СРАВНЕНИЕ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКУ НЕВАНЛИННЫ И ДЖРБАШЯНА

Е.Г. Родикова, К.В. Кислакова

Аннотация. Центральным понятием теории мероморфных функций Р. Неванлинны является понятие характеристической функции. В комплексном анализе хорошо известны классы функций ограниченного вида и классы Неванлинны-Джрбашяна, введенные в монографии Р. Неванлинны. Эти классы и их аналитические подклассы сыграли важную роль в развитии теории функций комплексного переменного. В 1964 году М. Джрбашян предпринял попытку обобщить стройную теорию Р. Неванлинны введением новой характеристической функции и классов мероморфных функций с ограниченной α-характеристикой. Оказалось, что введенные им классы шире классов Неванлинны-Джрбашяна. Развивая теорию Неванлинны, Ф.А. Шамоян в 1999 году ввел и исследовал классы мероморфных функций с характеристикой Р. Неванлинны из L^p-весовых пространств. Связь между классами Шамояна и весовыми классами Джрбашяна исследуется в этой работе.

Ключевые слова: аналитические функции, характеристика Неванлинны, α-характеристика Джрбашяна, оператор дифференцирования.
УДК: 517.53

Abstract. The central concept of R. Nevanlinna's theory of meromorphic functions is the concept of characteristic function. In complex analysis, classes of functions of bounded type and Nevanlinna-Dzhrbashyan classes, introduced in R. Nevanlinna's monograph, are well known. These classes and their analytic subclasses played an important role in the development of the theory of functions of a complex variable. In 1964, M. Djrbashian attempted to generalize R. Nevanlinna's harmonious theory by introducing a new characteristic function and classes of meromorphic functions with bounded α-characteristic. It turned out that the introduced classes are wider than the Nevanlinna-Dzhrbashyan classes. Developing Nevanlinna's theory, F.A. Shamoyan in 1999 introduced and studied classes of meromorphic functions with R. Nevanlinna characteristic from L^p-weighted spaces. The connection between Shamoyan's classes and Djrbashian's weight classes is studied in this paper.

Key words: analytic functions, Nevanlinna's characteristic, Djrbashian's α-characteristic, differential operator.
AMS Subject Classification: Primary 30H99; Secondary 30H15, 30H50.

1. Введение

Пусть $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость, D - единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ - множество всех функций, аналитических в D, $h(D)$ — множество всех функций, гармонических в D, $a^+ = \max(0,a)$, $a^- = \max(0,-a)$, $a \in \mathbb{R}$. Обозначим через $T(r,f)$ характеристику Р. Неванлинны функции $f \in H(D)$ [3], а через $T_\alpha(r,f)$ – α-характеристику М.М. Джрбашяна [1]:

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

$$T_\alpha(r,f) = \frac{r^{-(\alpha+1)}}{2\pi \cdot \Gamma(\alpha+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^r (r-t)^\alpha \ln |f(te^{i\varphi})| dt \right)^+ d\varphi, \alpha > -1,$$

где Γ — функция Эйлера.

Отметим, что α-характеристика была введена М.М. Джрбашяном в 1964 г. при обобщении им теории Р. Неванлинны, краеугольным камнем которой является понятие характеристичекой функции: $\lim\limits_{\alpha\to-1} T_\alpha(r,f) = T(r,f)$.

Для множества $E \subset \mathbb{C}$ функций $f, g : E \to \mathbb{R}$ будем писать $f(\zeta) \lesssim g(\zeta)$, $\zeta \in E$, если существует постоянная $C > 0$, для которой $f(\zeta) \le Cg(\zeta)$ для всех $\zeta \in E$.

При любом $\alpha > -1$ справедливо неравенство:

$$\sup_{0<r<1} T_\alpha(r,f) \lesssim \int\limits_0^1 (1-r)^\alpha T(r,f)dr,$$

поэтому введённый М. Джрбашяном класс аналитических функций в круге, имеющих там ограниченную α- характеристику, шире класса Неванлинны-Джрбашяна $S_\alpha = \{f \in H(D) : \int\limits_0^1 (1-r)^\alpha T(r,f)dr < +\infty\}$, введённого Р. Неванлинной в [3].

Обозначим Ω – множество всех измеримых положительных функций на $\Delta = (0,1]$, для которых существуют числа m_ω, q_ω из Δ, M_ω такие, что (см. [8, с. 7])

$$m_\omega \le \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \le M_\omega,\ r \in \Delta,\ \lambda \in [q_\omega, 1]. \tag{1}$$

Простейшими примерами таких функций могут служить $\omega(t) = t^\gamma \left(\ln ... \ln \frac{c}{t}\right)^\beta$, $t \in \Delta$, $\gamma > -1$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Обозначим через L^q_ω, $0 < q < +\infty$ весовое пространство измеримых в D функций g таких, что

$$\left(\int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})|d\theta\right)^q rdr\right)^{1/q} < +\infty,$$

$A^q_\omega = L^q_\omega \bigcap H(D)$, $h^q_\omega = L^q_\omega \bigcap h(D)$.

Пусть $\omega \in \Omega$, $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Введём в рассмотерение следующие классы функций:

$$N^p_{\omega,\alpha} = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 \omega(1-r) T^p_\alpha(r,f)dr < +\infty \right\},$$

$$S^p_{\omega,\beta} = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 (1-r)^\beta \omega(1-r) T^p(r,f)dr < +\infty \right\}.$$

Впервые классы $S^p_{\omega,0}$ были введены и исследованы Ф.А. Шамояном в 1999 г. в работе [5] как обобщение хорошо известных в научной литературе классов Неванлинны-Джрбашяна [3]. Классы $N^p_{\omega,\alpha}$ при $\omega(t) = t^\gamma$, $\gamma > -1$, были введены и исследованы в работе первого автора [4].

В работе [7] установлено, что при $\omega(t) = t^\gamma$, $\gamma > -1$, классы $N^p_{\omega,\alpha}$ и $S^p_{\omega,(\alpha+1)p}$ совпадают для всех $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$. Мы распространяем этот результат на произвольные весовые функции $\omega \in \Omega$:

Теорема 1. *Классы* $N^p_{\omega,\alpha}$ *и* $S^p_{\omega,(\alpha+1)p}$ *совпадают при всех* $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$.

Как следствие доказанной теоремы, мы найдём условия, при которых класс $N^p_{\omega,\alpha}$ инвариантен относительно оператора дифференцирования.

2. Формулировка и доказательство вспомогательных утверждений

Для доказательства основного результата нам потребуется вспомогательное утверждение, являющееся следствием теоремы 2, установленной в работе [7].

Теорема А. *При всех* $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$ *справедливо следующее вложение:* $S^p_{\omega,(\alpha+1)p} \subset N^p_{\omega,\alpha}$.

Обозначим Z_f – множество всех нулей нетривиальной функции $f \in H(D)$, $n(r) = card\{z_k : |z_k| < r\}$ — количество точек последовательности $\{z_k\}_1^\infty$ в круге $|z| < r < 1$ с учётом их кратностей.

Для любого $\beta > -1$ символом $\pi_\beta(z, z_k)$ будем обозначать бесконечное произведение М.М. Джрбашяна с нулями в точках последовательности $\{z_k\}_1^{+\infty} \subset D$, $0 < |z_k| \leq |z_{k+1}| < 1$, $k = 1, 2, ...$ (см. [1], также [8, с. 97]).

Из теоремы 4.1 и леммы 4.2 монографии [8] следует:

Теорема Б. *Если* $\{z_k\}_1^\infty = Z_f$ *для произвольной функции* $f \in S^p_{\omega,(\alpha+1)p}$, *то*

$$\int\limits_0^1 \omega(1-r)n^p(r)(1-r)^{(\alpha+2)p}dr < +\infty. \tag{2}$$

Обратно, если (2) *выполняется, то можно построить произведение Джрбашяна* $\pi_\beta(z, z_k)$, $\beta > \alpha + 1 + \frac{\alpha_\omega + 1}{p}$, *из класса* $S^p_{\omega,(\alpha+1)p}$ *с нулями в точках* $\{z_k\}_1^\infty$.

Следуя М.М. Джрбашяну (см. [1]), определим также функцию

$$n_\alpha(r) = \frac{r^{-(\alpha+1)}}{\Gamma(\alpha+2)} \int_0^r (r-t)^{\alpha+1} \cdot \frac{n(t) - n(0)}{t} dt + \frac{n(0)}{\Gamma(\alpha+2)}(\ln r - k_\alpha), \tag{3}$$

где $n(0)$ — кратность нуля в точке $z = 0$, $k_\alpha = \alpha \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)}$, $\alpha > -1$.

Аналогичным образом, как в работе Е.Г. Родиковой [4], можно установить следующее утверждение:

Теорема В. *Если* $\{z_k\}_1^\infty = Z_f$ *для произвольной функции* $f \in N^p_{\omega,\alpha}$, *то*

$$\int\limits_0^1 \omega(1-r)n^p_\alpha(r)dr < +\infty. \tag{4}$$

Обратно, если (4) *выполняется, то можно построить произведение Джрбашяна* $\pi_\beta(z, z_k)$, $\beta > \alpha + 1 + \frac{\alpha_\omega + 1}{p}$, *из класса* $N^p_{\omega,\alpha}$ *с нулями в точках* $\{z_k\}_1^\infty$.

При доказательстве теоремы В существенную роль играет следующее утверждение:

Лемма Г. *Из сходимости интеграла* (4) *следует сходимость интеграла* (2).

Доказательство.

Для краткости обозначим

$$I_N = \int\limits_0^1 \omega(1-r)n^p_\alpha(r)dr,$$

$$I_S = \int\limits_0^1 \omega(1-r)n^p(r)(1-r)^{(\alpha+2)p}dr.$$

По определению

$$I_N = \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\right)^p \int\limits_0^1 \omega(1-r) r^{-(\alpha+1)p} \left(\int\limits_0^r (r-t)^{\alpha+1} \frac{n(t)}{t} dt\right)^p dr =$$

$$= \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\right)^p \int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_0^1 (1-u)^{\alpha+1} \frac{n(ur)}{u} du\right)^p dr.$$

Оценим последний интеграл снизу.

$$I_N \geq \int\limits_{1/3}^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{1-\frac{1-r}{2r}}^1 (1-u)^{\alpha+1} n(ur) du\right)^p dr \geq$$

$$\geq \tilde{c}_\alpha \int\limits_{1/3}^1 n^p\left(\frac{3r-1}{2}\right) \omega(1-r)(1-r)^{(\alpha+2)p} dr = c_\alpha \int\limits_0^1 n^p(\rho)\omega(1-\rho)(1-\rho)^{(\alpha+2)p} d\rho = I_S.$$

Таким образом, получаем, что если $I_N < +\infty$, то и $I_S < +\infty$. Лемма доказана.

Из теоремы В следует

Теорема Д. *Всякая функция $f \in N^p_{\omega,\alpha}$ с нулями в точках последовательности $\{z_k\}$, $f(0) \neq 0$, представима в виде:*

$$f(z) = \pi_\beta(z, z_k) \cdot \exp g(z), \tag{5}$$

где $\beta > \alpha + 1 + \frac{\alpha_\omega + 1}{p}$, $\exp g(z) \in N^p_{\omega,\alpha}$ при всех $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$.

3. Доказательство основных результатов статьи

Доказательство теоремы 1. Итак, для того, чтобы установить включение $S^p_{\omega,(\alpha+1)p} \supset N^p_{\omega,\alpha}$, нам достаточно показать, что функция $G(z) = \exp g(z) = \exp(u(z) + iv(z))$ из представления (5), принадлежит классу $S^p_{\omega,(\alpha+1)p}$ при всех $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$.

Для этого нужно установить оценку

$$\int\limits_0^1 \omega(1-r)(1-r)^{p(\alpha+1)} T^p(r, G) dr \lesssim \int\limits_0^1 \omega(1-r) T^p_\alpha(r, G) dr. \tag{6}$$

Пусть $\omega_1(1-r) = \omega(1-r)(1-r)^{p(\alpha+1)}$. Обозначим

$$A(G) = \int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\int\limits_0^1 (1-t)^\alpha u(tre^{i\varphi}) dt\right)^+ d\varphi\right)^p dr < +\infty, \tag{7}$$

$$B(G) = \int\limits_0^1 \omega_1(1-r) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |G(re^{i\theta})| d\theta\right)^p dr. \tag{8}$$

Требуемую оценку можно переписать в эквивалентном виде:

$$B(G) \lesssim A(G).$$

Учитывая, что функция $u_\alpha(z)=\int\limits_0^1(1-t)^\alpha u(tre^{i\varphi})dt$ является гармонической в D (см. [2, с. 596]), и применяя теорему о среднем, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u_\alpha(re^{i\varphi})d\varphi=u_\alpha(0)=\frac{u(0)}{\alpha+1}.$$

Поэтому, используя равенство

$$u_\alpha(re^{i\varphi})=\max\big(u_\alpha(re^{i\varphi}),0\big)-\max\big(-u_\alpha(re^{i\varphi}),0\big)=$$
$$=u_\alpha^+(re^{i\varphi})-u_\alpha^-(re^{i\varphi}),$$

получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_0^1(1-t)^\alpha u(rte^{i\varphi})dt\right)^-d\varphi=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_0^1(1-t)^\alpha u(rte^{i\varphi})dt\right)^+d\varphi-u_\alpha(0).$$

Из последнего равенства и из (7) получаем

$$\int\limits_0^1\omega(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\int\limits_0^1(1-t)^\alpha u(rte^{i\varphi})dt\right|d\varphi\right)^pdr\le 2A(G)<+\infty.$$

Таким образом, функция $u_\alpha(z)$ принадлежит классу h^p_ω, $0<p<+\infty$. По теореме 2.8 (см. [8]) гармоническая функция $v_\alpha(z)$, сопряженная с u_α, тоже принадлежит классу h^p_ω. Следовательно, функция $G_\alpha(z)=u_\alpha(z)+iv_\alpha(z)$, $z\in D$, принадлежит классу A^p_ω, т.е.

$$\int\limits_0^1\omega(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(re^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^pdr<+\infty. \tag{9}$$

Итак, установлено, что из сходимости $A(G)$ следует сходимость(9). Теперь покажем, что из (9) следует, что $B(G)$ сходится.

Используя представление (7), нетрудно заметить, что

$$G_\alpha(z)=\int\limits_0^1(1-t)^\alpha\ln G(tz)dt,\ \ z\in D, \tag{10}$$

где выбрана однозначная ветвь логарифмической функции, положительная на положительной полуоси.

Пусть $\tilde G=\ln G(w)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kw^k,\ \ w\in D$, тогда

$$G_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kz^k\int\limits_0^1(1-t)^\alpha t^kdt=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\alpha+k+2)}a_kz^k=\frac{1}{\alpha+1}D^{-(\alpha+1)}\tilde G(z),\ \ z\in D.$$

По свойству интегро-дифференциальных операторов (см. [2, с. 594])

$$\tilde G(z)=(\alpha+1)D^{\alpha+1}G_\alpha(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbf{D}}\frac{G_\alpha(t)}{(1-\bar tz)^{\alpha+2}}dm_2(t).$$

По теореме 2.2 [8],

$$G_\alpha(t)=\frac{\gamma+1}{\pi}\int\limits_{\mathbf{D}}\frac{(1-|\zeta|^2)^\gamma G_\alpha(\zeta)}{(1-\bar{\zeta}t)^{\gamma+2}}dm_2(\zeta),$$

где γ — произвольное, такое, что $\gamma>\frac{\alpha_\omega+1}{p}+1$. С учётом этого представления аналогичным образом, как в [7, с. 155], получим:

$$\left|\tilde{G}(z)\right|\lesssim\int\limits_{\mathbf{D}}\frac{(1-|\zeta|^2)^\gamma|G_\alpha(\zeta)|}{|1-\bar{\zeta}z|^{\gamma+3+\alpha}}dm_2(\zeta).$$

Докажем, что

$$\int\limits_0^1\omega_1(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\tilde{G}(re^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p dr<+\infty, \tag{11}$$

если (9) сходится; тогда и $B(G)$ также будет сходиться, ввиду того, что $a^+\le|a|=a^++a^-$ при всех $a\in\mathbb{R}$.

Оценим интеграл

$$J(r)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\tilde{G}(re^{i\varphi})\right|d\varphi.$$

Учитывая хорошо известную оценку (см., например [8, с. 37]), получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\tilde{G}(re^{i\varphi})\right|d\varphi&\lesssim\int\limits_{\mathbf{D}}\frac{(1-|\zeta|^2)^\gamma\,|G_\alpha(\zeta)|}{(1-r|\zeta|)^{\gamma+\alpha+2}}dm_2(\zeta)=\\&=\left(\int\limits_0^1\frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho\right)\\&=\int\limits_0^r\ldots+\int\limits_r^1\ldots=I_1(r)+I_2(r).\end{aligned}$$

Предположим сначала, что $1<p<+\infty$. Учитывая неравенство $(a+b)^p\le2^p(a^p+b^p)$, справедливое при всех положительных значениях a,b,p, получим:

$$\int\limits_0^1\omega_1(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\tilde{G}(re^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p dr\lesssim\left(\int\limits_0^1\omega_1(1-r)I_1^p(r)dr+\int\limits_0^1\omega_1(1-r)I_2^p(r)dr\right). \tag{12}$$

Оценим каждый из этих интегралов по отдельности.

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1\omega_1(1-r)I_2^p(r)dr&=\int\limits_0^1\omega_1(1-r)\left(\int\limits_r^1\frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho\right)^p dr\le\\&\le\int\limits_0^1\omega_1(1-r)\frac{1}{(1-r)^{p(\gamma+\alpha+2)}}\left(\int\limits_r^1(1-\rho^2)^\gamma\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p dr\lesssim\\&\lesssim\int\limits_0^1\omega(1-r)(1-r)^{-p(\gamma+1)}\left(\int\limits_r^1(1-\rho)^\gamma\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho\right)^p dr\end{aligned}$$

Во внутреннем интеграле применим неравенство Гёльдера с весом $(1-\rho)^\gamma$:

$$\left(\int\limits_r^1 (1-\rho)^\gamma \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi d\rho\right)^p \le \int\limits_r^1 (1-\rho)^\gamma \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi\right)^p d\rho \times$$
$$\times \left(\int\limits_r^1 (1-\rho)^\gamma d\rho\right)^{p/q},$$

где $q=\frac{p}{p-1}$; следовательно,

$$\left(\int\limits_r^1 (1-\rho)^\gamma \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi d\rho\right)^p \le (1-r)^{(\gamma+1)(p-1)} \int\limits_r^1 (1-\rho)^\gamma \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi\right)^p d\rho.$$

Таким образом, получаем

$$\int\limits_0^1 \omega_1(1-r) I_2^p(r) dr =$$
$$= \int\limits_0^1 \omega(1-r)(1-r)^{-p(\gamma+1)} \left(\int\limits_r^1 (1-\rho)^\gamma \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi d\rho\right)^p dr \lesssim$$
$$\lesssim \int\limits_0^1 \omega(1-r)(1-r)^{-(\gamma+1)} \int\limits_r^1 (1-\rho)^\gamma \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi\right)^p d\rho dr.$$

Поменяв порядок интегрирования в последнем интеграле, получаем:

$$\int\limits_0^1 \omega_1(1-r) I_2^p(r) dr \lesssim$$
$$\lesssim \int\limits_0^1 \omega(1-\rho) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right| d\varphi\right)^p d\rho.$$

Используя тот факт, что является интеграл $\psi(\rho) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |G_\alpha(\rho e^{i\varphi})| \, d\varphi$ является монотонно растущей функцией от ρ как среднее значение субгармонической функции на окружности, приступим к оценке интеграла

$$\int\limits_0^1 \omega_1(1-r) I_1^p(r) dr.$$

Имеем:

$$\int\limits_0^1 \omega_1(1-r)\left(\int\limits_0^r \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho\right)^p dr \le$$

$$\le \int\limits_0^1 \omega_1(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(re^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p\cdot\left(\int\limits_0^r \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}}d\rho\right)^p dr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 \omega(1-r)(1-r)^{p(\alpha+1)}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(re^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p\left(\frac{1}{(1-r)^{\alpha+1}}\right)^p dr =$$

$$= \int\limits_0^1 \omega(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(re^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p dr.$$

Итак, (12) принимает вид:

$$\int\limits_0^1 \omega_1(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\tilde{G}(re^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p dr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 \omega(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(re^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p dr.$$

Теорема доказана при $1 < p < +\infty$.

Перейдем к установлению аналогичной оценки при $0 < p \le 1$. Снова используем разбиение внутреннего интеграла на части (12).

Оценим $I_2(r)$:

$$I_2(r) = \int\limits_r^1 \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-\rho r)^{\gamma+\alpha+2}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho \le$$

$$\le \frac{2^\gamma}{(1-r)^{\gamma+\alpha+2}}\int\limits_r^1 (1-\rho)^\gamma\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho.$$

Предположим, что $r_n \le r < r_{n+1}$, где $r_k = 1 - \frac{1}{2^k}$, $k = 0, 1, \ldots$. Тогда

$$I_2(r) \lesssim (1-r)^{-(\gamma+\alpha+2)}\cdot\sum_{k=n}^{+\infty}\int\limits_{r_k}^{r_{k+1}}(1-\rho)^\gamma\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho.$$

Учитывая неравенство $(a+b)^p \le (a^p + b^p)$, справедливое при всех положительных значениях a, b и $0 < p \le 1$, получим:

$$I_2^p(r) \le (1-r)^{-p(\gamma+\alpha+2)}\cdot\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\int\limits_{r_k}^{r_{k+1}}(1-\rho)^\gamma\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho\right)^p = (1-r)^{-p(\gamma+\alpha+2)}\cdot\sum_{k=n}^{+\infty}J_k^p,$$

где

$$J_k = \left(\int\limits_{r_k}^{r_{k+1}}(1-\rho)^\gamma\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho\right)^p,\ \ n \le k < +\infty,\ \ k \in \mathbb{N}.$$

Перейдем к оценке интегралов J_k при фиксированном k. Снова учитывая, что функция $\psi(\rho)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi$ - монотонно растущая по ρ, получаем

$$J_k \leq \frac{1}{(\gamma+1)^p}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(r_{k+1}e^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p\left[\frac{1}{2^{k(\gamma+1)}}-\frac{1}{2^{(k+1)(\gamma+1)}}\right]^p \lesssim$$

$$\lesssim \frac{1}{2^{k(\gamma+1)p}}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(r_{k+1}e^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_{r_{k+1}}^{r_{k+2}}(1-\rho)^{(\gamma+1)p-1}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p d\rho.$$

Таким образом,

$$I_2^p(r) \lesssim \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{(1-r)^{p(\gamma+\alpha+2)}}\int\limits_{r_{k+1}}^{r_{k+2}}(1-\rho)^{(\gamma+1)p-1}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p d\rho \lesssim$$

$$\lesssim \frac{1}{(1-r)^{p(\gamma+\alpha+2)}}\int\limits_{r}^{1}(1-\rho)^{(\gamma+1)p-1}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p d\rho.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^1 \omega_1(1-r)I_2^p(r)dr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^{p(\gamma+1)}}\int\limits_r^1(1-\rho)^{(\gamma+1)p-1}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p d\rho dr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^{p(\gamma+1)}}\left[\int\limits_r^1\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p d(1-\rho)^{(\gamma+1)p}\right]dr.$$

Проинтегрировав по частям во внутреннем интеграле, получим:

$$\int\limits_0^1 \omega_1(1-r)I_2^p(r)dr \lesssim$$

$$\lesssim \int\limits_0^1 \omega(1-r)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi\right)^p dr.$$

Для доказательства теоремы остается получить аналогичную оценку для интеграла

$$\int\limits_0^1 \omega_1(1-r)I_1^p(r)dr =$$

$$= \int\limits_0^1 \omega_1(1-r)\left(\int\limits_0^r \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-r\rho)^{\gamma+\alpha+2}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|G_\alpha(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi d\rho\right)^p dr.$$

Снова используя монотонность функции $\psi(\rho)$ на Δ, имеем

$$\int_0^1 \omega_1(1-r) I_1^p(r) dr \lesssim$$

$$\lesssim \int_0^1 \omega(1-r)(1-r)^{(\alpha+1)p} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| G_\alpha(re^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p \left(\int_0^r \frac{(1-\rho^2)^\gamma}{(1-r\rho)^{\gamma+\alpha+2}} d\rho \right)^p dr \lesssim$$

$$\lesssim \int_0^1 \omega(1-r) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| G_\alpha(re^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p dr.$$

Итак, при $0 < p < 1$ (12) принимает вид:

$$\int_0^1 \omega_1(1-r) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \tilde{G}(re^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p dr \lesssim$$

$$\lesssim \left(\int_0^1 \omega_1(1-r) I_1^p(r) dr + \int_0^1 \omega_1(1-r) I_2^p(r) dr \right) \lesssim$$

$$\lesssim \int_0^1 \omega(1-r) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| G_\alpha(re^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p dr.$$

Таким образом, при всех $0 < p < +\infty$ установлено:

$$\int_0^1 \omega_1(1-r) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \tilde{G}(re^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p dr \lesssim$$

$$\lesssim \int_0^1 \omega(1-r) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| G_\alpha(re^{i\varphi}) \right| d\varphi \right)^p dr,$$

то есть из сходимости (9) следует сходимость (11), откуда и следует требуемая оценка (6).

Теорема доказана полностью.

С помощью доказанной теоремы многие результаты, установленные для классов $S^p_{\omega,0}$ легко переносятся на классы $N^p_{\omega,\alpha}$. В частности, справедливо следующее утверждение:

Следствие. *Пусть $\alpha > -1$, $0 < p < +\infty$, $\omega \in \Omega$. Класс $N^p_{\omega,\alpha}$ инвариантен относительно оператора дифференцирования тогда и только тогда, когда $\int_0^1 \omega(t) t^{(\alpha+1)p} \ln^p \frac{1}{t} dt < +\infty$.*

Справедливость этого утверждения следует из теоремы 1 и результатов работы [6] (см. также [8, с. 149], теорема 4.6).

Список литературы

[1] Dzhrbashyan, M. M. On parametric representation of some classes of meromorphic functions in rhe unit disk, Doklady Academy nauk SSSR, 157:5 (1964), 1024–1027.

[2] Dzhrbashyan, M. M. Integral transformations and representations of functions in the complex domain — M.: Nauka, GITTL, 1966. — 671 p.

[3] Nevanlinna R. Single-valued analytical functions — M.-L.: GITTL, 1941. — 388 p.

[4] Rodikova, E.G. Factorization representation and description of zerosets of one class of analytic functions in a disk, Siberian Electron. Math. Rep. — 2014. — P. 52-63.

[5] Shamoyan F.A. Parametric representation and description of the root sets of weighted classes of functions holomorphic in the disk, Siberian Math. J., 40:6 (1999), 1211–1229.

[6] Shamoyan F. A., Kursina I. S. On the invariance of some classes of holomorphic functions under integral and differential operators // J. Math. Sci. (New York), 107:4 (2001), 4097–4107.

[7] Shamoyan F.A., Bednazh V.A. , Karbanovich O.V. On classes of functions analytic in a disk with R. Nevanlinna characteristic and α-characteristic from weighted L^p spaces, Siberian Electron. Math. Reports, 12 (2015), 150–167.

[8] Shamoyan F.A. Weighted spaces of analytic functions with mixed norm. — Bryansk: Bryansk State University, 2014. — 250 p.

Eugenia Gennadevna Rodikova
Bryansk State University,
str. Bezhitskaya, 14,
241036, Bryansk, Russia
Email address: evheny@yandex.ru

Kseniya Vasilevna Kislakova
Bryansk State University,
str. Bezhitskaya, 14,
241036, Bryansk, Russia
Email address: k.kislakova25@gmail.com