S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2025) УДК 51.643, 517.11

ГЛОБАЛЬНАЯ ДОПУСТИМОСТЬ ПРАВИЛ ВЫВОДА В ЛОГИКЕ GL.

В.В. Римацкий

The abstract.

Исследуется глобальная допустимость правил вывода в логике GL, т.е. допустимости правила вывода сразу во всех финитно аппроксимируемых (табличных) расширениях логики GL. Для правил, модель для которых удовлетворяет некоторым естественным свойствам, получено необходимое и достаточное условие глобальной допустимости в логике GL. На основе полученного описания построен алгоритм проверки глобальной допустимости произвольного правила в редуцированной форме. Таким образом, проблема глобальной допустимости в логике GL разрешима.

The problem of decidability of global admissibility of GL logic rules, i.e. admissibility of an inference rule in all finitely approximable (tabular) extensions of GL logic at once, is investigated. For rules whose model satisfies certain natural properties, a necessary and sufficient condition for global admissibility in GL logic is obtained. Based on the obtained description, an algorithm for checking the global admissibility of an arbitrary rule in reduced form is constructed. Thus, the problem of global admissibility in GL logic is decidable.

Keywords: модальная логика, фрейм и модель Крипке, допустимое правило вывода, глобально допустимые правила вывода.

V. V. Rimatskiy, Global admissibility of inference rules in logic GL.

Исследование было поддержано Российским Научным Фондом (Проект No.23-21-00213, 25-21-20011).

modal logic, Kripke frame and model, admissible inference rule, globally admissible inference rules.

1 Введение

Ключевой особенностью нашего подхода к изучению логического следования является использование правил вывода для его описания. Правило вывода – это выражение (дробь), состоящая из посылок (числитель) и заключения, вывода (знаменатель). Посылки правила выражают гипотезы, заданную информацию, а заключение – следствие из них. В отличие от формул правила вывода позволяют описать динамическую, нестабильную информвцию. Кроме того, такие правила позволяют формализовать стандартный вопрос в исследовании логического следования: даны некоторые гипотезы или заданная информация, что из них следует, что является непротиворечивым выводом из известной информации?

Наиболее общим вариантом правил вывода, совместимых с заданной логикой, оказались допустимые правила вывода, введенные Лоренценом ([1], 1955): это те правила, добавление которых к заданной логике не изменяет множество ее теорем. Интерес к изучению допустимых правил вывода был стимулирован постановкой проблемы Фридмана ([2], 1975) о разрешимости по допустимости интуиционистской логики Int: существует ли алгоритм распознавания допустимости заданного правила вывода в этой логике? В классической логике вопрос разрешимости по допустимости решался тривиально – допустимы только выводимые, доказуемые правила. В неклассических логиках примеры Харропа, Минца, Порта и др. ([3], [4], [5]) показали, что в этих логиках есть допустимые, но не выводимые правила вывода. Положительное решение проблемы Фридмана для многих базовых неклассических логик (Int, KC, $K4$, $S4$ и др.) было получено Рыбаковым В.В. (см. [6, 7]). Другим способом описания всех допустимых в заданной логике правил вывода оказалось явное описание базиса для них, т.е набора допустимых правил заданной логики из которого выводятся все возможные такие правила (см. [8], [9], [10], [11], [12]).

Таким образом, в нач. 2000-х возник вопрос о дальнейшем развитии теории допустимых правил вывода неклассических логик. Одним из направлений развития может стать использование допустимых правил для описания нетривиальных свойств моделей или логик. Например, слабое свойство ко-накрытий (extension property) для модальных или суперинтуиционистских логик может быть описано через допустимость заданного набора правил вывода в логике (см. наример [13], [14]).

Другим направлением развития стали глобально допустимые правила вывода – правила, допустимые сразу во всех (финитно аппроксимируемых) расширениях заданной логики. Понятие глобально допустимого правила вывода логики $S4$ (Int) было введено в короткой заметке [15].

Понятно, что такие правила обобщают обычные допустимые правила заданной логики. С практической точки зрения они могут представлять интерес в Компьютерных науках и ИИ. Известно, что явления или процессы в этой области (сети интернет, процессы вычислений и доказательств, многоагентные среды и тд.) могут быть описаны с точки зрения и на языке различных неклассических логик (многомодальных, временных, многоагентных и тд.). Нахождение правил вывода, допустимых сразу (одновременно) во всех (или достаточно широком классе) таких логик позволит иначе взглянуть на описываемый процесс или явление, и получить новые выводы, информацию из наблюдаемых фактов, информации.

На сегодняшний день автору известно не много работ, посвященных изучению глобально допустимых правил вывода. В короткой заметке [15] была доказана редукция глобальной допустимости к табличной допустимости: правило глобально допустимо в логике L если, и только если оно допустимо во всех табличных расширениях логики L. В [16] получен явный (бесконечный) базис правил вывода, глобально допустимых в модальных предтабличных логиках $PT2, PT3$. В [12] был описан явный базис глобально допустимых правил для (бесконечного класса) расширений логики $S4$ со слабым свойством ко-накрытий.

Представленная работа продолжает изучение глобально допустимых правил неклассических логик и развивает результаты, полученные в [17, 18]. Для правил в редуцированной форме, модель (построенная на формулах посылки правила) для которых удовлетворяет некоторым естественным свойствам, получено необходимое и достаточное условие глобальной допустимости в логике GL. На основе полученного описания построен алгоритм проверки глобальной допустимости произвольного правила в редуцированной форме. Таким образом, проблема глобальной допустимости в GL разрешима.

2 Определения, предварительные результаты

Вначале напомним кратко необходимые определения и результаты (для детального знакомства с предметом рекомендуем монографию [7]). Далее мы рассматриваем только логики, расширяющие GL, поэтому все фреймы иррефлексивны и транзитивны.

Фрейм $F := \langle W, R\rangle$ есть пара, где W – непустое множество и R - бинарное отношение на множестве W. Базисное множество и сам фрейм далее часто будем обозначать одной и той же буквой. Если $\langle W, R\rangle$ – некоторый фрейм, то непустое множество $C \subseteq W$ называется *сгустком,* если: C состоит из единственного иррефлексивного элемента, или 1) для любых x, y из C выполняется xRy; 2) для любых $x \in C$ и $y \in W$ $(xRy \& yRx) \Longrightarrow y \in C$. Сгусток называется *собственным,* если $|C| > 1$; в противном случае – *одноэлементным или вырожденным.* Для элемента $a \in F$ через $C(a)$ обозначим сгусток, порожденный элементом a. Т.к. мы рассматриваем логики над GL, то все сгустки являются вырожденными и состоят из одного иррефлексивного элемента.

Моделью называется тройка $\mathcal{M} = \langle W,\ R,\ V\rangle$, где $\mathcal{F} := \langle W, R\rangle$ фрейм и V – означивание множества пропозициональных переменных P на фрейме $\mathcal{F}$, т.е. $V : P \to 2^W$. $Dom(V) = P$ называется домейном V.

Фрейм $\mathcal{F} = \langle W_1,\ R_1\rangle$ называется *открытым подфреймом* фрейма $\mathcal{G} = \langle W_2,\ R_2\rangle$ (обозначаем $\mathcal{F} \sqsubseteq \mathcal{G}$), если выполняется $W_1 \subseteq W_2,\ R_2 \cap W_1^2 = R_1$ и $\forall a \in W_1\, \forall b \in W_2\, (aR_2b \Longrightarrow b \in W_1)$.

Если $\mathcal{M}_1 = \langle W_1,\ R_1,\ V_1\rangle$, $\mathcal{M}_2 = \langle W_2,\ R_2,\ V_2\rangle$ модели, то модель $\mathcal{M}_1$ называется *открытой подмоделью модели* $\mathcal{M}_2$ (обозначаем $\mathcal{M}_1 \sqsubseteq \mathcal{M}_2$), если 1) фрейм $\langle W_1,\ R_1\rangle$ – открытый подфрем фрейма $\langle W_2,\ R_2\rangle$; 2) $Dom(V_1) = Dom(V_2)$ и $\forall p \in Dom(V_1)\ V_1(p) = V_2(p) \cap W_1$.

Отображение фреймов $f : \langle F,\, R\rangle \to \langle G,\, S\rangle$ называется *p-морфизмом*, если выполняется: (1) $aRb \Longrightarrow f(a)Sf(b)$; (2) $f(x)Sz \Longrightarrow \exists y \in F : f(y) = z \,\&\, xRy$. Отображение $f : \mathcal{M}_1 = \langle W_1,\ R_1,\ V_1\rangle \to \mathcal{M}_2 = \langle W_2,\ R_2,\ V_2\rangle$ называем также *p-морфизмом модели* $\mathcal{M}_1$ в модель $\mathcal{M}_2$, если 1) f есть p-морфизм фрейма $\mathcal{F}_1 = \langle W_1,\ R_1\rangle$ во фрейм $\mathcal{F}_2 = \langle W_2,\ R_2\rangle$; 2) означивания $V_1,\ V_2$ определены для одного и того же множества переменных; 3) $\forall\, p \in Dom(V_1),\ \forall a \in W_1 (a \models_{V_1} p \iff f(a) \models_{V_2} p)$.

Основным свойством взятия открытых подмоделей и p-морфизмов является сохранение истинности формул:

Утверждение 2.1. [7]

1) Если $\mathcal{M}_1$ открытая подмодель модели $\mathcal{M}_2$, тогда для любой формулы α, построенной на переменных из множества $Dom(V_1)$, $\mathcal{M}_2 \models \alpha$ влечет $\mathcal{M}_1 \models \alpha$;

2) если отображение f есть p-морфизм модели $\mathcal{M}_1 = \langle W_1,\ R_1,\ V_1\rangle$ на модель $\mathcal{M}_2 = \langle W_2,\ R_2,\ V_2\rangle$, тогда для любой формулы α, построенной на переменных из множества $Dom(V_1)$, справедливо $\forall a \in W_1 (a \models_{V_1} \alpha \iff f(a) \models_{V_2} \alpha)$.

Пусть $\mathcal{F}_i = \langle W_i,\ R_i\rangle,\ i \in I$ – семейство попарно не пересекающихся фреймов, т.е. $W_i \cap W_j = \emptyset$ для $i \neq j \in I$. *Прямым объединением* этого семейства называется фрейм $\bigsqcup_{i \in I} \mathcal{F}_i = \langle W,\ R\rangle$, где $W = \bigcup_{i\in I} W_i,\ R = \bigcup_{i \in I} R_i$. Прямое объединение моделей определяется аналогично.

Говорим, что фрейм $\mathcal{F}$ является *λ-фреймом*, если все теоремы логики λ истинны на $\mathcal{F}$ при любом означивании переменных. Соответственно, $\lambda(\mathcal{F})$ – множество формул, истинных на $\mathcal{F}$ – есть логика, порожденная фреймом $\mathcal{F}$.

По Лемме 2.5.26 [7] прямое объединение фреймов (или моделей) сохраняет истинность формул: $\bigsqcup_{i\in I} \mathcal{F}_i \models_V \alpha \iff \forall i\, (\mathcal{F}_i \models_{V_i} \alpha)$. Значит, прямое объединение λ-фреймов также является λ-фреймом.

Будем говорить, что сгустки $C_1, C_2, \ldots, C_n$ некоторого фрейма F *попарно не сравнимы по отношению* R, если справедливо: $\forall C_i, C_j, 1 \leq i, j \leq n,\ \forall x \in C_i, y \in C_j (\neg(xRy) \& \neg(yRx))$, т.е. из элементов одного сгустка данного множества сгустков не достижимы по отношению

R элементы другого сгустка. Любое множество попарно несравнимых по отношению R сгустков фрейма F называется *антицепью.* Антицепь $\mathcal{A}$ называется *нетривиальной*, если $\mathcal{A}$ состоит по крайней мере из двух различных сгустков, в противном случае – *тривиальной*.

Пусть $\mathcal{F} = \langle F, R\rangle$ некоторый фрейм. Для любого элемента $a \in F$ обозначим $a^R = \{x|aRx\}$ и $a^{<R} = a^R \setminus C(a)$ и будем говорить, что элемент a (сгусток $C(a)$) *порождает как корень* подфрейм a^R ($C(a)^R$ соответственно) фрейма F. Аналогично, для множества $X \subseteq F$ определяем $X^R := \bigcup\{x^R|x \in X\}$ и $X^{<R} = X^R \setminus X$, и также будем говорить, что множество $X \subseteq F$ порождает подфрейм X^R или $X^{<R}$ соответственно. Далее помимо стандартного обозначения фреймов прописнымми латинскими буквами ($F,\ \mathcal{F}, G, \dots$), также будем использовать и обозначения $a^R,\ C^R,\ X^R, \dots$ для подфреймов (фреймов), порожденных элементом $a \in F$, сгустком $C \in F$ или множеством $X \subseteq F$.

Фрейм $\mathcal{F}$ – *корневой*, если существует элемент $a \in \mathcal{F}$ такой, что $\forall b \in \mathcal{F}$ (aRb). Данный элемент a (и сгусток $C(a)$) называем также *корнем* $\mathcal{F}$. Сгусток $C(a)$ из F есть *ко-накрытие* для множества (или антицепи) $X \subseteq F$, если $a^{<R} = X^R := \bigcup\{x^R|x \in X\}$. Говорим, что *элемент a есть ко-накрытие* для $X \subseteq F$, если одноэлементный сгусток $C(a)$ образует ко-накрытие для X. *λ-ко-накрытием* называем ко-накрытие, порождающее как корень λ-фрейм.

Глубиной $d(x)$ элемента x фрейма (модели) $\mathcal{F}$ называется максимальное число сгустков в цепях сгустков, начинающихся со сгустка, содержащего x. Множество всех элементов фрейма (модели) $\mathcal{F}$ глубины не более чем n будем обозначать $S_{\leq n}(\mathcal{F})$, а множество элементов глубины n обозначим $S_n(\mathcal{F})$.

Подмножество $\mathcal{X}$ заданной модели $\mathcal{M}$ называется *формульно определимым или формульным*, если существует формула α такая, что $\forall x \in \mathcal{M}\big[x \models_V \alpha \iff x \in \mathcal{X}\big]$. Соответственно, *элемент $x \in \mathcal{M}$ является формульным*, если множество $\{x\}$ формульное. Означивание V *определимо (формульное)* в модели $\mathcal{M}$, если для любой переменной p из области V, множество $V(p)$ формульное.

Для заданного фрейма $\mathcal{F}$, заданного означивания V и правила вывода $r := \{\alpha_1, \dots, \alpha_k/\beta\}$, говорим что *$r$ истинно на $\mathcal{F}$ при означивании V* (обозначаем $\mathcal{F} \models_V r$), если как только $\forall x \in \mathcal{F} \forall i$ $(x \models_V \alpha_i)$, то $\forall x \in \mathcal{F} (x \models_V \beta)$. *Правило r истинно на $\mathcal{F}$*, если r истинно на $\mathcal{F}$ при любом означивании V (обозначаем $\mathcal{F} \models r$). Аналогично определяется истинность правила на заданной модели: r истинно на $\mathcal{M}$, если как только $\forall x \in \mathcal{M}\, \forall i$ $(x \models_V \alpha_i)$, то $\forall x \in \mathcal{M}$ $(x \models_V \beta)$ при означивании V.

Правило вывода $r = \{\alpha_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \alpha_k(x_1, \dots, x_n)/\beta(x_1, \dots, x_n)\}$ называется *допустимым* в логике λ [обозначаем $r \in Ad(\lambda)$], если для любых формул $\delta_1, \dots, \delta_n$ из $(\forall j\ \ \alpha_j(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \lambda)$ следует $\beta(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \lambda$.

Допустимые правила пропозициональной модальной (суперинтуиционистской) логики λ имеют алгебраическое описание – им соответствуют квазитождества, истинные на свободной алгебре счетного ранга $\mathfrak{F}_w(\lambda)$

многообразия алгебр $Var(\lambda)$, соответствующего данной логике, т.е. справедливо

Утверждение 2.2 (гл. 3, [7]). *Правило вывода $r = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k/\beta\}$ допустимо в логике λ если и только если на свободной алгебре счетного ранга $\mathfrak{F}_w(\lambda)$ из многообразия алгебр $Var(\lambda)$ истинно квазитождество $r^* = \{\alpha_1 = 1\& \ldots \&\alpha_k = 1 \Longrightarrow \beta = 1\}$.*

Модель Крипке $\langle F, R, V\rangle$, где $V : P_n \to 2^F$ и $P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, называется *$n$-характеристической для логики λ* тогда и только тогда, когда для любой формулы α от переменных $p_1, \ldots, p_n$, выполняется $\alpha \in \lambda \iff \langle F, R, V\rangle \models \alpha$.

В нашем исследовании существенно будет использоваться строение n-характеристической модели для финитно аппроксимируемых логик, расширяющих логику GL, с помощью которой будет описана допустимость правил вывода в этих логиках. Следуя гл. 3 [7], опишем конструкцию и свойства этой модели.

Пусть задана финитно аппроксимируемая логика λ, расширяющая логику GL. И пусть задано множество пропозициональных переменных $P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Первый слой данной модели $S_1(C_n(\lambda))$ состоит из множества попарно неизоморфных как модели сгустков со всевозможными означиваниями V переменных из множества P_n (в случае расширений логики GL все сгустки первого слоя одноэлементны и имеют попарно различные означивания переменных). Предположим, что $S_{\leq m}(C_n(\lambda))$ уже построен. Слой $S_{m+1}(C_n(\lambda))$ глубины $m+1$ получим следующим образом. Выберем произвольную антицепь сгустков $\mathcal{X} \subset S_{\leq m}(C_n(\lambda))$, содержащую хотя бы один элемент (сгусток) глубины m и добавим сгусток C из $S_1(C_n(\lambda))$ как ко-накрытие для антицепи $\mathcal{X}$ при условии:

(i) фрейм, порожденный сгустком C как корнем, является λ-фреймом: $C^R = \mathcal{X}^R \cup \{C\}$ является λ-фрейм;

(ii) если $\mathcal{X} = \{C_1\}$, то сгусток C не изоморфен подмодели сгустка C_1 как модель.

Продолжая описанную процедуру, в итоге получим модель $C_n(\lambda)$. Свойства полученной модели сформулируем в следующих утверждениях.

Утверждение 2.3 (Th. 3.3.6, 3.3.7 [7]). *Для любой финитно аппроксимируемой логики λ, расширяющей GL, модель $C_n(\lambda)$ является n-характеристической, и каждый элемент данной модели – формульный.*

Утверждение 2.4 (Th. 3.3.3 [7]). *Для любой финитно аппроксимируемой логики λ, расширяющей GL, правило вывода r допустимо в λ если и только если r истинно на фрейме $C_n(\lambda)$ для любого n и при любом формульном означивании переменных r.*

В данном исследовании нам также понадобится редуцированная форма модальных правил вывода. Говорим, что *правило r имеет редуцированную форму*, если $r := \{\bigvee_{1\leq j\leq m} \phi_j/x_0\}$, где

$$\phi_j := \bigwedge_{0\leq i\leq k} x_i^{a_i} \wedge \bigwedge_{0\leq i\leq k} \Diamond x_i^{b_i},\ a_i, b_i \in \{0,1\};\ x^0 := x,\ x^1 := \neg x.$$

Для каждого члена ϕ_j посылки правила в редуцированной форме определим также множества
$\theta_1(\phi_j) := \{x_j :\ 0 \leq j \leq k,\ a_j = 0\}$; $\theta_2(\phi_j) := \{x_j :\ 0 \leq j \leq k,\ b_j = 0\}$.
$\theta_3(\phi_j) := \{x_j :\ 0 \leq j \leq k,\ a_j = 1\}$; $\theta_4(\phi_j) := \{x_j :\ 0 \leq j \leq k,\ b_j = 1\}$.
Для правила r в редуцированной форме множество всех формул ϕ_j в посылке обозначим как $Pr(r)$.

Утверждение 2.5 (см. Гл. 3.1 [7])**.** *Для любого модального правила вывода R существует правило $rf(R)$ в редуцированной форме, эквивалентное R относительно истинности на $K4$-алгебрах и $K4$-фреймах; R и $rf(R)$ одновременно выводимы или допустимы в любой модальной логике, расширяющей $K4$.*

Напомним определение глобально допустимого правила вывода, введенное в [15]. Правило вывода *r глобально допустимо в логике L*, если r допустимо во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих логику L. Набор правил вывода $\mathcal{R}$ называется *базисом глобально допустимых правил логики L*, если: 1) каждое правило из $\mathcal{R}$ глобально допустимо в L; 2) любое глобально допустимое в L правило выводится из $\mathcal{R}$ во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих L.

Основным результатом [15] была редукция глобальной допустимости правила в логике $S4$ (Int) к допустимости во всех табличных расширениях этой логики:

Теорема 2.6 (см. Т.3 [15])**.** *Правило вывода r допустимо во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих $S4$ (Int) $\iff$ r допустимо во всех табличных логиках (в том числе порожденных конечными корневыми $S4$-фреймами), расширяющих $S4(Int)$.*

3 Вспомогательный результат

Пусть задано правило вывода r в редуцированной форме. Определим модель $\mathfrak{M}(r, X)$ для правила r (см. гл. 3.9 [7]). Пусть множество X состоит из всех членов $\phi \in Pr(r)$ посылки правила. Модель $\mathfrak{M}(r, X)$ построена на множестве X с отношением R и означиванием S:

$$\forall \phi_j, \phi_k \in X\ (\phi_j R \phi_k \iff \theta_2(\phi_k) \subset \theta_2(\phi_j)\ \&\ \theta_1(\phi_k) \subseteq \theta_2(\phi_j));$$

$$\forall \phi_j \in X, \forall p \in Var(r)\ (\phi_j \in S(p) \iff p \in \theta_1(\phi_1)).$$

Понятно, что отношение R иррефлексивно и транзитивно на множестве X. Далее означивание S считаем стандартным и зафиксированным на данной модели.

Пусть G – произвольный конечный λ-фрейм (λ-модель), и логика λ расширяет логику GL. Для произвольного элемента $y \in G$ определим локальную компоненту $K(y)$ (как открытый подфрейм или подмодель G) следующим образом. Пусть $\mathcal{F}_0 := y^R$. На каждом шаге построения $i > 0$ для каждой антицепи $\mathcal{A}_j \subseteq S_{\leq(i+1)}(\mathcal{F}_i)$, имеющей ко-накрытие в G, добавляем одно из них к $\mathcal{F}_{i+1}$. Через конечное число шагов процесс построения оборвется в силу конечности G. Полученный в результате фрейм есть локальная компонента $K(y)$.

Понятно, что антицепь имеет ко-накрытие в локальной компоненте тогда и только тогда, когда данная антицепь имеет ко-накрытие в G. Кроме того, локальная компонента – конечный фрейм.

Наличие всех необходимых λ-ко-накрытий во фрейме локальной компоненты произвольного элемента $c \in Ch_n(\lambda)$ позволяет утверждать:

Утверждение 3.1. *Для любого n и произвольного элемента $c \in Ch_n(\lambda)$ существует p-морфизм из фрейма n-характеристической модели $Ch_n(\lambda)$ на локальную компоненту $K(y)$.*

Пусть задано правило r в редуцированной форме и модель $\mathfrak{M}(r, X)$ для этого правила. Используя технику доказательств результатов, полученных в [17, 18] (доказывается аналогично с некоторыми упрощениями), рассмотрим сначала тривиальные случаи, исключив их в дальнейшем рассмотрении:

Лемма 3.1. *(1) Если $\forall\, \phi \in S_1(\mathfrak{M}(r, X))$ выполняется $\theta_2(\phi) \neq \emptyset$, то правило r глобально допустимо в логике GL.*

(2) Если $\forall\, \phi \in \mathfrak{M}(r, X)$ выполняется $x_0 \in \theta_1(\phi)$, то правило r глобально допустимо в GL. Если существует $\phi_0 \in Pr(r)\ :\ x_0 \notin \theta_1(\phi_0)$ и при этом выполняется также $\theta_2(\phi_0) = \emptyset$, то правило не допустимо глобально в логике GL.

(3) Если для некоторого $\phi_0 : (x_0 \notin \theta_1(\phi_0))$ выполняется $\exists \phi \in K_c(\phi_0) \sqsubseteq \mathfrak{M}(r, X)\ : \phi \not\models_S \phi$, то правило r глобально допустимо в логике GL.

(4) Если в модели $\mathfrak{M}(r, X)$ выполняется: $\exists\, \phi^1 \in S_1(\mathfrak{M}(r, X))\ :\ \theta_1(\phi^1) = \emptyset$, $\exists\, \phi_0 \in \mathfrak{M}(r, X)\ :\ x_0 \notin \theta_1(\phi_0)\ \&\ \theta_2(\phi_0) = \emptyset$, и при этом локальная компонента $K_c(\phi_0)$ насыщенна по ко-накрытиям до глубины $d(\phi_0)$ элемента ϕ_0 (т.е. каждая антицепь элементов из $K_c(\phi_0)$ глубины не более $d(\phi_0)$ имеет ко-накрытие), то правило r не допустимо глобально в логике GL.

(5) Пусть задано подмножество $Z \subseteq X$ такое, что $\mathfrak{M}(r, Z) \sqsubseteq \mathfrak{M}(r, X)$. Если $|Z| \leq 2$ и правило r опровергается на подмодели $\mathfrak{M}(r, Z)$, то правило r не допустимо глобально в логике GL.

Доказательство. 1) От противного. Предположим, что правило r не допустимо глобально в GL, т.е. не допустимо в некоторой табличной (финитно аппроксимируемой) логике L над GL. Тогда для некоторой подстановки e выполняется:

$$e(\bigvee \phi_j) \in L,\ e(x_0) \notin L.$$

В силу финитной аппроксимируемости логики, существует конечная L-модель M такая, что выполняется $M \models e(\bigvee \phi_j),\ M \not\models e(x_0)$.

Но тогда одноточечная иррефлексивная модель E также адекватна данной логике и на ней в силу $e(\bigvee \phi_j) \in L$ выполняется $E \models e(\bigvee \phi_j)$. Однако, это не возможно по условию: на такой модели для всех формул $\phi_j \in \mathfrak{M}(r, X)$ не выполняется $\theta_2(\phi) = \emptyset$, что невозможно по иррефлексивности отношения. Противоречие.

2) Если такой формулы $\phi_0 \in Pr(r)$ не существует, то заключение правила будет истинно на любой модели (правило истинно на любой конечной модели), и значит, аналогично доказательству леммы 3 [17] не сложно показать, что правило глобально допустимо в логике GL. Если такая формула $\phi_0 \in Pr(r)$ существует в модели $\mathfrak{M}(r, X)$, то при равенстве $\theta_1(\phi_0) = \emptyset$ правило не допустимо глобально в логике GL (доказывается аналогично теореме 6 [17]).

3) Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 [17].

4) Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1 [17]. Приведем схему доказательства. Открытым подфреймом $S_{\leq d(\phi_0)}(K_c(\phi_0))$ породим табличную логику $L = L(S_{\leq d(\phi_0)}(K_c(\phi_0))$. Для некоторого n данный фрейм $K_c(\phi_0)$ является открытым подфреймом модели $Ch_n(L)$. Наличие всех возможных L-ко-накрытий в порождающем подфрейме позволяет определить на него р-морфизм фрейма n-характеристической модели. Перенося с помощью этого р-морфизма означивание с $S_{\leq d(\phi_0)}(K_c(\phi_0))$ на фрейм $Ch_n(L)$ опровергнем данное правило на $Ch_n(L)$. Отсюда следует не допустимость этого правила в заданной табличной логике.

5) Если $|Z| \leq 2$, то фрейм модели $\mathfrak{M}(r, Z)$ состоит из одной иррефлексивной точки, двух несравнимых точек, цепи из двух элементов. Если правило опровергается на данной модели, то легко проверить, что оно не допустимо в табличной логике, порожденной фреймом $\mathfrak{M}(r, X)$. И значит, не допустимо глобально в логике GL.

$\square$

Таким образом, далее рассматриваем правила вывода в редуцированной форме, модель $\mathfrak{M}(r, X)$ для которых удовлетворяет свойствам:

(1) $\exists\, \phi^1 \in S_1(\mathfrak{M}(r, X))\ :\ \theta_2(\phi^1) = \emptyset$,

(2) $\exists\, \phi_0 \in \mathfrak{M}(r, X)\ :\ x_0 \notin \theta_1(\phi_0)\ \&\ \theta_2(\phi_0) \neq \emptyset$.

(3) для всех ϕ_0, удовлетворяющих условию (2), правило r опровергается на локальной компоненте $K_c(\phi_0)$:

$$\forall \phi \in K_c(\phi_0)\ (\phi \models_S \phi),\ \exists \phi_0 \in K_c(\phi_0)\ (\phi_0 \not\models_S x_0)).$$

(4) локальная компонента $K_c(\phi_0)$ не насыщенна по ко-накрытиям (т.е. существует антицепь элементов глубины не более $d(\phi_0)$ без ко-накрытия).

Далее будет показано, что при выполнении этих условий заданное правило может быть как глобально допустимым в логике GL, так и не допустимым глобально.

Теорема 3.2. *Пусть модель $\mathfrak{M}(r, X)$ удовлетворяет свойствам (1) – (4), приведенным ранее. Пусть также для любого непустого множества дизъюнктов Z : $\phi_0^R \sqsubseteq Z \subseteq X$ $(|Z| \geq 3)$ существует нетривиальная антицепь $\mathcal{A} \subseteq K_c(\phi_0) \subseteq \mathfrak{M}(r, Z)$ такая, что:*

(1) $\exists\ \mathcal{Y} \subseteq K_c(\phi_0) : f(\mathcal{Y}^R) = \mathcal{A}^R \& f -$ p-morphism;

(2) $\exists \phi_{\mathcal{Y}} \in K_c(\phi_0)$ – ко-накрытие для $\mathcal{Y}$ в $K_c(\phi_0)$; т.е.
$\theta_2(\phi_{\mathcal{Y}}) = \{\bigcup_{\phi_i \in \mathcal{Y}} \theta_1(\phi_i) \cup \bigcup_{\phi_i \in \mathcal{Y}} \theta_2(\phi_i)\}\ \&\ \{\theta_4(\phi_{\mathcal{Y}}) = \bigcap_{\phi_i \in \mathcal{Y}} \theta_3(\phi_i) \cap \bigcap_{\phi_i \in \mathcal{Y}} \theta_4(\phi_i)\}$

(3) антицепь $\mathcal{A}$ не имеет ко-накрытия в $\mathfrak{M}(r, X)$, т.е. $\forall \phi_a \in \mathfrak{M}(r, X)$

$$\{\theta_2(\phi_a) \neq \bigcup_{\phi_i \in \mathcal{A}} \theta_1(\phi_i) \cup \bigcup_{\phi_i \in \mathcal{A}} \theta_2(\phi_i)\} \ \vee\ \{\theta_4(\phi_a) \neq \bigcap_{\phi_i \in \mathcal{A}} \theta_3(\phi_i) \cap \bigcap_{\phi_i \in \mathcal{A}} \theta_4(\phi_i)\}.$$

Тогда правило r глобально допустимо в GL.

Доказательство. Пусть заданное правило r в редуцировнной форме не допустимо в некоторой табличной логике λ, расширяющей логику GL. Тогда по теореме 3.5.1 [7], правило r опровергается при некотором формульном означивании V (т.е. для любой переменной p множество $V(p)$ является формульным, см. определение на с. 5) на m-характеристической модели $Ch_m(\lambda)$ для некоторого m:
$\forall\ a \in Ch_m(\lambda)\ a \models_V \phi_j,\ \phi_j \in Pr(r);\ \exists\, b \in Ch_m(\lambda) : b \not\models_V x_0.$ **(1)**

Выполним сжимающий р-морфизм модели $Ch_m(\lambda)$, т.е. по-слойно склеиваем все дубли при заданном означивании – элементы, означивания и множества достижимых из них элементов совпадают. Т.к. р-морфизм сохраняет истинность формул, то на полученной модели правило r опровергается: т.е. выражение (1) выполняется. Для упрощения и сокращения записи полученную модель также будем обозначать как $Ch_m(\lambda)$.

Рассмотрим теперь локальную компоненту $K(b)$ элемента $b\ :\ b \not\models_V x_0$. Данная локальная компонента $K(b)$ при заданном означивании V является открытой подмоделью модели $Ch_m(\lambda)$. Следовательно, по свойству открытой подмодели, правило r опровергается на ней.

Пусть множество Z – это множество членов посылки правила, имеющих непустое множество истинности на $K(b)$, т.е. $Z := \{\phi \in Pr(r) : V(\phi) \cap K(b) \neq \emptyset\}$. Покажем, что выполняется :

Лемма 3.2. $\langle K(b), V\rangle \cong \langle K_c(\phi_0), S\rangle \subseteq \mathfrak{M}(r, Z)$

Доказательство. (I) Возьмем произвольный элемент $t \in S_1(K(b))$ и по условию выполняется $t\ \models_V\ \phi_t,\ \phi_t \in Pr(r)$. Такая формула ϕ_t из посылки уникальна для данного элемента (т.е другие формулы из посылки правила на нем не могут быть истинны по определению данной формулы). Из расположения элемента t и иррефлексивности отношения следует :

$$\Diamond t = \{x : t \models_V \Diamond x\} = \theta_2(\phi_t) = \emptyset. \quad (*)$$

Если $\phi_t \in S_1(K_c(\phi_0))$, то изоморфизм $\langle t, V\rangle \cong \langle \phi_t, S\rangle$ доказан. Если же элемент ϕ_t имеет глубину строго больше 1, то из него достижим по отношению R некоторый элемент первого слоя $\phi_a \in S_1(K_c(\phi_0))$. Тогда справедливо $\theta_2(\phi_a) = \emptyset$. Отсюда по определению отношения R на модели $\mathfrak{M}(r, Z)$ заключаем $\theta_2(\phi_a) \subset \theta_2(\phi_t) = \emptyset$. Противоречие.

Обратно, пусть $\phi_t \in S_1(K_c(\phi_0))$. По определению множества Z существует элемент $t \in K_c(b)$ такой, что $t \models_V \phi_t$. Если $t \in S_1(K_c(b))$, то выполняется $(*)$ и изоморфизм сгустков $C(t)$ и $C(\phi_t)$ доказан. Если же элемент t имеет глубину строго больше 1, то из него достижим по отношению R некоторый элемент первого слоя $a \in S_1(K(b))$. Тогда справедливо $\theta_2(\phi_a) = \emptyset$ и значит выполняется $\theta_2(\phi_a) \subset \theta_2(\phi_t) = \emptyset$. Противоречие.

Таким образом, выполняется $S_1(K_c(b)) \cong S_1(K_c(\phi_0))$ в силу произвольности выбора элемента t (ϕ_t).

(II) Пусть для элементов глубины не более k утверждение доказано. Возьмем элемент $t \in S_{k+1}(K(b))$ & $t \models_V \phi_t$. И пусть данный элемент является ко-накрытием некоторой антицепи $\{b_1, b_2 \dots b_n\}^R$ & $\forall i$ $b_i \models_V \phi_i, \phi_i \in Pr(r)$. По индуктивной гипотезе выполняется

$$\{b_1, b_2 \dots b_n\}^R \cong \{\phi_1, \phi_2 \dots \phi_n\}^R \subseteq S_{\leq k}(K_c(\phi_0)).$$

Из расположения данного элемента заключаем :

$$\Diamond t = \{x : t \models_V \Diamond x\} = \bigcup_{b_i} \Diamond b_i = \bigcup_i \theta_1(\phi_i) \cup \bigcup_i \theta_2(\phi_i) = \theta_2(\phi_t);$$

$$\neg\Diamond t = \{x : t \models_V \neg\Diamond x\} = \bigcap_{b_i} \neg\Diamond b_i = \bigcap_i \theta_3(\phi_i) \cap \bigcap_i \theta_4(\phi_i) = \theta_4(\phi_t).$$

Отсюда сразу следует, что элемент ϕ_t является ко-накрытием для антицепи $\{\phi_1, \phi_2 \dots \phi_n\}^R \subseteq S_{\leq k}(K_c(\phi_0))$.

Обратно, пусть элемент $\phi_t \in S_{k+1}(K_c(\phi_0))$ есть ко-накрытие для некоторой антицепи $\{\phi_1, \dots \phi_n\}^R$ глубины не более k во фрейме $K_c(\phi_0)$. По индуктивной гипотезе найдется антицепь элементов

$$\{b_1, b_2 \dots b_n\} \subseteq S_{\leq k}(K(b)) \ \& \ \forall i \ b_i \models_V \phi_i, \phi_i \in Pr(r),$$

такая, что $\{b_1, b_2 \dots b_n\}^R \cong \{\phi_1, \phi_2 \dots \phi_n\}^R \subseteq S_{\leq k}(K_c(\phi_0))$.

По определению множества Z существует элемент $t \in K(b)$ такой, что $t \models_V \phi_t$. Покажем, что данный элемент является ко-накрытием для антицепи $\{b_1, b_2 \dots b_n\} \subseteq S_{\leq k}(K(b))$. Предположим противное. Пусть элемент t является ко-накрытием для антицепи $\{z_1, \dots z_k\}$ и выполняется $\{b_1, b_2 \dots b_n\}^R \ncong \{z_1, \dots z_k\}^R$. По доказанному ранее найдется антицепь элементов модели $\mathfrak{M}(r, Z)$ такая, что выполняется $\{z_1, z_2 \dots z_k\}^R \cong \{\psi_1, \psi_2 \dots \psi_n\}^R \subseteq S_{\leq k}(K_c(\phi_0))$.

Но тогда не сложно показать, что элемент ϕ_t будет являться ко-накрытием двух различных антицепей в модели $\mathfrak{M}(r, Z)$, т.к.

$$\bigcup_i \theta_1(\phi_i) \cup \bigcup_i \theta_2(\phi_i) \neq \bigcup_j \theta_1(\psi_j) \cup \bigcup_j \theta_2(\psi_j) \quad \text{или}$$

$$\bigcap_i \theta_3(\phi_i) \cap \bigcap_i \theta_4(\phi_i) \neq \bigcap_j \theta_3(\psi_j) \cap \bigcap_j \theta_4(\psi_j),$$

что невозможно по построению данной модели. Противоречие.

Таким образом, по индукции получаем $\langle K(b), V\rangle \cong \langle K_c(\phi_0), S\rangle$. Утверждение доказано.

$\square$

Продолжим доказательство теоремы 3.2. По условию теоремы во фрейме локальной компоненты $K_c(\phi_0) \sqsubseteq \mathfrak{M}(r, Z)$ существуют антицепи $\mathcal{A}$, $\mathcal{Y}$ и элемент ϕ_y с указанными свойствами. По определению множества Z и доказанному выше, в локальной компоненте $K(b)$ существуют элементы (антицепи), такие что:

$$\{a_1, \dots a_n\}^R \cong \mathcal{A}^R \ \& \ \{y_1, \dots y_k\}^R \cong \mathcal{Y}^R \ \& \ y_0^R \cong \phi_y^R = \{\phi_y\} \cup \mathcal{Y}^R.$$

По условию теоремы существует р-морфизм $\mathcal{Y}^R$ на $\mathcal{A}^R$. Следовательно, существует р-морфизм подфрейма $\{y_1, \dots y_k\}^R$ на подфрейм $\{a_1, \dots a_n\}^R$. Элемент $y_0 \in K(b)$ является ко-накрытием для антицепи $\{y_1, \dots y_k\}$ и порождает как корень λ-фрейм. Т.к. р-морфизм сохраняет истинность формул, то образ $e = f(y_0)$ этого элемента y_0 при указанном р-морфизме также является ко-накрытием для антицепи $\mathcal{A} = \{a_1, \dots a_n\}$ в $K(b)$. По исходному предположению, на элементе e должна быть истинна некоторая формула $\phi_e \in \mathfrak{M}(r, Z)$ из посылки правила.

В силу расположения элемента e для формулы ϕ_e должно выполняться:

$$\theta_2(\phi_e) = \bigcup_{\phi_i \in \mathcal{A}} \theta_1(\phi_i) \cup \bigcup_{\phi_i \in \mathcal{A}} \theta_2(\phi_i); \ \& \ \theta_4(\phi_e) = \bigcap_{\phi_i \in \mathcal{A}} \theta_3(\phi_i) \cap \bigcap_{\phi_i \in \mathcal{A}} \theta_4(\phi_i).$$

Однако, по условию теоремы такой формулы не существует. Противоречие. Теорема 3.2 доказана. $\square$

В обратную сторону :

Теорема 3.3. *Пусть модель $\mathfrak{M}(r, X)$ удовлетворяет свойствам (1) – (4). Пусть для некоторого непустого множества дизъюнктов Z : $\phi_0^R \sqsubseteq Z \subseteq X$ для любой нетривиальной антицепи $\mathcal{A} \subseteq K_c(\phi_0) \subseteq \mathfrak{M}(r, Z)$ выполняется :*

(1) либо $\mathcal{A}$ имеет ко-накрытие в $K_c(\phi_0) \sqsubseteq \mathfrak{M}(r, X)$, т.е. выполняется: $\exists \phi_a \in \mathfrak{M}(r, Z)$

$$\theta_2(\phi_e) = \bigcup_{\phi_i \in \mathcal{A}} \theta_1(\phi_i) \cup \bigcup_{\phi_i \in \mathcal{A}} \theta_2(\phi_i); \ \& \ \theta_4(\phi_e) = \bigcap_{\phi_i \in \mathcal{A}} \theta_3(\phi_i) \cap \bigcap_{\phi_i \in \mathcal{A}} \theta_4(\phi_i).$$

(2) либо для каждой антицепи $\mathcal{Y} \subseteq K_c(\phi_0)$ выполняется: если $\big(f(\mathcal{Y}^R) = \mathcal{A}^R \& f -$ р-морфизм$)$, то не существует ко-накрытия для антицепи $\mathcal{Y}$ в $K_c(\phi_0)\big)$.

Тогда правило r не допустимо глобально в логике GL.

Доказательство. Конечным фреймом локальной компоненты $K_c(\phi_0)$ породим табличную логику $L = L(K_c(\phi_0))$, расширяющую логику GL. Тогда для некоторого n фрейм $K_c(\phi_0)$ является открытым подфреймом n-характеристической модели $Ch_n(L)$ (см. Proposition 4, с. 8 [14]). По условию теоремы при заданном означивании S правило опровергается на открытой подмодели $K_c(\phi_0) \sqsubseteq Ch_n(L)$. Если доопределим означивание переменных на всем фрейме n-характеристической модели так, чтобы посылка правила была истинной, то опровергнем заданное правило на $Ch_n(L)$, откуда будет следовать его недопустимость в табличной логике L над GL. Для этого определим р-морфизм фрейма n-характеристической модели $Ch_n(L)$ на ее подфрейм $K_c(\phi_0)$. Перенося с помощью данного р-морфизма означивание с $K_c(\phi_0)$ на весь фрейм $Ch_n(L)$, опровергнем заданное правило на n-характеристической модели $Ch_n(L)$.

Определим р-морфизм g на фрейме $Ch_n(L)$ следующим образом.

1) Для всех элементов $x \in K_c(\phi_0) \sqsubseteq Ch_n(L)$ р-морфизм g определим как тождественный: $g(x) = x$.

2) Для всех элементов $z \in S_1(Ch_n(L)) \setminus S_1(K_c(\phi_0))$ р-морфизм g определим как $g(z) = e$, где $e \in S_1(K_c(\phi_0)) \sqsubseteq Ch_n(L)$ некоторый фиксированный элемент, принадлежащий первому слою $S_1(K_c(\phi_0))$.

Таким образом, р-морфизм определен на всем первом слое $Ch_n(L)$.

3) Возьмем произвольный элемент $z \in S_2(Ch_n(L) \setminus K_c(\phi_0))$. По построению n-характеристической модели данный элемент является ко-накрытием для некоторой антицепи элементов $\mathcal{Z} \subset S_1(Ch_n(L))$, на которой р-морфизм уже определен и $g(\mathcal{Z}) \subset S_1(K_c(\phi_0))$.

Т.к. фрейм $K_c(\phi_0)$ порождает логику L, то легко показать, что корневой фрейм $z^R = \{z\} \cup \mathcal{Z}$ является р-морфным образом (при некотором р-морфизме f) корневого подфрейма $\phi_z^R = \{\phi_z\} \cup \mathcal{Y} \sqsubseteq K_c(\phi_0)$. Следовательно, композиция р-морфизмов f и g является р-морфизмом пофрейма $\mathcal{Y}^R \sqsubseteq K_c(\phi_0)$ на подфрейм $\mathcal{Z}^R \sqsubseteq K_c(\phi_0)$ и антицепь $\mathcal{Y}$ имеет ко-накрытие в $K_c(\phi_0)$.

Если антицепь $\mathcal{A} = g(\mathcal{Z})$ имеет ко-накрытие $t \in S_2(Ch_n(L))$, то определяем $g(z) = t$. В противном случае приходим к противоречию. Действительно, в таком случае условие (1) не выполняется. Условие (2) также не выполняется, т.к. для некоторого р-морфизма выполняется $\mathcal{A}^R = g(f(\mathcal{Y}^R))$ и антицепь $\mathcal{Y}$ имеет ко-накрытие ϕ_z в $K_c(\phi_0)$. Следовательно, антицепь $\mathcal{A} = g(\mathcal{Z})$ имеет ко-накрытие в локальной компоненте $K_c(\phi_0)$ и в силу произвольности выбора элемента р-морфизм определен на всем втором слое $S_2(Ch_n(L))$.

4) Предположим, что для всех элементов $z \in S_{\leq k}(Ch_n(L)$ р-морфизм уже определен и $g(S_{\leq k}(Ch_n(L)) \sqsubseteq S_{\leq k}(K_c(\phi_0))$.

Возьмем произвольный элемент $z \in S_{k+1}(Ch_n(L) \setminus K_c(\phi_0))$. По построению модели данный элемент является ко-накрытием для некоторой антицепи элементов $\mathcal{Z} \subset S_{\leq k}(Ch_n(L))$, на которой р-морфизм уже определен и $g(\mathcal{Z}^R) \sqsubseteq S_{\leq k}(K_c(\phi_0))$. Как и ранее, можно показать, что корневой фрейм $z^R = \{z\} \cup \mathcal{Z}^R$ является р-морфным образом (при некотором р-морфизме f) корневого подфрейма $\phi_z^R = \{\phi_z\} \cup \mathcal{Y}^R \sqsubseteq K_c(\phi_0)$. Следовательно, композиция р-морфизмов f и g является р-морфизмом подфрейма $\mathcal{Y}^R \sqsubseteq K_c(\phi_0)$ на подфрейм $\mathcal{Z}^R$.

Если антицепь $\mathcal{A} = g(\mathcal{Z})$ имеет ко-накрытие $t \in S_{k+1}(Ch_n(L))$, то определяем $g(z) = t$. В противном случае (если нет такого ко-накрытия t) приходим к противоречию. Действительно, в таком случае условие (1) не выполняется. Условие (2) также не выполняется, т.к. для некоторого р-морфизма выполняется $\mathcal{A}^R = g(f(\mathcal{Y})^R)$ и антицепь $\mathcal{Y}$ имеет ко-накрытие ϕ_z в $K_c(\phi_0)$.

Таким образом, определили р-морфизм моделей :

$$g : \langle Ch_n(L), g^{-1}(S)\rangle \ \to_g \ \langle K_c(\phi_0), S\rangle,$$

сохраняющий истинность формул. Теперь остается заметить, что перенося с помощью р-морфизма g означивание S с открытой подмодели $K_c(\phi_0) \sqsubseteq Ch_n(L)$ (на которой правило r опровергается) опровергнем данное правило на n-характеристической модели $Ch_n(L)$ при некотором формульном означивании. Следовательно, правило r не допустимо в данной табличной логике $L(K_c(\phi_0))(\supseteq GL)$, и значит, не является глобально допустимым в логике GL. □

4 Разрешимость глобальной допустимости в логике GL.

Основной результат сформулируем в следующей теореме:

Теорема 4.1. *Проблема глобальной допустимости правила r в логике GL разрешима.*

Доказательство. На основе полученных ранее результатов можно предложить следующий алгоритм проверки глобальной допустимости в логике GL заданного правила r в редуцированной форме. Рассмотрим произвольное правило r (в редуцированой форме) и его конечную GL-модель модель $\mathfrak{M}(r, X)$. Для произвольного правила построение его редуцированной формы и построение модели $\mathfrak{M}(r, X)$ осуществляется за конечное число шагов. Выполним последовательно проверку (также за конечное число шагов) следующих условий (свойств модели $\mathfrak{M}(r, X)$).

(1) Проверяем условие: $\exists\, \phi^1 \in S_1(\mathfrak{M}(r, X)) \ : \ \theta_1(\phi^1) = \emptyset$. Если такого элемента не существует, то по лемме 3.1 правило r глобально допустимо в логике GL. Далее рассматриваем модели $\mathfrak{M}(r, X)$ для которых условие (1) выполняется. Переходим к проверке пункта 2).

(2) Проверяем условие: $\exists\, \phi_0 \in \mathfrak{M}(r, X) \ : (\ x_0 \notin \theta_1(\phi_0) \ \&\ \theta_2(\phi_0) \neq \emptyset)$. Если не выполнен первый конъюнкт, то по лемме 3.1 правило r глобально допустимо в логике GL. Если выполнена первая часть условия, но не выполняется вторая – не допустимо глобально в логике GL. Поэтому далее рассматриваем модели $\mathfrak{M}(r, X)$ в которых условия (1)-(2) выполняются. Переходим к проверке пункта 3).

(3) Проверяем условие: посылка правила r истинна на $K_c(\phi_0)$ (т.е. $\forall \phi \in K_c(\phi_0)$ $(\phi \models_S \phi)$). Если нет, то по лемме 3.1 правило r глобально допустимо в логике GL. Поэтому далее рассматриваем модели $\mathfrak{M}(r, X)$, в которых правило r опровергается на локальной компоненте $K_c(\phi_0)$, т.е. условия (1)-(3) выполняются. Переходим к проверке пункта 4).

(4) Проверяем условие: локальная компонента $K_c(\phi_0)$ не насыщенна по ко-накрытиям, т.е. существует нетривиальная антицепь без ко-накрытия. Если условие не выполнено (т.е. локальная компонента насыщенна по ко-накрытиям до глубины элемента ϕ_0), то, при выполнении условий (1)–(3), правило r не допустимо глобально в логике GL по лемме 3.1. Поэтому далее рассматриваем модели $\mathfrak{M}(r, X)$, в которых условия (1)-(4) выполняются. Переходим к проверке пункта 5).

(5) Если модель $\mathfrak{M}(r, X)$ удовлетворяет условиям $(1) - (4)$ и удовлетворяет также условиям теоремы 3.2 , то правило r глобально допустимо в логике GL и проверка закончена. Иначе переходим к проверке пункта 6).

(6) Если модель $\mathfrak{M}(r, X)$ удовлетворяет условиям $(1) - (4)$ и удовлетворяет также условиям теоремы 3.3, то правило r не допустимо глобально в логике GL. Проверка закончена.

В результате, для произвольного правила r в редуцированной форме за конечное число шагов мы можем проверить его глобальную допустимость или недопустимость в логике GL. $\square$

5 Заключение

В статье исследуются правила вывода, глобально допустимые в логике GL (т. е. допустимые сразу во всех финитно аппроксимируемых расширениях GL). Для правил в редуцированной форме, модель которых удовлетворяет некоторым естественным свойствам, получено необходимое и достаточное условие глобальной допустимости в логике GL. На основе полученного описания предложен алгоритм проверки глобальной допустимости произвольного правила в редуцированной форме. Таким образом, проблема глобальной допустимости в логике GL разрешима. В связи с этим возникает вопрос о наличии (описании) конечного или явного базиса для глобально допустимых правил для $S4$ и большинства базовых логик ($Grz, GL, S4.1$ и тд.)

References

[1] Lorenzen P.. *Einfung in Operative Logik und Mathematik*, Berlin – Gottingen – Heidelberg, 1955.

[2] Fridman H. One hundred and two problems in mathematical logic. Journal of Symbolic Logic, 40:3 (1975), 113 – 130.

[3] Harrop R. Concerning Formulas of the Types $A \to B \vee C$, $A \to \exists x B(x)$. Journal of Symbolic Logic, 25:1 (1960), 27 – 32.

[4] Mints G.E. Derivability of Admissible Rules. J. of Soviet Mathematics, V.6, 1976, No.4, pp. 417 – 421.

[5] Port J. The deducibilities of S5. J. of Phylosophical Logic, 10:1 (1981), 409 – 422.

[6] Rybakov V.V. A Critarion for Admissibility of Rules in Modal System S4 and the Intuitionistic Logic. Algebra and Logic, V.23, 1984, No. 5, pp. 369 – 384 (Eng. transletion).

[7] Rybakov V.V. Admissibility of logical inference rules, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier Sci. Publ.*, New-York – Amsterdam, 136 (1997).

[8] Rybakov V.V. An explicit basis for rules admissible in modal system S4. Bulletin of the Section of Logic, 28 (3) : 135–144, 1999.

[9] Iemhoff R. On the admissible rules of Intuitionistic Propositional Logic. Journal of Symbolic Logic, 2001, vol. 66, no. 2. pp. 281–294.

[10] Jeřábek E. Admissible rules of modal logics. Journal of Logic and Computation. 2005, vol. 15, no. 4. pp. 411–431.

[11] Jeřábek E. Independent bases of admissible rules. Logic Journal of the IGPL, 2005, vol. 16, no. 3. pp. 249–267.

[12] Rimatskiy V.V. An explixit basis for WCP-globally admissible inference rules. Algebra and Logic. 2023. vol. 62, no. 2. C. 149 – 165. DOI 10.1007/s10469-024-09733-6

[13] Iemhoff R. A(nother) characterization of Intuitionistic Propositional Logic. Annals of Pure and Applied Logic, 113:1-3 (2001), 161 – 173.

[14] Rimatskiy V.V. Description of modal logics which enjoy co-cover property. Siberian Electronic Mathematical Reports, Vol. 19, Is. 1, p. 316–325.

[15] Rybakov V. V., Rimatski V. V. A note on Globally admissible inference rules for modal and superintuitionistic logics. Bulletin of the Section of Logic. 2005. Vol. 34, № 2. P. 1–7.

[16] Rimatskiy V.V., Kiyatkin V.R. Independent bases for admissible rules of pretabular modal logic and its extensions. Siberian Electronic Mathematical Reports, 2013, vol. 10, pp. 79–89.(in Russian) http://semr.math.nsc.ru.

[17] Rimatskiy V. V. Globally Admissible Inference Rules. The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, 2022, vol. 42, pp. 138–160. (in Russian) https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.138

[18] Rimatskiy V. V. Basis of Globally Admissible Rules for Logic S4. The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, 2024, vol. 50, pp. 152–169. (in Russian) https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.152

Сибирский Федеральный Университет, Красноярск
E-mail address: Gemmeny@rambler.ru

Vitaliy V. Rimatskiy
Siberian Federal University,
pr. Svobodnii, 79,
Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation
E-mail address: Gemmeny@rambler.ru