УДК 511

Стаценко Игорь Викторович

Кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики

Московский энергетический институт

Иерархия взаимосвязей в системе обобщенных специальных чисел

Аннотация

В статье представлены результаты современных исследований системы взаимосвязей обобщенных специальных чисел, объединенных и классифицируемых по функциональному признаку.

Abstract

The paper presents the results of modern research of the system of interrelations of generalized special numbers. united and classified on the functional basis.

Ключевые слова: специальные числа, числа Стирлинга первого и второго рода, числа Бернулли, биномиальные коэффициенты, мультигармонические числа, обобщенные биномиальные коэффициенты, обобщенные числа Стирлинга первого рода, массивы Риордана, экспоненциальные интегралы высшего порядка, логарифмические числа, полиномы Шарле, полиномы Пуасссона-Шарле.

Keywords: Special numbers, Stirling numbers of the first and second kind, Bernoulli numbers, binomial coefficients, multiharmonic numbers, generalized Stirling numbers of the first kind, Riordan arrays, higher order exponential integrals, logarithmic numbers, Charlet polynomials, Poisson-Charlet polynomials.

Введение

В качестве объекта исследований в данной статье рассматриваются три основные категории специальных чисел – это биномиальные коэффициенты, числа Стирлинга и числа Бернулли, а также некоторые новые категории специальных чисел, обеспечивающих взаимосвязи в системе названных основных категорий. Данные категории относятся к обобщенным специальным числам. При этом в качестве критерия обобщения выступает принадлежность данной категории чисел к числам Стирлинга или биномиальным коэффициентам в так называемом “нулевом” сечении и функциональное назначение, которое отличает данную категорию обобщенных специальных чисел от других категорий обобщенных чисел.

Различные формы обобщений биномиальных коэффициентов и чисел Стирлинга первого и второго рода получили развитую теоретическую базу и широкое практическое приложение. Среди отечественных и зарубежных публикаций по данным вопросам прежде всего можно отметить [1-10]. Отличие форм обобщений друг от друга проще всего распознается по замкнутой форме либо рекурсии, которые обязательно содержат в качестве отдельной переменной параметр обобщения. Это может быть параметрическая последовательность вида $a(m,n)$ или параметрический массив $T(m,n,k)$, где $m,n,k \in Z$, m - параметр обобщения. С использованием OEIS отдельные группы обобщенных чисел распознаются также по уникальным номерам последовательностей или треугольных последовательностей $T(m,n,k)$, $n \geq 0$, $0 \leq k \leq n$, которые содержат формулы последовательностей, ссылки на литературу и ссылки на соседние по параметру обобщения последовательности в данной группе. Кроме того, под каждым номером последовательности представлены начальные значения данной последовательности (достаточное количество для распознавания), что является дополнительным средством идентификации. К примеру, со ссылкой на источник [3] можно выделить две группы обобщенных треугольных последовательностей: A007318, A027907, A008287,… и A007318, A001263, A056939, …, представляющих разновидности треугольников Паскаля. Причем каждая группа последовательностей начинается с треугольника A007318 (треугольник Паскаля). Отдельно можно выделить группу массивов Риордана [6,10] с номерами треугольников: A007318, A097805, A159854, также представляющих собой обобщенные биномиальные числа [12]. Со ссылкой на источник [9] в OEIS можно найти следующую группу обобщенных чисел Стирлинга первого рода: A048994, A023531, A049403,… Данная группа треугольных последовательностей начинается с треугольника A048994 (числа Стирлинга первого рода со знаком).

В данной статье рассматриваются новые обобщения специальных чисел, сгруппированных по функциональному признаку формирования последовательности чисел Бернулли.

Следуя идеологии публикации последовательностей OEIS, будем представлять результаты исследований с использованием специальным образом организованной математической конструкции – треугольника последовательности целых чисел (в некоторых случаях, прямоугольной матрицы последовательности целых чисел). Под треугольником последовательности в OEIS понимается треугольная матрица целых чисел $T(n,k)$, удовлетворяющая условиям: $a \leq n \leq Z$; $a \leq k \leq n$; $a \in Z$. Так, например, треугольная последовательность биномиальных коэффициентов (треугольник Паскаля) зарегистрирована в OEIS под номером A007318; числа Стирлинга первого рода со знаком – A048994; числа Стирлинга первого рода без знака – A132393; числа Стирлинга первого рода со знаком (без нуль-столбца) – A008275; числа Стирлинга первого рода без знака (без нуль-столбца) – A130534; числа Стирлинга второго рода – A048993; числа Бернулли – A027641/A027642.

На практике часто встречаются случаи, когда некоторый треугольник $T(n,k)$ является фиксированным сечением семейства треугольных последовательностей $T(m,n,k)$, зависящих от значения некоторого параметра m (в общем случае параметр m может быть действительным числом). Такие ситуации регистрируются в OEIS для каждого значения параметра отдельно с обязательными перекрестными ссылками на зарегистрированные сечения данного семейства последовательностей с другими значениями параметра. Объединение данных случаев по функциональному назначению и принадлежности в “нулевом” сечении (параметр $m=0$) к специальным числам формирует отдельную категорию обобщенных специальных чисел.

Далее будем проводить описание новых обобщений специальных чисел в рамках структурной схемы см. рис. 1, отражающей иерархию взаимосвязей в системе базовых чисел: мультигармонических чисел [13, 14], чисел Стирлинга, биномиальных чисел и чисел Бернулли.

Новые категории специальных чисел, открытые в результате анализа взаимосвязей между базовыми числами, названы предварительно следующим образом:

-“P” – обобщенные числа Стирлинга 1 рода;

-“S” – обобщенные числа Стирлинга 1 рода;

- “L” – обобщенные числа Стирлинга 1 рода;

-“E” – обобщенные числа Стирлинга 1 рода;

-“S” – обобщенные биномиальные коэффициенты;

-“R” – обобщенные биномиальные коэффициенты.

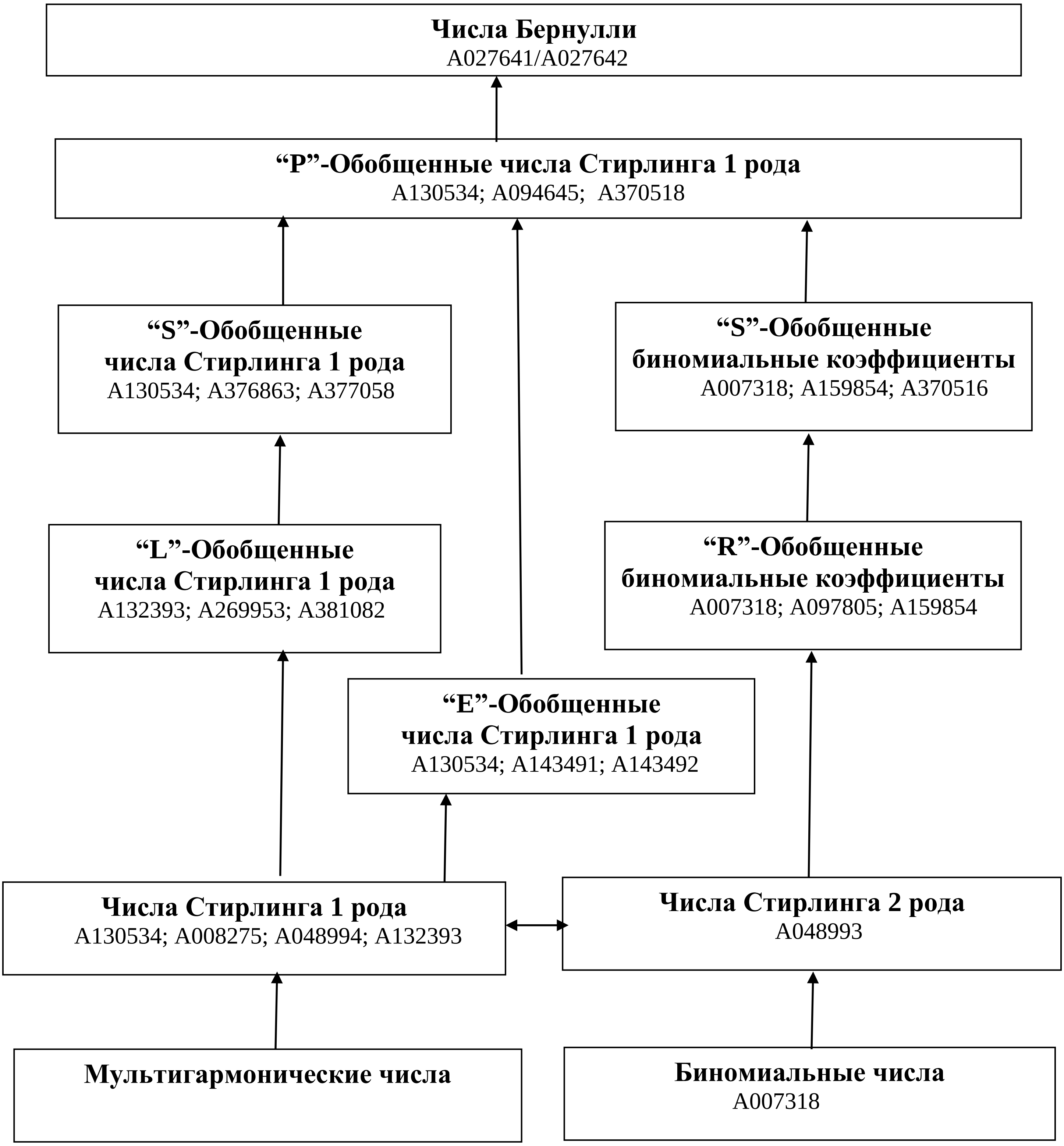

Рис. 1. Структурная схема взаимосвязей в системе специальных чисел

1. “P” – обобщенные числа Стирлинга 1 рода и “S” – обобщенные биномиальные коэффициенты

Рассмотрим следующую производящую функцию для чисел Бернулли

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{x^m}{m!} = \frac{x}{e^x - 1}, \tag{1}$$

где B_m - числа Бернулли.

Преобразуем (1) следующим образом.

$$\frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}} = \frac{1}{1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}} = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}\right)^m. \tag{2}$$

Введем обозначение $F(m,x) = (-1)^m\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}\right)^m$. Тогда имеем

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{m=0}^{\infty} F(m,x). \tag{3}$$

Представим треугольную матрицу $A(m,k)$, $m \ge 0$, $0 \le k \le m$ коэффициентов, полученных при $x^m m!$ в первых m слагаемых формулы (3) для $m = 0,1,\dots,7$ (см. таблицу 1).

Таблица 1

$m \setminus k$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	1							
1	0	-1/2						
2	0	-1/3	1/2					
3	0	-1/4	1	-3/4				
4	0	-1/5	5/3	-3	3/2			
5	0	-1/6	8/3	-35/4	10	-15/4		
6	0	-1/7	17/4	-137/6	45	-75/2	45/4	
7	0	-1/8	41/6	-455/8	518/3	-1925/8	315/2	-315/8

Представим основное свойство матрицы $A(m,k)$

$$\sum_{k=0}^{m} A(m,k) = B_m, \quad m \ge 0 \ . \tag{4}$$

Треугольник $A(m,k)$ не является целочисленным. Проведем с $A(m,k)$ следующее преобразование

$$P(m,k) = A(m,k) C_{m+k}^{k} \left(-1\right)^{k}, \tag{5}$$

где $C_{m+k}^{k} = \dfrac{\left(m+k\right)!}{k!m!}$ - диагональные элементы треугольника Паскаля.

Треугольник $P(m,k)$ $m \ge 0$, $0 \le k \le m$ является неотрицательным и целочисленным. В таблице 2 представлены значения данного треугольника для $m = 0,1,...,7$.

Таблица 2

$m \setminus k$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	1							
1	0	1						
2	0	1	3					
3	0	1	10	15				
4	0	1	25	105	105			
5	0	1	56	490	1260	945		
6	0	1	119	1918	9450	17325	10395	
7	0	1	246	6825	56980	190575	270270	135135

В OEIS данный целочисленный треугольник известен как A269939. Питер Лушни получил для треугольника A269939 следующую замкнутую форму

$$P(m,k) = \sum_{i=0}^{k} \left(-1\right)^{k+i} C_{m+k}^{m+i} W_{m+i,i}, \tag{6}$$

где $W_{m+i,i}$ - диагональные элементы треугольника A048993 - чисел Стирлинга второго рода.

Таким образом, учитывая (4-6), можно представить следующую замкнутую форму для чисел Бернулли

$$B_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k P(m,k)}{C_{m+k}^{k}}, \quad m \ge 0. \tag{7}$$

Треугольник $P(m,k)$ A269939 является более широкой версией треугольника $TC\left(n,k\right)$ A134991, который в отличие от A269939 не содержит нуль-столбец. Треугольники A269939, A134991 рассматриваются как треугольники связи с числами Бернулли. При этом A134991 может использоваться для получения чисел Бернулли, начиная с B_1. Из описания треугольника $TC(n,k)$ A134991, с учетом комментариев Питера Лушни, известно, что его замкнутая форма имеет вид

$$TC(n,k)=\sum_{r=1}^{k}(-1)^{k+r}C_{n+k}^{n+r}W_{n+r,r},\quad n\ge 1,\ \ 1\le k\le n. \tag{8}$$

Фактически используется замкнутая форма (6) с началом последовательности в точке $n=1,\ k=1$.

Покажем далее, что $TC(n,k)$ можно декомпозировать в следующем виде [12]

$$TC(n,k)=\sum_{r=0}^{k-1}\frac{n^r(-1)^{k+1}}{(k-1)!}S_p(n,k-1,r),\quad n\ge 1,\quad 1\le k\le n, \tag{9}$$

где

$$S_p(m,n,k)=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!}S_{r,k}C_s(m,n,r), \tag{10}$$

$$C_s(m,n,k)=\sum_{r=0}^{n-k}C_{n+1}^{n-k-r}W_{r+m+1,r+1}(-1)^r, \tag{11}$$

$S_p(m,n,k)$ - “P”-обобщенные числа Стирлинга первого рода m-го порядка (A130534, A094645, A370518, соответственно, для m=0,1,2); $S_{n,k}$ - числа Стирлинга первого рода со знаком (A048994); $C_s(m,n,k)$ - “S”-обобщенные биномиальные коэффициенты m-го порядка (A007318, A159854, A370516, соответственно, для m=0,1,2); $W_{n+k,k}$ - диагональные числа Стирлинга второго рода.

Доказательство справедливости (9-11).

Подстановка (10,11) в (9) дает следующую формулу

$$TC(n,k)=\sum_{r=0}^{k-1}n^r\sum_{p=0}^{k-1}\frac{S_{p,r}}{p!}\sum_{m=0}^{k-p-1}C_k^{k-p-m-1}W_{n+m+1,m+1}(-1)^{m+k+1}, \tag{12}$$

$n\ge 1,\ \ 1\le k\le n.$

Замена переменной в третьем индексе суммирования дает следующую формулу

$$TC(n,k)=\sum_{r=0}^{k-1}n^r\sum_{p=0}^{k-1}\frac{S_{p,r}}{p!}\sum_{m=0}^{k-p}C_k^{k-p-m}W_{n+m,m}(-1)^{m+k}, \tag{13}$$

$n\ge 1,\ \ 1\le k\le n.$

Докажем справедливость замкнутой формы (13), опираясь на известную замкнутую форму треугольника $TC(n,k)$ (8).

Проведем в (8) следующую замену переменной

$$TC(n,k)=\sum_{r=0}^{k-1}\left(-1\right)^{k+r+1}C_{n+k}^{n+r+1}W_{n+r+1,r+1},\quad n\ge 1,\ \ 1\le k\le n. \tag{14}$$

Далее имеем

$$TC(n,k)=\sum_{r=0}^{k-1}\left(-1\right)^{k+r+1}W_{n+r+1,r+1}\sum_{p=0}^{k-1}n^{p}\sum_{m=0}^{k-r-1}\frac{S_{m,p}C_{k}^{k-m-r-1}}{m!}, \tag{15}$$

где $S_{m,p}$ - числа Стирлинга первого рода со знаком, $n\ge 1,\ 1\le k\le n$.

Докажем отдельно, что в формулах (14,15) имеет место тождественный переход

$$C_{n+k}^{n+r+1}\equiv\sum_{p=0}^{k-1}n^{p}\sum_{m=0}^{k-r-1}\frac{S_{m,p}C_{k}^{k-m-r-1}}{m!}. \tag{16}$$

Используя обращение операндов под знаками сумм, получим

$$\sum_{p=0}^{k-1}n^{p}\sum_{m=0}^{k-r-1}\frac{S_{m,p}C_{k}^{k-m-r-1}}{m!}\equiv\sum_{p=0}^{k-r-1}C_{k}^{k-p-r-1}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{S_{p,m}n^{m}}{p!}, \tag{17}$$

$$\sum_{p=0}^{k-r-1}C_{k}^{k-p-r-1}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{S_{p,m}n^{m}}{p!}=\sum_{p=0}^{k-r-1}C_{k}^{k-p-r-1}C_{n}^{p}\equiv C_{n+k}^{n+r+1}. \tag{18}$$

Тождество (16) доказано.

Продолжим далее с формулы (15). Проведем обращение операндов под знаками сумм в виде

$$TC(n,k)=\sum_{r=0}^{k-1}n^{r}\sum_{p=0}^{k-1}\frac{S_{p,r}}{p!}\sum_{m=0}^{k-p}C_{k}^{k-p-m}W_{m+n,m}(-1)^{m+k}. \tag{19}$$

В результате имеем формулу (13). Что и требовалось доказать.

В статье применительно к величинам $S_{p}\left(m,n,k\right)$, $C_{s}\left(m,n,k\right)$ применены новые названия: “P”-обобщенные числа Стирлинга первого рода m-го порядка и “S”-обобщенные биномиальные коэффициенты m-го порядка. Что связано со справедливой критикой редакции OEIS предыдущих названий – обобщенные числа Стирлинга первого рода и обобщенные биномиальные коэффициенты, так как данные названия многократно встречаются в более ранних записях OEIS применительно к другим формулам и, соответственно, к другим последовательностям. Новая приставка “P” в названии чисел $S_{p}\left(m,n,k\right)$ определена по их функциональному признаку – формировать треугольник чисел A134991 в описании (по формуле) Питера Лушни. Новая приставка “S” в названии чисел $C_{s}\left(m,n,k\right)$ определена по их функциональному признаку – формировать “P”-обобщенные числа Стирлинга.

Далее рассмотрим выражение чисел $C_s\left(m,n,k\right)$ через другие известные обобщения биномиальных коэффициентов – обобщенные треугольные массивы Риордана.

2. “R”-обобщенные биномиальные числа

Рассмотрим замкнутую форму для $C_s\left(m,n,k\right)$

$$C_s\left(m,n,k\right)=\sum_{r=0}^{n-k}C_{n+1}^{n-k-r}W_{r+m+1,r+1}(-1)^r, \tag{20}$$

где $m,n,k\in Z$, $m,n\geq 0$, $0\leq k\leq n$, $W_{n+k,k}$ - диагональные числа Стирлинга 2 –го рода.

Выразим диагональные числа Стирлинга второго рода $W_{n+k,k}$ через диагональные числа Стирлинга первого рода $S_{n+k,k}$ со знаком, используя известное соотношение между ними [11]. В результате получим

$$C_s\left(m,n,k\right)=\sum_{r=0}^{n-k}C_{n+1}^{n-k-r}(-1)^r\sum_{i=0}^{m}C_{m+r+i}^{m+i}C_{2m+r+1}^{m-i}S_{m+i,i}\left(-1\right)^i. \tag{21}$$

Проведя обращение операндов под знаками сумм, получим

$$C_s\left(m,n,k\right)=\sum_{r=0}^{m}S_{m+r,r}(-1)^r\sum_{i=0}^{n-k}C_{m+r+i}^{m+r}C_{2m+i+1}^{m-r}C_{n+1}^{n-k-i}\left(-1\right)^i. \tag{22}$$

Введем обозначение

$$F\left(m,r,n,k\right)=\sum_{i=0}^{n-k}C_{m+r+i}^{m+r}C_{2m+i+1}^{m-r}C_{n+1}^{n-k-i}\left(-1\right)^i, \tag{23}$$

где $m,r,n,k\in Z$, $m,r,n\geq 0$, $0\leq r\leq m$, $0\leq k\leq n$.

На базе (23) рассмотрим следующие треугольные матрицы: $C_r(0,n,k)$, $C_r(2,n,k)$, $C_r(4,n,k)$.

$$C_r(0,n,k)=F\left(0,0,n,k\right)=\sum_{i=0}^{n-k}C_{i+0}^{0}C_{n+1}^{n-k-i}\left(-1\right)^i=C_n^k\ . \tag{24}$$

Треугольник $C_r(0,n,k)=C_n^k$ - треугольник Паскаля (A007318).

$$C_r(2,n,k)=F\left(1,1,n,k\right)=\sum_{i=0}^{n-k}C_{i+2}^{2}C_{n+1}^{n-k-i}\left(-1\right)^i\ . \tag{25}$$

Треугольник $C_r(2,n,k)$ представляет собой массив Риордана - известную треугольную последовательность A159854.

$$C_r(4,n,k)=F\left(2,2,n,k\right)=\sum_{i=0}^{n-k}C_{i+4}^{4}C_{n+1}^{n-k-i}\left(-1\right)^i\ . \tag{26}$$

Далее, не используя базовую формулу (23), рассмотрим следующие инварианты формул (24-26) - треугольные матрицы: $C_r(1,n,k)$, $C_r(3,n,k)$.

$$C_r(1,n,k)=\sum_{i=0}^{n-k}C_{i+1}^{1}C_{n+1}^{n-k-i}\left(-1\right)^i . \tag{27}$$

Треугольник $C_r(1,n,k)$ представляет собой известную последовательность A097805 - массив Риордана.

$$C_r(3,n,k)=\sum_{i=0}^{n-k}C_{i+3}^{3}C_{n+1}^{n-k-i}\left(-1\right)^i . \tag{28}$$

Треугольник $C_r(3,n,k)(-1)^{n+k}$ представляет собой известную последовательность A122433 – массив Риордана**.**

Таким образом, формулы вида

$$C_r(m,n,k)=\sum_{i=0}^{n-k}C_{i+m}^{m}C_{n+1}^{n-k-i}\left(-1\right)^i , \tag{32}$$

где $m,n,k\in Z^{+}$, $0\le k\le n$, моделируют треугольные массивы обобщенных риордановых биномиальных коэффициентов.

Как было установлено в [17] формула (32) моделирует массивы Риордана вида $\left(\left(1-x\right)^{m-1},\dfrac{x}{1-x}\right), m\in Z^{+}$. А при использовании расширенного описания биномиальных коэффициентов в виде

$$C_n^k=\lim_{t\to+0}\frac{\Gamma(n+1+t)}{\Gamma(k+1+t)\Gamma(n-k+1+t)}, \tag{33}$$

где $\Gamma(z)$- гамма-функция Эйлера, формула

$$C_r(m,r,n,k)=r^{2n}\sum_{i=0}^{n-k}C_{i+m}^{m}C_{n+1}^{n-k-i}\left(-1\right)^i , \tag{34}$$

где $n,k\in Z$, $0\le k\le n$, $m=\dfrac{s}{r}$; $s\in Z$; $r\in N$, формула (34) моделирует массивы Риордана вида $r^{2n}\left(\left(1-x\right)^{m-1},\dfrac{x}{1-x}\right),\ m\in Q$.

Учитывая связь массивов Риордана, представленных формулами (32,34) для четных номеров m, и “S”- обобщенными биномиальными коэффициентами (20), полагаем, что формула (23) дает выражение для квазириордановых массивов, являющихся, в данном случае, биномиальными коэффициентами нижнего уровня иерархии по отношению к (20) см. структурную схему рис.1.

3. “S”-обобщенные числа Стирлинга 1 рода

Рассмотрим (10) с подстановкой (11) в виде

$$S_p\left(m,n,k\right)=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!}S_{r,k}\sum_{p=0}^{n-r}C_{n+1}^{n-r-p}W_{p+m+1,p+1}(-1)^p . \tag{35}$$

Далее проведем тождественное обращение операндов под знаками суммы в виде

$$S_p\left(m,n,k\right)=\sum_{r=0}^{n}C_{n+1}^{r}\sum_{p=0}^{n-r}C_n^p\left(n-p\right)!S_{p,k}W_{n-r-p+m+1,n-r-p+1}(-1)^{n-r-p}. \quad (36)$$

Подставим в (36) известную замкнутую форму [11] для вычисления чисел Стирлинга второго рода

$$S_p\left(m,n,k\right)=\sum_{r=0}^{n}\frac{C_{n+1}^{r}}{n+1}\sum_{p=0}^{n-r}\frac{C_{n+1}^{r+p}\left(r+p\right)!S_{p,k}}{p!}\sum_{i=0}^{n-r-p+1}(-1)^{i+1}C_{n-r-p+1}^{i}i^{n-r-p+m+1}. \quad (37)$$

Проводим следующие последовательные тождественные обращения операндов под знаками сумм:

$$S_p\left(m,n,k\right)=\sum_{r=0}^{n}\frac{C_{n+1}^{r}}{n+1}\sum_{p=1}^{n-r+1}p^m\sum_{i=p}^{n-r+1}(-1)^{p+1}\frac{S_{n-r-i+1,k}C_i^pC_{n+1}^{n+1-i}\left(n+1-i\right)!p^i}{\left(n-r-i+1\right)!}. \quad (38)$$

$$S_p\left(m,n,k\right)=\sum_{r=0}^{n}(r+1)^{m+r}(-1)^rC_n^rS_s\left(r+1,n-r,k\right), \quad (39)$$

где

$$S_s\left(m,n,k\right)=\sum_{p=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-p}S_{n-p-i,k}C_{n+m}^{p}C_n^{i+p}\left(i+p\right)!\frac{m^i}{i!}. \quad (40)$$

Формулу (40) можно также преобразовать в следующем более компактном виде

$$S_s\left(m,n,k\right)=\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=p}^{n}S_{n-j,k}C_{n+m}^{p}C_n^jC_j^p\,p!m^{j-p}. \quad (41)$$

Анализ [16] числовых треугольников $S_s\left(m,n,k\right)$, $m,n,k\in Z$, $m,n\geq 0$, $0\leq k\leq n$, показал, следующее. При значении параметра $m=0$ имеем $S_s\left(0,n,k\right)$ треугольник беззнаковых чисел Стирлинга первого рода (без нуль-столбца), т.е. последовательность A130534. При значениях параметра $m=1$ и $m=2$ получим треугольные последовательности с номерами, соответственно, A376863 и A377058. Для примера в таблице 3 представлен треугольник A376863 для $n=0...6$.

Таблица 3

$n\setminus k$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	1						
1	3	1					
2	13	7	1				
3	73	50	12	1			
4	501	400	125	18	1		
5	4051	3609	1335	255	25	1	
6	37633	36463	15214	3485	460	33	1

В первом столбце данного треугольника представлена известная последовательность A000262. Последовательность сумм по строкам данного треугольника известна как A052852.

Проведенный анализ сечений треугольника $S_s\left(m,n,k\right)$ (41) при разных значениях параметра m позволяет сделать вывод о том, что в данном случае имеет место некоторое обобщение чисел Стирлинга нижнего уровня иерархии по отношению к $S_p\left(m,n,k\right)$ (10).

4. “E”-обобщенные числа Стирлинга 1 рода

Рассмотрим формулу (35)

$$S_p\left(m,n,k\right)=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!}S_{r,k}\sum_{p=0}^{n-r}C_{n+1}^{n-r-p}W_{p+m+1,p+1}(-1)^p. \qquad (42)$$

Далее проведем обращение операндов под знаками сумм следующим образом

$$S_p\left(m,n,k\right)=\sum_{r=0}^{n}W_{r+m+1,r+1}(-1)^r\sum_{p=0}^{n-r}S_{p,k}C_{n+1}^{n-r-p}\frac{n!}{p!}. \qquad (43)$$

Рассмотрим отдельно параметрическое семейство треугольников

$$F\left(k,n,r\right)=\sum_{p=0}^{n-r}S_{p,k}C_{n+1}^{n-r-p}\frac{n!}{p!},\quad k,n\ge 0,\quad 0\le r\le n. \qquad (44)$$

На базе (44) получим приведенное (нормированное) семейство следующего вида

$$\hat{F}\left(k,n,r\right)=\frac{F\left(k,n,r\right)}{C_n^r\left(n-r\right)!}=\sum_{p=0}^{n-r}S_{p,k}C_{n+1}^{n-r-p}\frac{\left(n-r\right)!}{p!},\quad k,n\ge 0,\ 0\le r\le n. \qquad (45)$$

Далее для исключения столбцов с нулями при $m\ge 1$ проводим линейное преобразование вида

$$\tilde{F}\left(k,n,r\right)=\sum_{p=k}^{n-r+k}S_{p,k}C_{n+k+1}^{n+k-r-p}\frac{\left(n+k-r\right)!}{p!},\quad k,n\ge 0,\ 0\le r\le n. \qquad (46)$$

После чего переходим к новым переменным в виде

$$\tilde{S}_E=\tilde{F}\left(m,n,k\right)=\sum_{i=0}^{n-k}S_{i+m,m}C_{n+m+1}^{n-k-i}\frac{\left(n+m-k\right)!}{\left(i+m\right)!},\quad k,n\ge 0,\ 0\le k\le n. \qquad (47)$$

В таблице 4 представлен треугольник $\tilde{S}_E(0,n,k)$ для $n=0...7$.

Таблица 4

$n\setminus r$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	1							
1	2	1						
2	6	3	1					
3	24	12	4	1				

4	120	60	20	5	1			
5	720	360	120	30	6	1		
6	5040	2520	840	210	42	7	1	
7	40320	20160	6720	1680	336	56	8	1

Треугольник $\tilde{S}_E(0,n,k)$ зарегистрирован в OEIS под номером A173333. Столбцы треугольника $S_E(0,n,k)$ представляют собой известные в OEIS линейные последовательности с номерами A000142, A001710, A001715, … .

Треугольники $\tilde{S}_E(1,n,k)$ и $\tilde{S}_E(2,n,k)$ представлены в OEIS, соответственно, номерами A376582, A376634. Первые столбцы данных треугольников также являются известными последовательностями, зарегистрированными в OEIS. Анализ смысловой нагрузки данных последовательностей по информации, содержащейся в OEIS (см. комментарии к A163931), показал, что столбцы данных треугольников моделируют коэффициенты асимптотического разложения экспоненциальных интегралов высшего порядка $E(x,m+1,k+2)$ для $m=0,1,2$ и $k \in Z^+$, где

$$E(x,m,n)=x^{n-1}\int_x^{\infty}\frac{E\left(t,m-1,n\right)}{t^n}dt, \quad E(x,0,n)=e^{-x}. \tag{48}$$

Вычисление такого интеграла с помощью асимптотического разложения проводят по формуле

$$E(x,m,n)=\frac{e^{-x}}{x^m}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i a_{i+n,n+1}}{x^i}, \tag{49}$$

где $a_{i+n,n+1}$ - коэффициенты соответствующего столбца треугольника $T(m,n,k)$. Например,

$$E(x,1,2)=\int_x^{\infty}\frac{e^{-z}}{z}dz \sim \frac{e^{-x}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{24}{x^3}+\frac{120}{x^4}-\frac{720}{x^5}+...\right)}{x},$$

$$E(x,1,3)=x^2\int_x^{\infty}\frac{e^{-z}}{z^3}dz \sim \frac{e^{-x}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{12}{x^2}-\frac{60}{x^3}+\frac{360}{x^4}-\frac{2520}{x^5}+...\right)}{x},$$

$$E(x,2,2)=x\int_x^{\infty}\left(\frac{1}{z}\int_z^{\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}dt\right)dz \sim \frac{e^{-x}\left(1-\frac{5}{x}+\frac{26}{x^2}-\frac{154}{x^3}+\frac{1044}{x^4}-\frac{8028}{x^5}+...\right)}{x^2}.$$

В OEIS существуют также расширенные версии треугольников A173333, A376582, столбцы которых моделируют асимптотическое разложение интегралов $E(x,m+1,k+1)$ для $m=0,1$ и $k \in Z^+$. Для случая $E(x,1,k+1)$ известен треугольник A094587. Для случая $E(x,2,k+1)$ известен треугольник A165674. Для моделирования закономерностей в расширенном семействе треугольников можно адаптировать формулу (47) в следующем виде

$$\hat{S}_E\left(m,n,k\right)=\sum_{i=0}^{n-k} S_{i+m+1,m+1} C_{n+m+1}^{n-k-i} \frac{\left(n+m-k\right)!}{\left(i+m\right)!}, \quad k,n\geq 0, \; 0\leq k\leq n. \qquad (50)$$

В таблице 5 с использованием формулы (50) представлен треугольник $\tilde{S}_E(2,n,k)$ семейства интегралов $E(x,3,k+1)$, $k\in Z^+$ для $n=0...7$.

Таблица 5

$n \setminus r$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	1							
1	6	1						
2	35	9	1					
3	225	71	12	1				
4	1624	580	119	15	1			
5	13132	5104	1175	179	18	1		
6	118124	48860	12154	2070	251	21	1	
7	1172700	509004	133938	24574	3325	335	24	1

Можно сгруппировать полученную информацию следующим образом: все нулевые столбцы чисел (50) представить в отдельной таблице (тогда будет получен прямоугольный массив беззнаковых чисел Стирлинга первого рода A130534; все первые столбцы чисел (50) представить в отдельной таблице (тогда будет получен прямоугольный массив A143491); все вторые столбцы чисел (49) представить в отдельной таблице (тогда будет получен прямоугольный массив A143492) и.т.д.

Для варианта представления коэффициентов разложения экспоненциальных интегралов в виде A130534, A143491, A143492, … формулу (51) адаптируем в следующем виде

$$S_E\left(m,n,k\right)=\sum_{i=0}^{n} S_{i+k+1,k+1} C_{n+k+m+1}^{n-i} \frac{\left(n+k\right)!}{\left(i+k\right)!}, \quad k,n\geq 0. \qquad (51)$$

Столбцы данных прямоугольных массивов (51) моделируют коэффициенты разложения экспоненциальных интегралов вида $E(x,k+1,m+1)$, $k,m\in Z^+$. Учитывая то обстоятельство, что в данном варианте представления для параметра $m=0$ имеем прямоугольную таблицу беззнаковых чисел Стирлинга первого рода (A130534), ссылка на данный вариант представления “E”-обобщенных чисел Стирлинга используется в структурной схеме рис. 1. для значений параметра $m = 0,1,2.$

5. “L”-обобщенные числа Стирлинга 1 рода

Рассмотрим “S”-обобщенные числа Стирлинга 1 рода в виде (41)

$$S_s\left(m,n,k\right) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{j=p}^{n} S_{n-j,k} C_{n+m}^{p} C_n^j C_j^p \, p! m^{j-p} . \tag{52}$$

В процессе суммирования будем использовать только сечение $p = 0$, тогда формула (52) приобретает вид

$$\tilde{S}_L\left(m,n,k\right) = \sum_{i=0}^{n} S_{n-i,k} C_n^i m^i . \tag{53}$$

Рассмотрим следующие числа, совпадающие по модулю с числами (53)

$$S_L\left(m,n,k\right) = \sum_{i=0}^{n} S_{n-i,k} C_n^i m^i \left(-1\right)^{n-k} . \tag{54}$$

При $m = 0$ имеем беззнаковые числа Стирлинга первого рода с нуль-столбцом (A123393). При $m = 1$ получим треугольник A269953. При $m = 2$ получим треугольник A381082. Треугольник A381082 представлен в таблице 6 для $n = 0...7$.

Таблица 6

$n \setminus r$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	1							
1	-2	1						
2	4	-3	1					
3	-8	8	-3	1				
4	16	-18	11	-2	1			
5	-32	44	-20	15	0	1		
6	64	-80	94	5	25	3	1	
7	-128	272	56	294	105	49	7	1

В OEIS представлены также сечения: $m = -1$ (A094816 – коэффициенты полиномов Шарле); $m = -2$ (A137346 – коэффициенты специального случая полиномов Пуассона-Шарле); $m = -3$ (A327997).

Анализ закономерностей в столбцах последовательностей, часть из которых является известными последовательностями (см. к примеру, первые столбцы треугольников для случаев $m = 1,2,3$, соответственно, A002741, A346397, A346398), показал, что столбцы чисел $S_L\left(m,n,k\right)$ представляют коэффициенты стандартного разложения функции

$$f(x)=\frac{\left(-\ln(1-x)\right)^{k}e^{-mx}}{k!}. \tag{55}$$

В описании первого столбца A002741 последовательности $S_L(1,n,k)$ A269953 данные числа названы логарифмическими со ссылкой на [26], поэтому все последовательности (54) в структурной схеме рис. 1 обозначены как “L”-обобщенные числа Стирлинга 1 рода.

Заключение

В работе систематизированы взаимосвязи в иерархически представленной структуре базовых категорий специальных чисел: чисел Стирлинга, биномиальных чисел и чисел Бернулли. Данные взаимосвязи осуществляются с использованием новых категорий обобщений чисел Стирлинга и биномиальных чисел. При этом, как известно, любая систематизация знаний ведет не только к ускорению поиска информации в рамках фиксированной математической структуры, но позволяет получать новые знания на ее базе. В связи с чем можно в дальнейшем предполагать, что внутри представленной иерархии специальных чисел могут появиться новые категории обобщений специальных чисел.

Литература

1. Платонов М.Л. Свойства обобщенных чисел Стирлинга и Лаха // В сборнике: Асимптотические и перечислительные задачи комбинаторного анализа. Сборник научных работ. Иркутский государственный университет; Красноярский государственный университет // Красноярск, 1976. С. 125-144.
2. Платонов М.Л. Комбинаторные числа // Иркутск, ИГУ, 1980, 104 с.
3. Бондаренко Б.А. Обобщенные треугольники и пирамиды Паскаля, их фрактали, графы и приложения.: ФАН Ташкент, 1990, 192 с.
4. Кузьмин О.В. Некоторые комбинаторные числа в обобщенной пирамиде Паскаля // В сборнике: Асимптотические и перечислительные задачи комбинаторного анализа. Сборник научных трудов. Иркутский государственный университет // Иркутск, 1997. С. 90-100.
5. Цылова Е.Г. Вероятностные методы получения асимптотических формул для обобщенных чисел Стирлинга // В сборнике: Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Межвузовский сборник научных трудов. Пермский государственный университет // Пермь, 2001. С. 38-52 .
6. Бурлаченко Е.В. Матрицы Риордана и обобщенные ряды Лагранжа // Математические заметки. 2016. Т. 100, №4. С. 510-518.
7. N. J. A. Sloane. A Handbook of Integer Sequences // Academic Press, 1973.
8. S. Roman. The Umbral Calculus // Academic Press, New York, 1984.
9. Wolfdieter Lang. On Generalizations of the Stirling Number Triangles // Journal of Integer Sequences, Vol.3 (2000), Article 00.2.4 // Institut für Theoretische Physik Universität Karlsruhe, 2000.
10. L.W.Shapiro, S.Getu, W.-J.Woan, L.Woodson, The Riordan group, Discrete Applied Mathematics, 34(1991), 229-239.
11. Справочник по специальным функциям с формулами графиками и таблицами. Под ред. М. Абрамовца, И. Стиган. М.:Наука, 1979., 832 с.
12. Стаценко И.В. О порядковых номерах треугольников обобщенных специальных чисел// Инновационная наука № 02-2, ISSN 2410-6070 // Издательство ООО “Аэтерна” 450057 г. Уфа. с. 15-19 // 2024, https://aeterna-ufa.ru/sbornik/IN-2024-02-2.pdf.

13. Стаценко И.В. Мультигармонические числа, их свойства и применение.- //Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук №11, ISSN 2073-0071//.- М. Издательство “Литера” 2019, с. 6-11.
14. Стаценко И.В. Применение мультигармонических чисел для синтеза замкнутых форм параметрически модифицированных факториал-производящих последовательностей. // Прикладная дискретная математика №55, ISSN: 2071-0410 eISSN: 2311-2263 // Издательство Томского государственного университета, 2022, с. 5-13.
15. Стаценко И.В. Риордановы обобщения биномиальных коэффициентов// Инновационная наука № 09-2, ISSN 2410-6070 // Издательство ООО “Аэтерна” 450057 г. Уфа. с. 10-13 // 2024, https://aeterna-ufa.ru/sbornik/IN-2024-09-2.pdf, eLIBRARY ID: 69207476.
16. Стаценко И.В. Взаимосвязи “P”-обобщенных чисел Стирлинга первого рода с другими обобщенными числами Стирлинга // Инновационная наука № 10-1, ISSN 2410-6070 // Издательство ООО “Аэтерна” 450057 г. Уфа. с. 19-22 // 2024, https://aeterna-ufa.ru/sbornik/IN-2024-10-1.pdf, eLIBRARY ID: 72201465.
17. Стаценко И.В. Идентификация риордановых обобщений биномиальных коэффициентов // Инновационная наука №02-1, ISSN 2410-6070 // Издательство ООО “Аэтерна” 450057 г. Уфа. с. 11-18 // 2025, https://aeterna-ufa.ru/sbornik/IN-2025-02-1.pdf; eLIBRARY ID: .
18. Дж. М. Ганди. О логарифмических числах. Math. Student, 31, 1963, 73-83.