в  $D$  функций  $g$  таких, что

$$\left( \int_0^1 \omega(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})| d\theta \right)^p r dr \right)^{1/p} < +\infty,$$

$$A_\omega^p = L_\omega^p \cap H(D), \quad h_\omega^p = L_\omega^p \cap h(D).$$

Пусть  $\omega \in \Omega$ ,  $0 < p < +\infty$ ,  $\alpha > -1$ ,  $\beta > -1$ . Введём в рассмотрение следующие классы функций:

$$N_{\omega, \alpha}^p = \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 \omega(1-r) T_\alpha^p(r, f) dr < +\infty \right\},$$

$$S_{\omega, \beta}^p = \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 (1-r)^\beta \omega(1-r) T^p(r, f) dr < +\infty \right\}.$$

Впервые классы  $S_{\omega, 0}^p$  были введены и исследованы Ф.А. Шамояном в 1999 г. в работе [5] как обобщение хорошо известных в научной литературе классов Неванлинны-Джрбашяна [3]. Классы  $N_{\omega, \alpha}^p$  при  $\omega(t) = t^\gamma$ ,  $\gamma > -1$ , были введены и исследованы в работе первого автора [4].

В работе [7] установлено, что при  $\omega(t) = t^\gamma$ ,  $\gamma > -1$ , классы  $N_{\omega, \alpha}^p$  и  $S_{\omega, (\alpha+1)p}^p$  совпадают для всех  $0 < p < +\infty$ ,  $\alpha > -1$ . Мы распространяем этот результат на произвольные весовые функции  $\omega \in \Omega$ :

**Теорема 1.** *Классы  $N_{\omega, \alpha}^p$  и  $S_{\omega, (\alpha+1)p}^p$  совпадают при всех  $0 < p < +\infty$ ,  $\alpha > -1$ .*

Как следствие доказанной теоремы, мы найдём условия, при которых класс  $N_{\omega, \alpha}^p$  инвариантен относительно оператора дифференцирования.

## 2. ФОРМУЛИРОВКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Для доказательства основного результата нам потребуется вспомогательное утверждение, являющееся следствием теоремы 2, установленной в работе [7].

**Теорема А.** При всех  $0 < p < +\infty$ ,  $\alpha > -1$  справедливо следующее вложение:  $S_{\omega, (\alpha+1)p}^p \subset N_{\omega, \alpha}^p$ .

Обозначим  $Z_f$  – множество всех нулей нетривиальной функции  $f \in H(D)$ ,  $n(r) = \text{card}\{z_k : |z_k| < r\}$  – количество точек последовательности  $\{z_k\}_1^\infty$  в круге  $|z| < r < 1$  с учётом их кратностей.

Для любого  $\beta > -1$  символом  $\pi_\beta(z, z_k)$  будем обозначать бесконечное произведение М.М. Джрбашяна с нулями в точках последовательности  $\{z_k\}_1^{+\infty} \subset D$ ,  $0 < |z_k| \leq |z_{k+1}| < 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$  (см. [1], также [8, с. 97]).

Из теоремы 4.1 и леммы 4.2 монографии [8] следует:

**Теорема Б.** Если  $\{z_k\}_1^\infty = Z_f$  для произвольной функции  $f \in S_{\omega, (\alpha+1)p}^p$ , то

$$(2) \quad \int_0^1 \omega(1-r)n^p(r)(1-r)^{(\alpha+2)p} dr < +\infty.$$

Обратно, если (2) выполняется, то можно построить произведение Джрбашяна  $\pi_\beta(z, z_k)$ ,  $\beta > \alpha + 1 + \frac{\alpha_\omega + 1}{p}$ , из класса  $S_{\omega, (\alpha+1)p}^p$  с нулями в точках  $\{z_k\}_1^\infty$ .

Следуя М.М. Джрбашяну (см. [1]), определим также функцию

$$(3) \quad n_\alpha(r) = \frac{r^{-(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha+2)} \int_0^r (r-t)^{\alpha+1} \cdot \frac{n(t) - n(0)}{t} dt + \frac{n(0)}{\Gamma(\alpha+2)} (\ln r - k_\alpha),$$

где  $n(0)$  – кратность нуля в точке  $z = 0$ ,  $k_\alpha = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)}$ ,  $\alpha > -1$ .

Аналогичным образом, как в работе Е.Г. Родиковой [4], можно установить следующее утверждение:

**Теорема В.** Если  $\{z_k\}_1^\infty = Z_f$  для произвольной функции  $f \in N_{\omega, \alpha}^p$ , то

$$(4) \quad \int_0^1 \omega(1-r)n_\alpha^p(r) dr < +\infty.$$

Обратно, если (4) выполняется, то можно построить произведение Джрбашяна  $\pi_\beta(z, z_k)$ ,  $\beta > \alpha + 1 + \frac{\alpha_\omega + 1}{p}$ , из класса  $N_{\omega, \alpha}^p$  с нулями в точках  $\{z_k\}_1^\infty$ .

При доказательстве теоремы В существенную роль играет следующее утверждение:

**Лемма Г.** Из сходимости интеграла (4) следует сходимость интеграла (2).

*Доказательство.*

Для краткости обозначим

$$I_N = \int_0^1 \omega(1-r)n_\alpha^p(r) dr,$$

$$I_S = \int_0^1 \omega(1-r)n^p(r)(1-r)^{(\alpha+2)p} dr.$$

По определению

$$\begin{aligned} I_N &= \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} \right)^p \int_0^1 \omega(1-r)r^{-(\alpha+1)p} \left( \int_0^r (r-t)^{\alpha+1} \frac{n(t)}{t} dt \right)^p dr = \\ &= \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} \right)^p \int_0^1 \omega(1-r) \left( \int_0^1 (1-u)^{\alpha+1} \frac{n(ur)}{u} du \right)^p dr. \end{aligned}$$

Оценим последний интеграл снизу.

$$\begin{aligned} I_N &\geq \int_{1/3}^1 \omega(1-r) \left( \int_{1-\frac{1-r}{2r}}^1 (1-u)^{\alpha+1} n(ur) du \right)^p dr \geq \\ &\geq \tilde{c}_\alpha \int_{1/3}^1 n^p \left( \frac{3r-1}{2} \right) \omega(1-r)(1-r)^{(\alpha+2)p} dr = c_\alpha \int_0^1 n^p(\rho) \omega(1-\rho)(1-\rho)^{(\alpha+2)p} d\rho = I_S. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что если  $I_N < +\infty$ , то и  $I_S < +\infty$ . Лемма доказана.

Из теоремы В следует

**Теорема Д.** *Всякая функция  $f \in N_{\omega, \alpha}^p$  с нулями в точках последовательности  $\{z_k\}$ ,  $f(0) \neq 0$ , представима в виде:*

$$(5) \quad f(z) = \pi_\beta(z, z_k) \cdot \exp g(z),$$

где  $\beta > \alpha + 1 + \frac{\alpha\omega+1}{p}$ ,  $\exp g(z) \in N_{\omega, \alpha}^p$  при всех  $0 < p < +\infty$ ,  $\alpha > -1$ .

### 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ СТАТЬИ

**Доказательство теоремы 1.** Итак, для того, чтобы установить включение  $S_{\omega, (\alpha+1)p}^p \supset N_{\omega, \alpha}^p$ , нам достаточно показать, что функция  $G(z) = \exp g(z) = \exp(u(z) + iv(z))$  из представления (5), принадлежит классу  $S_{\omega, (\alpha+1)p}^p$  при всех  $0 < p < +\infty$ ,  $\alpha > -1$ .

Для этого нужно установить оценку

$$(6) \quad \int_0^1 \omega(1-r)(1-r)^{p(\alpha+1)} T^p(r, G) dr \lesssim \int_0^1 \omega(1-r) T_\alpha^p(r, G) dr.$$

Пусть  $\omega_1(1-r) = \omega(1-r)(1-r)^{p(\alpha+1)}$ . Обозначим

$$(7) \quad A(G) = \int_0^1 \omega(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_0^1 (1-t)^\alpha u(tre^{i\varphi}) dt \right)^+ d\varphi \right)^p dr < +\infty,$$

$$(8) \quad B(G) = \int_0^1 \omega_1(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |G(re^{i\theta})| d\theta \right)^p dr.$$

Требуемую оценку можно переписать в эквивалентном виде:

$$B(G) \lesssim A(G).$$

Учитывая, что функция  $u_\alpha(z) = \int_0^1 (1-t)^\alpha u(tre^{i\varphi}) dt$  является гармонической в  $D$  (см. [2, с. 596]), и применяя теорему о среднем, получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_\alpha(re^{i\varphi}) d\varphi = u_\alpha(0) = \frac{u(0)}{\alpha + 1}.$$

Поэтому, используя равенство

$$\begin{aligned} u_\alpha(re^{i\varphi}) &= \max(u_\alpha(re^{i\varphi}), 0) - \max(-u_\alpha(re^{i\varphi}), 0) = \\ &= u_\alpha^+(re^{i\varphi}) - u_\alpha^-(re^{i\varphi}), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_0^1 (1-t)^\alpha u(tre^{i\varphi}) dt \right)^- d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_0^1 (1-t)^\alpha u(tre^{i\varphi}) dt \right)^+ d\varphi - u_\alpha(0). \end{aligned}$$

Из последнего равенства и из (7) получаем

$$\int_0^1 \omega(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_0^1 (1-t)^\alpha u(tre^{i\varphi}) dt \right| d\varphi \right)^p dr \leq 2A(G) < +\infty.$$

Таким образом, функция  $u_\alpha(z)$  принадлежит классу  $h_\omega^p$ ,  $0 < p < +\infty$ . По теореме 2.8 (см. [8]) гармоническая функция  $v_\alpha(z)$ , сопряженная с  $u_\alpha$ , тоже принадлежит классу  $h_\omega^p$ . Следовательно, функция  $G_\alpha(z) = u_\alpha(z) + iv_\alpha(z)$ ,  $z \in D$ , принадлежит классу  $A_\omega^p$ , т.е.

$$(9) \quad \int_0^1 \omega(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr < +\infty.$$

Итак, установлено, что из сходимости интеграла  $A(G)$  следует сходимость (9). Теперь покажем, что из (9) следует, что интеграл  $B(G)$  сходится.

Используя представление (7), нетрудно заметить, что

$$(10) \quad G_\alpha(z) = \int_0^1 (1-t)^\alpha \ln G(tz) dt, \quad z \in D,$$

где выбрана однозначная ветвь логарифмической функции, положительная на положительной полуоси.

Пусть  $\tilde{G} = \ln G(w) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k w^k$ ,  $w \in D$ , тогда

$$G_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \int_0^1 (1-t)^\alpha t^k dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)} a_k z^k = \frac{1}{\alpha+1} D^{-(\alpha+1)} \tilde{G}(z), \quad z \in D.$$

По свойству интегро-дифференциальных операторов (см. [2, с. 594])

$$\tilde{G}(z) = (\alpha+1) D^{\alpha+1} G_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{D}} \frac{G_\alpha(t)}{(1-\bar{t}z)^{\alpha+2}} dm_2(t).$$

По теореме 2.2 [8],

$$G_\alpha(t) = \frac{\gamma + 1}{\pi} \int_{\mathbf{D}} \frac{(1 - |\zeta|^2)^\gamma G_\alpha(\zeta)}{(1 - \bar{\zeta}t)^{\gamma+2}} dm_2(\zeta),$$

где  $\gamma$  — произвольное, такое, что  $\gamma > \frac{\alpha_\omega + 1}{p} + 1$ . С учётом этого представления аналогичным образом, как в [7, с. 155], получим:

$$|\tilde{G}(z)| \lesssim \int_{\mathbf{D}} \frac{(1 - |\zeta|^2)^\gamma |G_\alpha(\zeta)|}{|1 - \bar{\zeta}z|^{\gamma+3+\alpha}} dm_2(\zeta).$$

Докажем, что

$$(11) \quad \int_0^1 \omega_1(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{G}(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr < +\infty,$$

если (9) сходится; тогда и  $B(G)$  также будет сходиться, ввиду того, что  $a^+ \leq |a| = a^+ + a^-$  при всех  $a \in \mathbb{R}$ .

Оценим интеграл

$$J(r) = \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{G}(re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Учитывая хорошо известную оценку (см., например [8, с. 37]), получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{G}(re^{i\varphi})| d\varphi &\lesssim \int_{\mathbf{D}} \frac{(1 - |\zeta|^2)^\gamma |G_\alpha(\zeta)|}{(1 - r|\zeta|)^{\gamma+\alpha+2}} dm_2(\zeta) = \\ &= \left( \int_0^1 \frac{(1 - \rho^2)^\gamma}{(1 - \rho r)^{\gamma+\alpha+2}} \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| d\varphi d\rho \right) \\ &= \int_0^r \dots + \int_r^1 \dots = I_1(r) + I_2(r). \end{aligned}$$

Предположим сначала, что  $1 < p < +\infty$ . Учитывая неравенство  $(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$ , справедливое при всех положительных значениях  $a, b, p$ , получим:

$$(12) \quad \int_0^1 \omega_1(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{G}(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr \lesssim \left( \int_0^1 \omega_1(1-r) I_1^p(r) dr + \int_0^1 \omega_1(1-r) I_2^p(r) dr \right).$$

Оценим каждый из этих интегралов по отдельности.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega_1(1-r) I_2^p(r) dr &= \int_0^1 \omega_1(1-r) \left( \int_r^1 \frac{(1 - \rho^2)^\gamma}{(1 - \rho r)^{\gamma+\alpha+2}} \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| d\varphi d\rho \right)^p dr \leq \\ &\leq \int_0^1 \omega_1(1-r) \frac{1}{(1-r)^{p(\gamma+\alpha+2)}} \left( \int_r^1 (1 - \rho^2)^\gamma \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr \lesssim \\ &\lesssim \int_0^1 \omega(1-r) (1-r)^{-p(\gamma+1)} \left( \int_r^1 (1 - \rho)^\gamma \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| d\varphi d\rho \right)^p dr \end{aligned}$$

Во внутреннем интеграле применим неравенство Гёльдера с весом  $(1 - \rho)^\gamma$ :

$$\begin{aligned} \left( \int_r^1 (1 - \rho)^\gamma \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| d\varphi d\rho \right)^p &\leq \int_r^1 (1 - \rho)^\gamma \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| d\varphi \right)^p d\rho \times \\ &\times \left( \int_r^1 (1 - \rho)^\gamma d\rho \right)^{p/q}, \end{aligned}$$

где  $q = \frac{p}{p-1}$ ; следовательно,

$$\left( \int_r^1 (1 - \rho)^\gamma \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| d\varphi d\rho \right)^p \leq (1 - r)^{(\gamma+1)(p-1)} \int_r^1 (1 - \rho)^\gamma \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| d\varphi \right)^p d\rho.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \omega_1(1 - r) I_2^p(r) dr = \\ &= \int_0^1 \omega(1 - r) (1 - r)^{-p(\gamma+1)} \left( \int_r^1 (1 - \rho)^\gamma \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| d\varphi d\rho \right)^p dr \lesssim \\ &\lesssim \int_0^1 \omega(1 - r) (1 - r)^{-(\gamma+1)} \int_r^1 (1 - \rho)^\gamma \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| d\varphi \right)^p d\rho dr. \end{aligned}$$

Поменяв порядок интегрирования в последнем интеграле, получаем:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \omega_1(1 - r) I_2^p(r) dr \lesssim \\ &\lesssim \int_0^1 \omega(1 - \rho) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| d\varphi \right)^p d\rho. \end{aligned}$$

Используя тот факт, что является интеграл  $\psi(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| d\varphi$  является монотонно растущей функцией от  $\rho$  как среднее значение субгармонической функции на окружности, приступим к оценке интеграла

$$\int_0^1 \omega_1(1 - r) I_1^p(r) dr.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \omega_1(1-r) \left( \int_0^r \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}} \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| d\varphi d\rho \right)^p dr \leq \\
& \leq \int_0^1 \omega_1(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p \cdot \left( \int_0^r \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}} d\rho \right)^p dr \lesssim \\
& \lesssim \int_0^1 \omega(1-r)(1-r)^{p(\alpha+1)} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p \left( \frac{1}{(1-r)^{\alpha+1}} \right)^p dr = \\
& = \int_0^1 \omega(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr.
\end{aligned}$$

Итак, (12) принимает вид:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \omega_1(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{G}(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr \lesssim \\
& \lesssim \int_0^1 \omega(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr.
\end{aligned}$$

Теорема доказана при  $1 < p < +\infty$ .

Перейдем к установлению аналогичной оценки при  $0 < p \leq 1$ . Снова используем разбиение внутреннего интеграла на части (12).

Оценим  $I_2(r)$ :

$$\begin{aligned}
I_2(r) &= \int_r^1 \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}} \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| d\varphi d\rho \leq \\
&\leq \frac{2^\gamma}{(1-r)^{\gamma+\alpha+2}} \int_r^1 (1-\rho)^\gamma \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| d\varphi d\rho.
\end{aligned}$$

Предположим, что  $r_n \leq r < r_{n+1}$ , где  $r_k = 1 - \frac{1}{2^k}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Тогда

$$I_2(r) \lesssim (1-r)^{-(\gamma+\alpha+2)} \cdot \sum_{k=n}^{+\infty} \int_{r_k}^{r_{k+1}} (1-\rho)^\gamma \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| d\varphi d\rho.$$

Учитывая неравенство  $(a+b)^p \leq (a^p + b^p)$ , справедливое при всех положительных значениях  $a, b$  и  $0 < p \leq 1$ , получим:

$$I_2^p(r) \leq (1-r)^{-p(\gamma+\alpha+2)} \cdot \sum_{k=n}^{+\infty} \left( \int_{r_k}^{r_{k+1}} (1-\rho)^\gamma \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| d\varphi d\rho \right)^p = (1-r)^{-p(\gamma+\alpha+2)} \cdot \sum_{k=n}^{+\infty} J_k,$$

где

$$J_k = \left( \int_{r_k}^{r_{k+1}} (1-\rho)^\gamma \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| d\varphi d\rho \right)^p, \quad n \leq k < +\infty, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Перейдем к оценке интегралов  $J_k$  при фиксированном  $k$ . Учитывая, что функция  $\psi(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} |G_{\alpha}(\rho e^{i\varphi})| d\varphi$  - монотонно растущая по  $\rho$ , получаем

$$\begin{aligned} J_k &\leq \frac{1}{(\gamma+1)^p} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_{\alpha}(r_{k+1}e^{i\varphi})| d\varphi \right)^p \left[ \frac{1}{2^{k(\gamma+1)}} - \frac{1}{2^{(k+1)(\gamma+1)}} \right]^p = \\ &= \left( \frac{2^{\gamma+1} - 1}{2^{\gamma+1}(\gamma+1)} \right)^p \cdot \frac{1}{2^{k(\gamma+1)p}} \cdot \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_{\alpha}(r_{k+1}e^{i\varphi})| d\varphi \right)^p = c_{\gamma,p}^{(1)} \cdot \frac{1}{2^{k(\gamma+1)p}} \cdot \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_{\alpha}(r_{k+1}e^{i\varphi})| d\varphi \right)^p = \\ &= \frac{c_{\gamma,p}^{(1)}}{c_{\gamma,p}^{(2)}} \left( \int_{r_{k+1}}^{r_{k+2}} (1-\rho)^{(\gamma+1)p-1} d\rho \right) \cdot \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_{\alpha}(r_{k+1}e^{i\varphi})| d\varphi \right)^p, \end{aligned}$$

где  $c_{\gamma,p}^{(2)} = \frac{2^{(\gamma+1)p-1}}{2^{2(\gamma+1)p(\gamma+1)p}}$ . Продолжим оценку, вновь учитывая, что функция  $\psi(\rho)$  - монотонно растущая:

$$J_k \leq \tilde{c}_{\gamma,p} \int_{r_{k+1}}^{r_{k+2}} (1-\rho)^{(\gamma+1)p-1} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_{\alpha}(\rho e^{i\varphi})| d\varphi \right)^p d\rho,$$

где  $\tilde{c}_{\gamma,p} = \frac{c_{\gamma,p}^{(1)}}{c_{\gamma,p}^{(2)}}$  не зависит от  $k$ .

Вернёмся к оценке  $I_2^p(r)$ :

$$I_2^p(r) \leq \frac{\tilde{c}_{\gamma,p}}{(1-r)^{p(\gamma+\alpha+2)}} \sum_{k=n_{r_{k+1}}}^{+\infty} \int_{r_{k+1}}^{r_{k+2}} (1-\rho)^{(\gamma+1)p-1} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_{\alpha}(\rho e^{i\varphi})| d\varphi \right)^p d\rho,$$

где  $\tilde{c}_{\gamma,p}$  не зависит от  $k$ .

Таким образом,

$$I_2^p(r) \lesssim \frac{1}{(1-r)^{p(\gamma+\alpha+2)}} \int_r^1 (1-\rho)^{(\gamma+1)p-1} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_{\alpha}(\rho e^{i\varphi})| d\varphi \right)^p d\rho.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \omega_1(1-r) I_2^p(r) dr \lesssim \\ &\lesssim \int_0^1 \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^{p(\gamma+1)}} \int_r^1 (1-\rho)^{(\gamma+1)p-1} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_{\alpha}(\rho e^{i\varphi})| d\varphi \right)^p d\rho dr \lesssim \\ &\lesssim \int_0^1 \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^{p(\gamma+1)}} \left[ \int_r^1 \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_{\alpha}(\rho e^{i\varphi})| d\varphi \right)^p d(1-\rho)^{(\gamma+1)p} \right] dr. \end{aligned}$$

Проинтегрировав по частям во внутреннем интеграле, получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \omega_1(1-r) I_2^p(r) dr \lesssim \\ & \lesssim \int_0^1 \omega(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr. \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы остается получить аналогичную оценку для интеграла

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \omega_1(1-r) I_1^p(r) dr = \\ & = \int_0^1 \omega_1(1-r) \left( \int_0^r \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-r\rho)^{\gamma+\alpha+2}} \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| d\varphi d\rho \right)^p dr. \end{aligned}$$

Снова используя монотонность функции  $\psi(\rho)$  на  $\Delta$ , имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \omega_1(1-r) I_1^p(r) dr \lesssim \\ & \lesssim \int_0^1 \omega(1-r) (1-r)^{(\alpha+1)p} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p \left( \int_0^r \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-r\rho)^{\gamma+\alpha+2}} d\rho \right)^p dr \lesssim \\ & \lesssim \int_0^1 \omega(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr. \end{aligned}$$

Итак, при  $0 < p \leq 1$  (12) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \omega_1(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{G}(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr \lesssim \\ & \lesssim \left( \int_0^1 \omega_1(1-r) I_1^p(r) dr + \int_0^1 \omega_1(1-r) I_2^p(r) dr \right) \lesssim \\ & \lesssim \int_0^1 \omega(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr. \end{aligned}$$

Таким образом, при всех  $0 < p < +\infty$  установлено:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \omega_1(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{G}(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr \lesssim \\ & \lesssim \int_0^1 \omega(1-r) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(re^{i\varphi})| d\varphi \right)^p dr, \end{aligned}$$

то есть из сходимости (9) следует сходимость (11), откуда и следует требуемая оценка (6).

Теорема доказана полностью.

С помощью доказанной теоремы многие результаты, установленные для классов  $S_{\omega,0}^p = S_{\omega}^p$  легко переносятся на классы  $N_{\omega,\alpha}^p$ . В частности, справедливо следующее утверждение:

**Следствие.** Пусть  $\alpha > -1$ ,  $0 < p < +\infty$ ,  $\omega \in \Omega$ . Класс  $N_{\omega,\alpha}^p$  инвариантен относительно оператора дифференцирования тогда и только тогда, когда  $\int_0^1 \omega(t)t^{(\alpha+1)p} \ln^p \frac{1}{t} dt < +\infty$ .

*Доказательство.* Отметим, что если  $\omega \in \Omega$ , то  $\omega_1(t) = \omega(t)t^{(\alpha+1)p}$  также будет принадлежать классу  $\Omega$ . По теореме 1 классы  $N_{\omega,\alpha}^p$  и  $S_{\omega,(\alpha+1)p}^p$  совпадают при всех  $0 < p < +\infty$ ,  $\alpha > -1$ , то есть класс  $N_{\omega,\alpha}^p$  эквивалентен классу

$S_{\omega_1}^p = \{f \in H(D) : \int_0^1 \omega_1(1-r)T^p(r, f)dr < +\infty\}$ . Но по теореме 1, п.1) работы [6] (см. также [8, с. 149], теорема 4.6) класс  $S_{\omega_1}^p$  инвариантен относительно оператора дифференцирования тогда и только тогда, когда  $\int_0^1 \omega_1(t) \ln^p \frac{1}{t} dt < +\infty$ , откуда и следует требуемое утверждение.

*Благодарности.* Авторы благодарят рецензента за внимательное чтение рукописи и ценные замечания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dzhrbashyan, M. M. On parametric representation of some classes of meromorphic functions in the unit disk, Doklady Academy nauk SSSR, 157:5 (1964), 1024–1027.
- [2] Dzhrbashyan, M. M. Integral transformations and representations of functions in the complex domain — M.: Nauka, GITTL, 1966. — 671 p.
- [3] Nevanlinna R. Single-valued analytical functions — M.-L.: GITTL, 1941. — 388 p.
- [4] Rodikova, E.G. Factorization representation and description of zero sets of one class of analytic functions in a disk, Siberian Electron. Math. Rep. — 2014. — P. 52-63.
- [5] Shamoyan F.A. Parametric representation and description of the root sets of weighted classes of functions holomorphic in the disk, Siberian Math. J., 40:6 (1999), 1211–1229.
- [6] Shamoyan F. A., Kursina I. S. On the invariance of some classes of holomorphic functions under integral and differential operators // J. Math. Sci. (New York), 107:4 (2001), 4097–4107.
- [7] Shamoyan F.A., Bednazh V.A. , Karbanovich O.V. On classes of functions analytic in a disk with R. Nevanlinna characteristic and  $\alpha$ -characteristic from weighted  $L^p$  spaces, Siberian Electron. Math. Reports, 12 (2015), 150–167.
- [8] Shamoyan F.A. Weighted spaces of analytic functions with mixed norm. — Bryansk: Bryansk State University, 2014. — 250 p.

EUGENIA GENNADEVNA RODIKOVA  
 BRYANSK STATE UNIVERSITY,  
 STR. BEZHITSKAYA, 14,  
 241036, BRYANSK, RUSSIA  
*Email address:* evheny@yandex.ru

KSENIYA VASILEVNA KISLAKOVA  
 BRYANSK STATE UNIVERSITY,  
 STR. BEZHITSKAYA, 14,  
 241036, BRYANSK, RUSSIA  
*Email address:* k.kislakova25@gmail.com