Рецензия **повторная** на статью Е.Г. Родиковой и К.В. Кислаковой

Сравнение весовых классов аналитических функций в круге функций с ограничениями на характеристику Неванлинны и Джрбашяна

для журнала «Сибирские электронные математические известия»

Дальнейший текст полностью содержит в себе предыдущую рецензию с дополнениями как о внесенных, так и о не сделанных авторами исправлениях в соответствии с нашими предыдущими замечаниями и комментариями.

Исследования в статье дополняют теорию Неванлинны распределения значений мероморфных и голоморфных функций и её развитий в работах М.М. Джрбашяна и Ф.А. Шамояна, а также их учеников и последователей, к коим относятся и авторы статьи. Дальнейшее обсуждение статьи сопровождается моими замечаниями, порой критическими. Ниже обозначения близки к авторским, но могут несколько отличаться. Так, $\mathbb{R}$ и — соответственно действительная прямая и комплексная плоскость. Библиографические ссылки те же, что и в статье.

Для чисел $\alpha > -1$ в обозначениях $x^+ \underset{x\in\mathbb{R}}{:=} \max\{x, 0\}$ и Γ для гамма-функции Эйлера определяется известная α-характеристика Джрбашяна

$$T_\alpha(r, f) \underset{0<r<1}{:=} \frac{r^{-\alpha-1}}{2\pi\Gamma(\alpha+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^r (r-t)^\alpha \ln\bigl|f(te^{i\varphi})\bigr| \,\mathrm{d}\,t \right)^+ \mathrm{d}\,\varphi \tag{1}$$

При этом классическая характеристика Неванлинны вычисляется и как

$$T(r, f) = \lim_{-1<\alpha\to-1} T_\alpha(r, f). \tag{2}$$

Замечание 1. Во первом абзаце введения почему-то в определении α-характеристики Джрбашяна написано $\alpha > -2$, хотя при $-1 \geqslant \alpha > -2$ положительные части внутренних интегралов в (1) равны $\pm\infty$ при каждом $r \in (0, 1)$, при котором $\bigl|f(re^{i\varphi})\bigr| \neq 1$, а характеристика $T_\alpha(r, f)$, вообще говоря, конечна при всех $r \in (0, 1)$ только для постоянных f с $|f| = 1$. Таким образом, из её конечности при $\alpha \in (-2, -1)$ следует её равенство нулю. Надеюсь, что $\alpha > -2$ — это просто описка авторов.

Дополнение 1. Исправлено!

Замечание 2. В первом же абзаце введения функция $\ln^+$ определена, но не определена положительная часть x^+ произвольного действительного числа x, что на самом деле участвует в определении α-характеристика Джрбашяна. Надо бы определить, а возражения типа «и так понятно» как-то не очень приемлемы. Встречал ряд работ, где положительная часть обозначалась, к примеру, нижним индексом x_+ и проч.

Дополнение 2. Исправлено!

Замечание 3. Вместо (2) в начале второй страницы написано равенство $T_{-1}(r.f) = T(r,f)$, которое по замечанию 2 верно только для $|f| = 1$.

Дополнение 3. Исправлено!

Для $p \in (0,+\infty)$ и измеримой функции $\omega\colon (0,1] \to (0,+\infty)$, всюду ниже удовлетворяющей ограничениям

$$0 < \liminf_{1>\lambda\to 1} \inf_{r>0} \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leqslant \limsup_{1>\lambda\to 1} \sup_{r>0} \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} < +\infty, \tag{3}$$

в классе $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ всех голоморфных функций на открытом единичном круге $\mathbb{D} := \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| < 1\bigr\}$ и ранее рассматривались классы

$$N^p_{\omega,\alpha} := \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \;\middle|\; \int_0^1 \omega(1-r) T^p_\alpha(r,f)\ \mathrm{d}\, r < +\infty \right\},$$
$$S^p_{\omega,\alpha} := \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \;\middle|\; \int_0^1 (1-r)^\alpha \omega(1-r) T^p(r,f)\ \mathrm{d}\, r < +\infty \right\}.$$

Основной результата статьи, максимально обобщающий более ранний результат первого автора с конкретными $\omega(t) = t^\alpha$, — это

Теорема 1. $N^p_{\omega,\alpha} = S^p_{\omega,(\alpha+1)p}$ *при любых* $p \in (0,+\infty)$ *и* $\alpha > -1$.

Доказательство этой теоремы во втором разделе в части при $p > 1$ особых нареканий, если исключить мелкие замечания из списка ниже, не вызывает. Но в случае $0 < p < 1$ рассуждения со страницы 9 вызывают вопросы и даже сомнения. При оценках J_k сверху получаем неравенства вида $J_k \lesssim \dots$ с точностью до множителя. Потом происходит суммирование по k с аналогичным выводом для $I_2^p(r) \lesssim \dots$. Но если не знать множитель в $J_k \lesssim \dots$, то такое суммирование с неравенством $\lesssim$ не правомочно. Считаю, что с этим авторы должны детально разобраться.

Дополнение 4. Не исправлено и даже не предпринято попыток уяснить вопрос и исправить или же объяснить возможную непонятливость рецензента! Вынужден дать более детальный анализ некорректного использования значка-отношения $\lesssim$ в данной статье. Начнём с самого дословного определения из собственно статьи авторов:

Для множества $E \subset \mathbb{C}$ функций $f,g\colon E \to \mathbb{R}$ будем писать $f(\zeta) \lesssim g(\zeta)$, $\zeta \in E$, если существует постоянная $C > 0$, для которой $f(\zeta) \le Cg(\zeta)$ для всех $\zeta \in E$.

Подчёркивания здесь и ниже в цитатах из статьи мои. Во-первых, по-видимому, здесь пропущен союз «и» перед «функций», но это не беда. Сразу же после этого записано следующее:

При любом $\alpha > -1$ справедливо неравенство:

$$\sup_{0<r<1} T_\alpha(r, f) \lesssim \int_0^1 (1-r)^\alpha T(r, f) dr$$

Смысл этого отношения здесь тривиален, поскольку слева и справа стоят какие-то конкретные числа (постоянные), а сама запись согласно определению $\lesssim$ означает для этих (постоянных!) функций лишь одно: конечность правой части влечёт за собой конечность левой части. Смысла использовать здесь этот значок $\lesssim$ особого не вижу, но ладно, хотя бы запись вполне корректная. Но по 9 стр., о которой комментарий выше, всё не просто. Ещё раз, там при $0 < p \leq 1$ доказывается, что

$$J_k \leq \cdots \lesssim \int_{r_{k+1}}^{r_k} (1-\rho)^{(\gamma+1)p-1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \Big| G_\alpha(\rho e^{i\varphi}) \Big| d\varphi \right)^p d\rho.$$

Обозначим повторный интеграл, т.е. просто число, зависящее от k, справа буквой, к примеру, A_k, т.е. $J_k \lesssim A_k$, что по определению означает существование чисел C_k, для которых $J_k \leq C_k A_k$. Потом вы суммируете по k и далее используете значок $\lesssim$ к суммам. Но без явного ограничения сверху на C_k это не корректно. Считаю, что на данном этапе доказательства необходимо всё время использовать обычные неравенства с постоянным контролем на множителями и тогда, может быть, все выкладки корректны, поскольку суммирование станет возможным. Предлагаю авторам внимательно разобраться с этим этапом доказательства.

Приведем список также менее важных замечаний.

- Опечатка в «дифференцирования» на стр. 2 перед теоремой А.

  Дополнение 5. Исправлено!

- Теоремы Б, В, Д и лемма Г на стр. 3–4 должны быть, по-видимому, курсивом.

  Дополнение 6. Исправлено!

- Строки 8–10 снизу на стр. 4 — это тривиальное $u_\alpha = u_\alpha^+ - u_\alpha^-$, если предварительно определить, конечно, положительную и отрицательную части функции во введении. Сюда же впишется $\ln^+$.

Дополнение 7. Не сокращено, но особых претензий нет и можно оставить.

- В предпоследней строке на стр. 4 используется обозначение SH^p_ω для некоторого весового класса субгармонических функций без определения, а лишь со ссылкой. Потенциальный читатель и, тем более, рецензент не обязаны штудировать все труды, имеющие отношение к Вашей статье, или же помнить обозначения из них. Необходимо определять все обозначения в статье, если только это не совсем уж общепринятое типа $\mathbb{N}$ и т.п. И то лучше определить, если место позволяет. Думаю, в СЭМИ ограничения на число страниц не такие уж и жёсткие.

  Дополнение 8. Поменяли на h^p_ω, но снова без определения класса h^p_ω.

- Из той же серии, что и предыдущее. Ссылки на источники, щадя читателя, желательно давать как можно подробнее — [номер ссылки], номера главы, параграфа, теоремоподобного утверждения или формулы. Местами соблюдено, но часто и поверхностно.

- Стр. 5, 4–5-ая строки сверху — надо «интеграла $A(G)$» и «интеграл $B(G)$».

  Дополнение 9. Не исправлено!

- После формулы (9) — ветвь логарифмической функции, положительная на положительной полуоси или как?

  Дополнение 10. Исправлено!

- Стр. 5, 9-ая строка снизу — «где $\gamma > \dots$» подразумевает «для любого $\gamma > \dots$»? Если имеется ввиду квантор всеобщности, то надо это прописывать.

  Дополнение 11. Исправлено!

- Стр. 7, 8-ая строка сверху — фразу «интеграл ... является *монотонно возрастающей* функций» следует пояснить или сослаться на что-то. То же самое встречается для ψ на стр. 9 во второй строке.

  Дополнение 12. Исправлено!

- Следствие в самом конце статьи надо привести с кратким или не очень доказательством с пояснениями в рамках статьи [6]. В СЭМИ ограничения на объём, видимо, не столь жёсткие, чтобы ограничиваться 11 страницами.

Дополнение 13. **Не** сделано!

Считаю, что статья представляет собой полезное исследование в развивающейся области теории голоморфных функций в круге и актуальна для переноса результатов с одного класса функций на другой — так, как это удачно сделано в следствии в конце. После её достаточной доработки, особенно в части доказательства теоремы 1 согласно комментарию после её формулировки выше, а также по иным замечаниям и пожеланиям из списка выше, публикация статьи Е.Г. Родиковой и К.В. Кислаковой «**Сравнение весовых классов аналитических функций в круге функций с ограничениями на характеристику Неванлинны и Джрбашяна**» после исправления отмеченных недостатков и дополнительного рецензирования в журнале «**Сибирские электронные математические известия**» целесообразна. Готов рассмотреть вариант с исправлениями и правкой авторов.

Дополнение 14. Рассмотрел вариант. Исправлено частично и во многом лишь косметически, а почему так — комментариев авторов нет! А самый главный вопрос в дополнении 4 по части доказательства теоремы 1 для $0 < p \leq 1$ остался. Попрежнему остаюсь в убеждении, что исследование полезное, а публикация статьи в СЭМИ целесообразна, но только после всех предложенных исправлений и вместе с комментариями авторов в случае, если они обоснованно считают, что какие-то из исправлений могут испортить или ухудшить работу. Готов рассмотреть повторно.

С наилучшими пожеланиями,
рецензент. 5 марта 2025 г.