

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ
КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ДЛЯ
УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

С.И. МАРКОВ , Н.Б. ИТКИНА 

Представлено С.И. МАРКОВЫМ

Abstract: Mathematical models of transport processes are based on conservation laws which are mathematically formalized by hyperbolic type equations. It is required to coordinate the size of steps on the spatial and temporal grid when approximating the transport equations by grid methods is used. Compliance with this restriction can lead to an explosive increase in the size of the discrete analog of the problem, and iterations over time layers. To discretize mathematical models in complexly constructed computational domains, finite element method computational schemes with finite-difference approximation of time-variable derivatives are applied. The Lagrangian finite element method is not conservative, so under certain conditions the numerical solution becomes unstable. Different schemes of stabilized conforming and non-conforming finite element methods are used to solve this problem. However, restrictions on the choice of grid sizes remain. In this paper, we extend the non-conforming finite element approximation of the transport equation in both space and time. This strategy

MARKOV, S.I., ITKINA, N.B., COMPARATIVE ANALYSIS OF SPATIAL AND TIME GRID
FINITE ELEMENT APPROXIMATIONS FOR THE TRANSPORT EQUATION.

© 2025 МАРКОВ С.И., ИТКИНА Н.Б.

Работа выполнена в рамках государственного задания FWZZ-2022-0030.

Поступила 2025 г., опубликована 2025 г.

allows us to fulfill the conditions of local conservativity, and to circumvent the restrictions on the choice of the grid step. A comparative analysis of non-conforming finite element methods in terms of accuracy and computational resource consumption is given, considering the example of problems with analytical solutions and approximated to real ones.

Keywords: transport equation, non-conforming finite element approximation, accuracy analysis.

1 Введение

Гиперболические системы уравнений, выражающие законы сохранения, – это фундаментальные математические модели, используемые для описания различных физических явлений, в том числе процессов переноса. Одна из особенностей гиперболических уравнений – это существование разрывных решений независимо от гладкости начальных условий. Наличие разрывов усложняет как аналитическое исследование, так и компьютерное моделирование процесса переноса, что определяет актуальность и практическую ценность инновационных численных методов для получения релевантного дискретного аналога математических моделей, построенных на основе законов сохранения.

Общность подхода при построении математических моделей на основе законов сохранения порождает обширный класс прикладных задач, таких как процесс распространения вибраций и звуковых волн (биомедицина, гидролокация, сейсмология), процессы массопереноса и многофазной фильтрации в пористой среде (нефтегазовая геология, геофизика).

Построение дискретных аналогов остаётся актуальной задачей в контексте разработки высокоточных методов численной дискретизации. В этой широкой области применения всё большее распространение получают схемы высокого порядка в первую очередь благодаря их способности обеспечивать более высокую точность в расчёте на степень свободы, что является преимуществом в контексте моделирования многомасштабных процессов. Для моделирования явлений переноса при решении прикладных задач применяются различные численные методы высокого порядка, причём эти схемы обычно относятся к общим классам методов конечных разностей (МКР), конечных объемов (МКО) и конечных элементов (МКЭ).

Классические численные методы решения задач переноса основаны на принципах дискретизации по времени (например, по МКР: схемы типа Ньюмарка, Лакса-Вендроффа или Рунге-Кутты) в сочетании с подходящей пространственной дискретизацией. Можно выделить два основных семейства методов: метод прямых [1] (первый этап – пространственная дискретизация, второй этап – решение полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений) и метод Рунге [2] (первый этап –

дискретизация по времени, второй этап – решение полученной системы дифференциальных уравнений в частных производных). При реализации этих подходов хорошо зарекомендовали себя схемы ENO и WENO, также различные модификации конечно-элементных схем [3] – [8].

Методы конечных элементов обладают заметными преимуществами при использовании технологий уточнения решения (неструктурированные сетки, локальное повышение порядка базисной системы функций). Разрывный метод Галёркина (DG) [9] и его модификации [10] являются более подходящими для аппроксимации математических моделей процесса переноса (допускается функциональная и геометрическая неконформность), они обладают компактной структурой данных, что позволяет применить технологии на базе современных высокопроизводительных параллельных вычислений [11], [12].

Устойчивость схем методов конечных элементов может нарушиться, если в рассматриваемых физических системах преобладают явления переноса: положительная величина плотности и внутренней энергии в газовой динамике, субсветовая скорость в релятивистской МГД, ограниченные доли массы вещества в многофазных флюидопотоках и т.д. При использовании стандартных численных реализаций не гарантируется, что дискретное решение будет удовлетворять этим ограничениям. Это может привести к физически нерелевантным решениям или к нарушению принципа глобальной регулярности математической модели на дискретном уровне.

Публикации 2020–2025 гг. можно разделить на две группы. Методы на базе подхода Роте: дискретизация типа Рунге-Кутты, Лакса-Вендроффа по времени и модифицированные DG-схемы по пространственным переменным [13] – [15]. Методы конечно-элементной дискретизации пространственно-временной области: конечно-элементная интерполяция по времени и пространству, реализация DG-метода на пространственно-временном четырёхмерном конечном элементе [16] – [19].

Применение конечно-элементной дискретизации в пространственно-временной области для решения гиперболических уравнений – новый способ построения релевантного дискретного аналога, направленный на преодоление ограничений классических конечно-элементных схем, таких как проблемы устойчивости и сходимости. Пространственно-временные конечно-элементные схемы можно разделить на два класса в зависимости от того, какой тип сетки они используют: неструктурированную симплициальную или структурированную призматическую.

Первый подход допускает дискретизацию во времени и пространстве одновременно, поскольку временная область рассматривается как дополнительное измерение, и $(d + 1)$ -мерное разбиение может быть построено непосредственно. С одной стороны, этот подход стал довольно популярным и широко используется для задач с подвижными границами, предполагающих деформирование и/или перемещение сеток. В этом контексте алгоритм “установки палатки” [20] используется для

построения симплициальной пространственно-временной сетки, на которой могут быть использованы различные стратегии аппроксимации [21] – [24]. С другой стороны, несмотря на прогресс в создании инновационных алгоритмов построения неструктурированных симплициальных пространственно-временных сеток [25], применение этих алгоритмов для решения трёхмерных задач, область моделирования которых состоит из четырёхмерных многогранников, достаточно проблематично. По этой причине пространственно-временные структурированные сетки по-прежнему предпочтительнее для трёхмерных приложений. Призматические четырёхмерные сетки могут быть получены путём вытягивания во времени неструктурированных пространственных. Аппроксимации, построенные для таких сеток, менее гибки, чем аппроксимации, выполненные с помощью универсальных многогранников.

Анализируя свойства вычислительных схем с позиции дискретизации по времени, можно рассматривать следующие их модификации: построенные на принципах непрерывного по времени пространственно-временного метода Галёркина (TcG) и разрывного по времени метода Галёркина (TdG). В TcG схемах решение предполагается непрерывным по времени, реализация TcG требует больших вычислительных затрат, поскольку необходимо дискретизировать всю временную область [26], [27].

В схемах TdG временной интервал делится на независимые слэбы, и между ними допускаются временные разрывы или скачки. Метод конечных элементов применяется на каждом временном отрезке, и неизвестные, которые определяются на одном временном отрезке, служат исходными данными для следующего. Данный метод более эффективен, чем TcG, поскольку позволяет получить устойчивые аппроксимации. В литературе можно найти различные формулировки метода конечных элементов TdG, которые основаны на переходе к смешанной вариационной формулировке исходной задачи в виде системы уравнений первого порядка [21], [28] или непосредственно применяющиеся к гиперболической системе второго порядка, с использованием метода наименьших квадратов Галёркина (GLS) для стабилизации численной схемы [29] – [30].

Также в рамках пространственно-временных аппроксимаций высокого порядка для гиперболических уравнений используются методы, основанные на решении обобщённой задачи Римана (GRP), ADER-схемы и их варианты [31].

При аналитическом анализе публикаций было установлено, что реализация пространственно-временных неконформных конечно-элементных аппроксимаций для уравнения переноса в основном представлена для одномерных и в редких случаях для двумерных задач. В статьях не представлены технологии построения пространственно-временного базиса, схем численного интегрирования, а также учёта начальных и краевых условий первого рода. В данной статье мы расширяем возможности неконформной конечно-элементной аппроксимации уравнения переноса

как по пространству, так и по времени. Такая стратегия позволяет выполнить условия локальной консервативности и обойти ограничения на выбор сеточного шага. На примере трёхмерных задач, имеющих аналитическое решение и приближенных к реальным, приводится сравнительный анализ неконформных методов конечных элементов по точности и затратам вычислительных ресурсов, а также обсуждаются свойства дискретных аналогов решаемой задачи.

2 Постановка задачи

Процесс конвективного переноса в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей $\partial\Omega$ описывается дифференциальным уравнением первого порядка:

$$u_t + \nabla \cdot (\mathbf{v}u) = f(x, t), \quad (1)$$

где решение задачи u и источник $f(x, t)$ – функции времени, \mathbf{v} – скорость конвективного переноса. Уравнение (1) дополняется начальными и краевыми условиями Дирихле:

$$u(x, 0) = u_0, \quad (2)$$

$$u|_{\Gamma_{in}} = u_D, \quad (3)$$

где $\Gamma_{in} \subset \partial\Omega$ – внешняя граница.

В соответствии с постановкой задачи вместо условий Дирихле (3) могут быть использованы условия Неймана:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}u)|_{\Gamma_{in}} = h, \quad (4)$$

где \mathbf{n} – вектор внешней нормали к Γ_{in} .

Математическая модель (1) – (3) описывает различные физические процессы: в задаче о многофазной фильтрации функция u интерпретируется как функция насыщенности, в задачах о массопереносе – как концентрация вещества и т.д.

3 Функциональные пространства

На Ω рассмотрим непересекающиеся множества K_i – конечные элементы, объединение которых назовём конечно-элементной сеткой $M_h(\Omega) = \cup_i K_i$. Обозначим через $\mathfrak{S}_m(K_i)$ локальное пространство полиномов степени m .

Пусть нестационарный процесс переноса протекает на временном отрезке $[0, T]$. Введём сеточное разбиение данного отрезка и определим объединение подмножеств временных слоёв $I = \cup_n I_n = \cup_n [t_n, t_{n+1}]$. Слоём будем называть множество $Q_i^n = K_i \times I_n$ с локальным пространством $\mathfrak{S}_m(Q_i^n)$ полиномов степени m . На множествах $M_h(\Omega) = \cup_i K_i$ и $Q^n = \cup_i Q_i^n$ определим дискретные функциональные пространства для

задачи (1) – (3):

$$V_0^h = \left\{ v^h \mid v^h \in L_2(\Omega) : v^h \in \mathfrak{S}_m(K_i) \forall K_i \in M_h(\Omega), v^h|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad (5)$$

$$W_{t,0}^h = \left\{ w^h \mid w^h \in L_2(Q^n) : w^h \in \mathfrak{S}_m(Q_i^n) \forall Q_i^n \in Q^n, w^h|_{\partial\Omega} = 0 \right\}. \quad (6)$$

Решение задачи (1) – (3) представим в виде конечно-элементного интерполянта, принадлежащего на каждом слэбе Q_i^n аффинному многообразию $W_{t,0}^h + \{u_0\} + \{u_D\}$:

$$u^h = \sum_k \alpha_k w_k^h(x, t), w_k^h(x, t) \in W_{t,0}^h. \quad (7)$$

Алгоритм учёта краевого условия Дирихле (3) будет представлен ниже.

4 Полиномиальный базис

Приведём пример построения локального полиномиального конформного иерархического базиса пространства H^1 . Для более глубокого понимания приведённой технологии авторы рекомендуют обратиться к монографии [32]. На рис. 1 показан тетраэдральный элемент K в декартовой системе координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) .

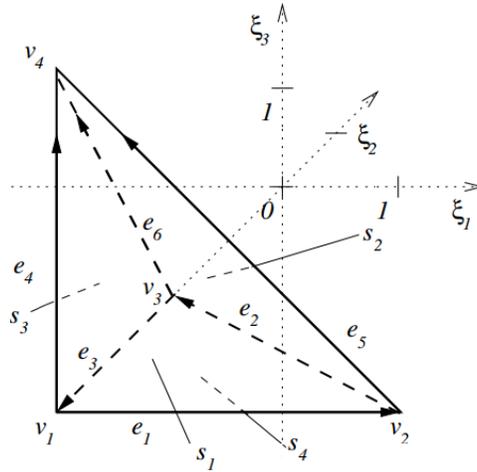


Рис. 1. Тетраэдральный элемент K

Введём аффинные барицентрические координаты на тетраэдре:

$$\lambda_i(x, y, z) = \alpha_1^i x + \alpha_2^i y + \alpha_3^i z + \alpha_4^i, \quad i = \overline{1, 4} \quad (8)$$

такие, что каждая линейная функция $\{\lambda_i, i = \overline{1, 4}\}$ принимает значение 1 в вершине i с координатами (x_i, y_i, z_i) и ноль в остальных вершинах тетраэдра.

Функции (8) образуют линейный базис пространства $H^1(K)$. Функции, ассоциированные с вершинами тетраэдра, называются *vertex*-функциями. След vertex-функций является линейным на тех рёбрах и гранях, которым принадлежат ассоциированные с vertex-функциями вершины.

Рассмотрим на мастер-элементе полиномиальное пространство

$$W_K = \left\{ \begin{array}{l} \varphi \in P_{p^b}(\Omega_k), \varphi|_{s_i} \in P_{p^{s_i}}(s_i), \\ \varphi|_{e_j} \in P_{p^{e_j}}(e_j), i := 1..4, j := 1..6 \end{array} \right\}, \quad (9)$$

где $\varphi \in P_{p^b}(K)$ – ассоциированные с конечным элементом функции порядка p^b (*bubble*-функции), $P_{p^{s_i}}(s_i)$ – ассоциированные с гранью s_i функции порядка p^{s_i} (*face*-функции), $P_{p^{e_j}}(e_j)$ – ассоциированные с ребром e_j функции порядка p^{e_j} (*edge*-функции).

Введём функции Лобатто, которые являются базисными функциями k -го порядка для одномерного мастер-элемента $[-1; 1]$:

$$l_0(x) = \frac{1-x}{2}, \quad l_1(x) = \frac{1+x}{2}, \quad l_k = l_0(x)l_1(x)\phi_{k-2}(x), \quad k \geq 2, \quad (10)$$

функции ядра имеют вид (показаны до 2-го порядка):

$$\phi_0(x) = -2\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \phi_1(x) = -2\sqrt{\frac{5}{2}}x, \quad \phi_2(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(5x^2 - 1) \dots \quad (11)$$

Базисные edge-функции строятся так, чтобы их след на соответствующих рёбрах совпадал с поведением функций Лобатто и принимал нулевое значение на других рёбрах. Пусть ребро e_j лежит между вершинами v_{j_1} и v_{j_2} , тогда edge-функция, ассоциированная с ребром e_j , определяется как:

$$\varphi_k^{e_j} = \lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\phi_{k-2}(\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2}), \quad 2 \leq k \leq p^{e_j}. \quad (12)$$

Face-функции имеют ненулевой след только на той грани, с которой они ассоциируются. След face-функции совпадает с bubble-функцией на треугольнике. Пусть вершины v_{i_1} , v_{i_2} , v_{i_3} образуют грань S_i , и индексы упорядочены $i_1 < i_2 < i_3$. Тогда face-функция, ассоциированная с гранью S_i , имеет вид:

$$\varphi_{n_1, n_2}^{S_i} = \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\lambda_{i_3}\phi_{n_1-1}(\lambda_{i_2} - \lambda_{i_1})\phi_{n_2-1}(\lambda_{i_1} - \lambda_{i_3}), \quad (13)$$

где $1 \leq n_1, n_2; n_1 + n_2 \leq p^{S_i} - 1$.

Bubble-функции, которые ассоциированы только с конечным элементом и имеют нулевой след на всех гранях тетраэдра, образуют базис 4-го порядка:

$$\varphi_{n_1, n_2, n_3}^b = \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}^{n_1}\lambda_{i_3}^{n_2}\lambda_{i_4}^{n_3}, \quad (14)$$

где $1 \leq n_1, n_2, n_3; n_1 + n_2 + n_3 \leq p^b - 1$.

Таблица 1 отражает структуру иерархического базиса конформного пространства H^1 на тетраэдре.

Из таблицы 1 следует условие минимума для конформного пространства H^1 : порядки базисных функций, ассоциированных с рёбрами, гранями и элементом должны быть упорядочены $p^{e_j} < p^{S_i} < p^b$ [32].

ТАБЛИЦА 1. Иерархический базис пространства H^1 на тетраэдре

Тип функции	Порядок	Число степеней свободы	Число носителей
Vertex	≥ 1	1	4
Edge	$p^{e_j} \geq 2$	$p^{e_j} - 1$	6
Face	$p^{S_i} \geq 3$	$(p^{S_i} - 2)(p^{S_i} - 1) / 2$	4
Bubble	$p^b \geq 4$	$(p^b - 3)(p^b - 2)(p^b - 1) / 6$	1

На рис. 2 показаны edge-функции (12) пространства H^1 для ребра тетраэдра с вершинами $v_1 = (1, 0, 0)$ и $v_2 = (0, 1, 0)$.

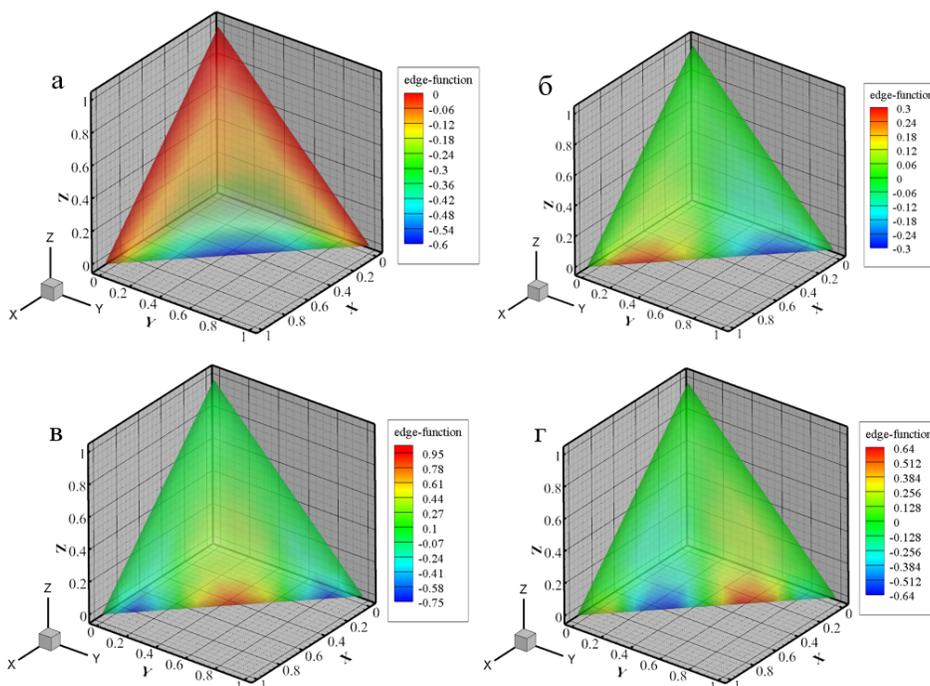


Рис. 2. Edge-функции 2-го порядка $\varphi_2^{e_j}$ (а), 3-го порядка $\varphi_3^{e_j}$ (б), 4-го порядка $\varphi_4^{e_j}$ (в) и 5-го порядка $\varphi_5^{e_j}$ (г)

На рис. 3 показаны face-функции (13) пространства H^1 , ассоциированные с гранью, которая содержит точки тетраэдра $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,1)$. Функция $\varphi_{1,1}^{S_i}$ вместе с edge-функциями (12) при $p^{e_j} < 3$ образуют кубический базис. Функции $\varphi_{1,2}^{S_i}$ и $\varphi_{2,1}^{S_i}$ используются при построении базиса 4-го порядка.

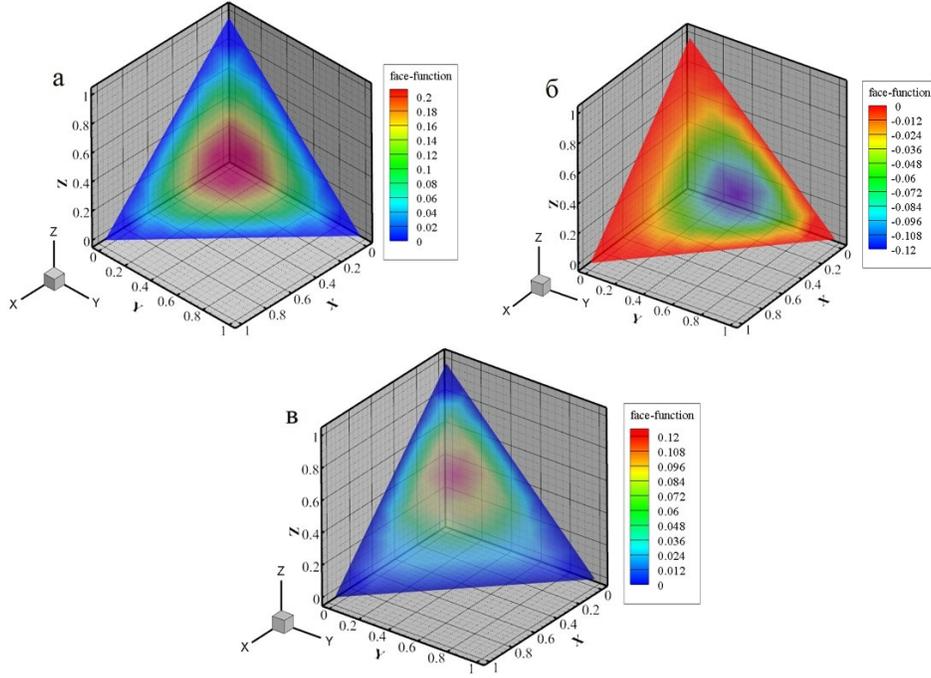


Рис. 3. Фасе-функции 3-го порядка $\varphi_{1,1}^{S_i}$ (а), 4-го порядка $\varphi_{1,2}^{S_i}$ (б) и $\varphi_{2,1}^{S_i}$ (в)

Для построения пространственно-временного базиса множества $Q = \Omega \times [0, T]$ достаточно найти тензорное произведение построенного множества пространственных полиномиальных функций H^1 и множества функций Лобатто (10). Определим базис первого порядка по времени для одномерного мастер-элемента $[-1; 1]$ в виде:

$$l_0(\eta) = \frac{1-\eta}{2}, \quad l_1(\eta) = \frac{1+\eta}{2}, \quad (15)$$

где $\eta = \frac{2(t-t_n)}{t_{n+1}-t_n}$, t – координата времени.

Тогда базис первого порядка локального пространства $Q_K = K \times [t_{n-1}, t_n]$ определяется по формулам:

$$\begin{aligned} w_{i,0}(x, \eta) &= \lambda_i(x) l_0(\eta), \quad i = \overline{1, 4}, \\ w_{i,1}(x, \eta) &= \lambda_i(x) l_1(\eta), \quad i = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (16)$$

Аналогично строятся функции высокого порядка.

5 Схема численного интегрирования

Пусть функция $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на $\tilde{Q}_K = K \times [t_n, t_{n+1}]$, K – выпуклая область. Определим квадратурную формулу Гаусса для интеграла от функции f по области \tilde{Q}_K :

$$\iint_{\tilde{Q}_K} f(x, t) dK dt \approx \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} f(\xi_{i,k}), \quad (17)$$

где $\alpha_{i,k}$ и $\xi_{i,k}$ – весовые коэффициенты и узлы квадратурной формулы. Каждый узел $\xi_{i,k}$ – точка четырёхмерного пространства.

В соответствии с введённым полиномиальным базисом (16) будем полагать, что $f(x, t) = \psi(x) \chi(t)$ и $\iint_{Q_K} f(x, t) dK dt = \int_K \psi(x) dK \int_{t_{n-1}}^{t_n} \chi(t) dt$, тогда

$$\iint_{Q_K} f(x, t) dK dt \approx \sum_{i=1}^N a_i f(\tilde{x}_i) \cdot \sum_{k=1}^n b_k f(\theta_k), \quad (18)$$

где a_i и \tilde{x}_i – весовые коэффициенты и узлы любой квадратурной формулы Гаусса для численного интегрирования в области K , b_k и θ_k – весовые коэффициенты и узлы любой квадратурной формулы Гаусса для численного интегрирования по отрезку $[t_n, t_{n+1}]$.

Таким образом, в (17) $\alpha_{i,k}$ и $\xi_{i,k}$ – результат тензорных произведений множеств весовых коэффициентов и узлов квадратурных формул для интегрирования выпуклой области K и отрезка $[t_n, t_{n+1}]$.

6 Вариационные формулировки

Рассмотрим конечный элемент (пространственно-временной слэб) $Q_i^n = K_i \times I_n$, где K_i – геометрический носитель (например, тетраэдр), $I_n = [t_n, t_{n+1}]$ – временной слой. Конечно-элементный интерполянт (7) может быть разрывным на объединении слэбов $\bigcup_{i,n} Q_i^n$ как по пространству, так и по времени.

Определим неоднозначную функцию на границах слэбов $u^h(x, t_{\pm}^n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(x, t^n \pm \varepsilon)$. Вариационная формулировка разрывного метода Галёркина во времени (time-DG) для задачи (1) – (3) примет вид: найти $u(x, t) \in W_{t,0}^h + \{u_0\} + \{u_D\}$, что $\forall w(x, t) \in W_{t,0}^h$ выполнено [33]

$$\begin{aligned} & \sum_i \iint_{Q_i^n} \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u^h - f \right) w^h dK_i dt + \\ & + \sum_i \int_{K_i} (u^h(t_+^n) - u^h(t_-^n)) w^h(t_+^n) dK_i = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Пусть $u^h(x_{\pm}, t_{\pm}^n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(x \pm \varepsilon, t^n \pm \varepsilon)$, тогда запишем вариационную формулировку полностью разрывного метода Галёркина (full-DG) для задачи (1) – (3): найти $u(x, t) \in W_{t,0}^h + \{u_0\} + \{u_D\}$, что $\forall w(x, t) \in W_{t,0}^h$

выполнено

$$\begin{aligned} & \sum_i \iint_{Q_i^n} \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u^h - f \right) w^h dK_i dt + \\ & + \sum_i \int_{K_i} (u^h(t_+^n) - u^h(t_-^n)) w^h(t_+^n) dK_i - \\ & - \sum_i \int_{\partial K_i \setminus \Gamma_{in}} (u^h(t_+^n) - u^h(t_-^n)) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} w^h(t_+^n) dS - \\ & - \sum_i \int_{\partial K_i \cap \Gamma_{in}} (u^h(t_+^n) - u_D^h) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} w^h(t_+^n) dS = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Вариационная формулировка стабилизированного разрывного метода Галёркина (stab-time-DG) для задачи (1) – (3): найти $u(x, t) \in W_{t,0}^h + \{u_0\} + \{u_D\}$, что $\forall w(x, t) \in W_{t,0}^h$ выполнено [33]

$$\begin{aligned} & \sum_i \iint_{Q_i^n} \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u^h - f \right) w^h dK_i dt + \\ & + \sum_i \iint_{Q_i^n} \mu \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u^h - f \right) \left(\frac{\partial w^h}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla w^h \right) dK_i dt + \\ & + \sum_i \int_{K_i} (u^h(t_+^n) - u^h(t_-^n)) w^h(t_+^n) dK_i = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Стабилизирующий параметр в (21) вычисляется по следующей формуле [33]:

$$\mu = \left[\left(\frac{2}{\tau} \right)^2 + \left(\frac{2 \|\mathbf{v}\|}{h} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (22)$$

где τ – диаметр слэба, h – диаметр конечного элемента.

В каждой из формулировок (19) – (21) функция $u^h(t_-^n)$ удовлетворяет начальному условию (2) при $n = 0$.

7 Учёт краевых условий Дирихле

В полностью разрывном методе Галёркина (full-DG) учёт краевых условий Дирихле (3) реализуется в слабой форме (20). Для двух других вариационных формулировок представим локально конечно-элементный интерполянт (7) в виде:

$$u^h = u_0^h + u_D^h, \quad u_0^h = \sum_{n=1}^N \alpha_n w_n^h(x, t), \quad u_D^h = \sum_{m=1}^M \beta_m v_m^h(x, t), \quad (23)$$

где u_0^h определён в $K_i \setminus \Gamma_{in}$, u_D^h определён на in , $w_n^h \in H^1(K_i)$, $v_m^h \in L_2(\Gamma_{in})$.

Поскольку для любой функции из $H^1(K_i)$ на поверхности класса $C^1(\partial K_i)$ существует след в $L_2(\partial K_i)$, то имеет место:

$$v_m^h(x, t) = \sum_{n=1}^N \gamma_n \pi w_n^h(x, t), \quad (24)$$

где $\pi : L_2(K_i) \rightarrow L_2(\partial K_i)$ – оператор вложения, линейный, ограниченный и вполне непрерывный.

Определим оператор сужения $\pi_D : L_2(K_i) \rightarrow L_2(\partial K_i \cap \Gamma_{in})$ и выразим интерполянт u_D^h в виде:

$$u_D^h = \sum_{m=1}^M \beta_m \sum_{n=1}^N \gamma_n \pi w_n^h(x, t). \quad (25)$$

Исходя из принципов построения функционального пространства $H^1(K_i)$, можно заметить что функции $v_m^h \in L_2(\Gamma_{in})$ являются сужением функций $w_n^h \in H^1(K_i)$. Координаты разложения в (25) находятся при решении локальной задачи:

$$\|u_D^h - u_D\|_0 = 0. \quad (26)$$

Таким образом, если упорядочить степени свободы в представлении (23) и предварительно определить коэффициенты β_m из решения задачи (26), то система линейных алгебраических уравнений относительно α_n примет вид:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

откуда можно получить дискретный аналог для задачи (1) – (3):

$$A_{11}\alpha = f_1 - A_{12}\beta. \quad (28)$$

Заметим, что матрица A_{11} имеет блочную структуру при использовании базисной системы полиномов $H^1(K_i)$ выше первого порядка. При этом множество коэффициентов β_m должно быть представлено в виде объединения множеств: β_{m_1} – коэффициенты разложения по vertex-функциям, β_{m_2} – коэффициенты разложения по edge-функциям и β_{m_3} – коэффициенты разложения по face-функциям. Данные коэффициенты вычисляются при решении задач:

$$\left\| \sum_{m_s} \beta_{m_s} \sum_{n=1}^N \gamma_n \pi_D w_n^h(x, t) - \left(u_D - \sum_{k < s} \beta_{m_k} \sum_{n=1}^N \gamma_n \pi_D w_n^h(x, t) \right) \right\|_0 = 0, \quad s = \overline{1, 3}. \quad (29)$$

8 Описание вычислительного эксперимента

В данном разделе приводятся результаты вычислительных экспериментов при решении задач, имеющих аналитическое решение и приближенных к реальным. Все вычисления выполнены при использовании CPU AMD Ryzen 9 3950X 16-Core Processor 3.49 GHz. Генерация конечно-элементных тетраэдральных сеток выполнялась средствами открытого программного продукта NGSolve-v6.2.1901. Для решения СЛАУ использовался решатель GMRES(10) с предобуславливателем Якоби.

Рассматривается начально-краевая задача (1) – (3) в расчётной области $[0, 1]^3$ при $u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0.2 \\ 0, & x > 0.2 \end{cases}$ с постоянной скоростью $\mathbf{v} = (1, 0, 0)^T$ и краевым условием Дирихле $u_D = 1$ на поверхности $x = 0$.

За временной отрезок длительностью 1 (с) фронт должен дойти до поверхности $x = 1$ с аналитическим решением $u^* = 1$. Найдём численное решение данной задачи при использовании трёх вариационных формулировок, описанных выше.

9 Анализ устойчивости численного решения

Специфика решаемой задачи – разрывное начальное условие, которое приводит к нефизичным осцилляциям при её решении классическим МКЭ в формулировке Галёркина. Для количественной оценки соотношения величины шагов по пространству и времени используется число Куранта:

$$C = \frac{\|\mathbf{v}\| \tau}{h}, \quad (30)$$

где τ – диаметр слэба (шаг по времени), h – диаметр конечного элемента, \mathbf{v} – скорость переноса.

В таблицах 2 – 4 приводится величина погрешности (в энергетической норме) решения поставленной задачи в зависимости от числа Куранта и методов дискретизации, вариационные формулировки которых были представлены выше. Также рассмотрены разные порядки базисных систем функционального пространства H^1 для построения конечно-элементного интерполянта.

Как можно видеть, точность решения задачи уменьшается при увеличении числа Куранта, особенно это проявляется для разрывного метода Галёркина по времени (time-DG) и полностью разрывного метода Галёркина без стабилизации (full-DG). Таким образом, для вариационных формулировок разрывного метода Галёркина без стабилизации существует ограничение на соотношение сеточных шагов. Увеличение порядка базисных полиномов способствует исправлению ситуации, и точность решения увеличивается на один порядок. Данная стратегия неоптимальна, поскольку приводит к увеличению размера дискретного аналога и, следовательно, к увеличению вычислительных затрат.

Существенный выигрыш по точности даёт применение вычислительной схемы стабилизированного разрывного метода Галёркина (stab-time-DG). Однако данная схема весьма чувствительна к выбору параметра стабилизации.

Таблица 2. Погрешность решения при $t = 1$, $u^* = 1$ (базис 1-го порядка)

	Число Куранта				
	0.1	0.5	1	1.5	2
time-DG	1.2E-03	5.9E-03	1.2E-02	6.8E-01	2.9E+00
full-DG	5.3E-04	1.5E-03	9.1E-03	5.2E-02	8.3E-01
stab-time-DG	2.8E-06	5.7E-06	9.8E-06	1.9E-05	2.7E-04

ТАБЛИЦА 3. Погрешность решения при $t = 1$, $u^* = 1$ (базис 2-го порядка)

	Число Куранта				
	0.1	0.5	1	1.5	2
time-DG	6.7E-04	5.4E-03	9.8E-03	5.2E-02	6.7E-01
full-DG	4.2E-05	3.8E-04	1.1E-03	2.8E-02	4.2E-02
stab-time-DG	2.2E-06	5.5E-06	9.8E-06	1.8E-05	2.2E-04

ТАБЛИЦА 4. Погрешность решения при $t = 1$, $u^* = 1$ (базис 3-го порядка)

	Число Куранта				
	0.1	0.5	1	1.5	2
time-DG	5.8E-04	5.3E-03	7.9E-03	4.6E-02	5.1E-01
full-DG	3.7E-05	3.1E-04	8.4E-04	2.8E-02	3.7E-02
stab-time-DG	1.8E-06	4.9E-06	8.5E-06	1.6E-05	2.0E-04

Заметим, что параметр стабилизации (22) в терминах числа Куранта вычисляется по формуле:

$$\mu(C) = \frac{\tau}{2\sqrt{1+C^2}}. \tag{31}$$

Это означает, что при малых числах Куранта существенно возрастает диффузность вычислительной схемы. Как влияет отклонение параметра стабилизации от оптимального значения на точность численного решения, продемонстрировано в таблице 5.

ТАБЛИЦА 5. Влияние параметра стабилизации в stab-time-DG при $t = 1$, $u^* = 1$ (базис 3-го порядка)

Число Куранта	Параметр стабилизации, μ_{opt} – значение по формуле (22)				
	$\mu_{opt} / 10$	$\mu_{opt} / 2$	μ_{opt}	$\mu_{opt} \times 2$	$\mu_{opt} \times 10$
0.1	6.7E-05	2.5E-06	1.8E-06	2.0E-06	6.9E-05
0.5	8.4E-05	5.7E-06	4.9E-06	5.2E-06	3.8E-05
1	3.8E-04	8.6E-06	8.5E-06	1.1E-05	5.0E-04
1.5	5.9E-04	1.7E-05	1.6E-05	2.0E-05	2.8E-04
2	1.1E-04	2.7E-05	2.0E-05	2.5E-05	1.3E-03

На рис. 4 и 5 показано проявление эффекта диффузности схемы стабилизированного разрывного метода Галёркина (stab-time-DG) при разных значениях числа Куранта. Сплошной чёрной линией продемонстрирован начальный фронт, точками – численное решение в момент $t = 0.5$.

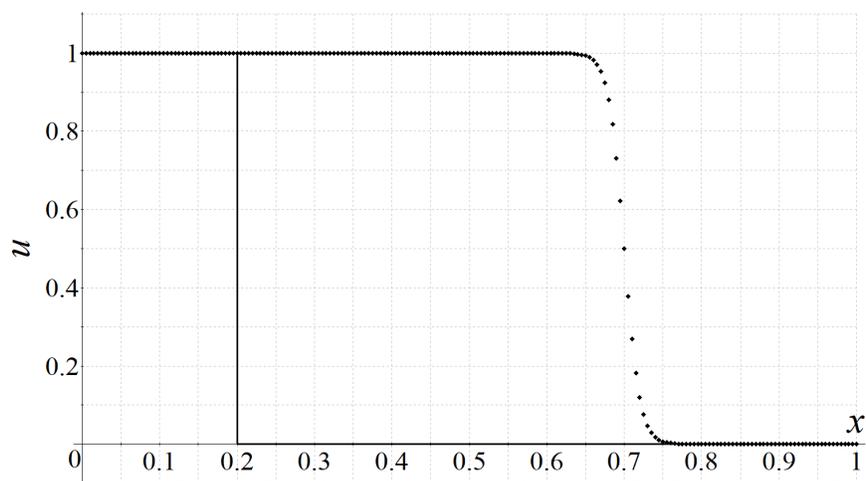


Рис. 4. Пример проявления диффузности схемы stab-time-DG при числе Куранта $C = 0.01$ (базис 1-го порядка)

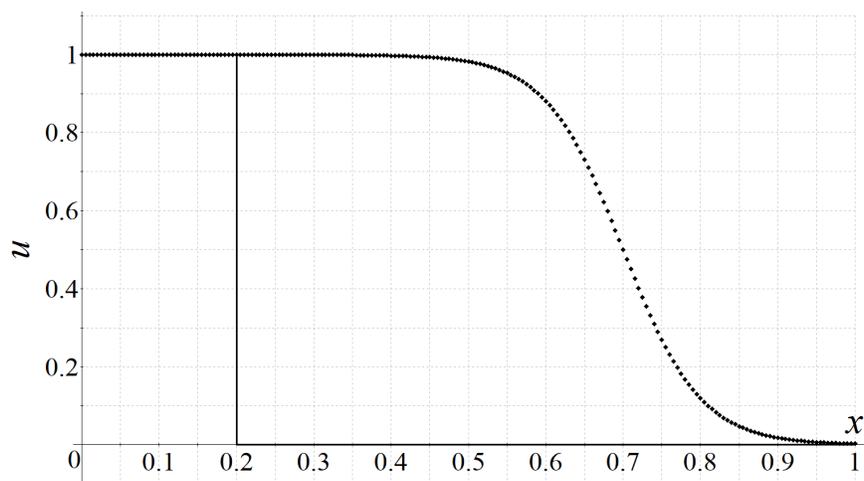


Рис. 5. Пример проявления диффузности схемы stab-time-DG при числе Куранта $C = 0.001$ (базис 1-го порядка)

Неустойчивость численного решения, полученного при использовании нестабилизированного разрывного метода Галёркина по времени (time-DG), показана на рис. 6 и 7.

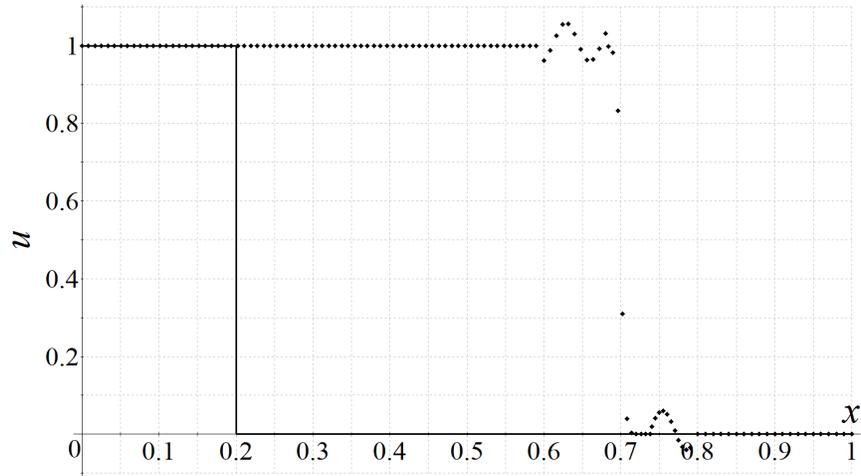


Рис. 6. Проявление неустойчивости схемы time-DG при числе Куранта $C = 2$ (базис 1-го порядка)

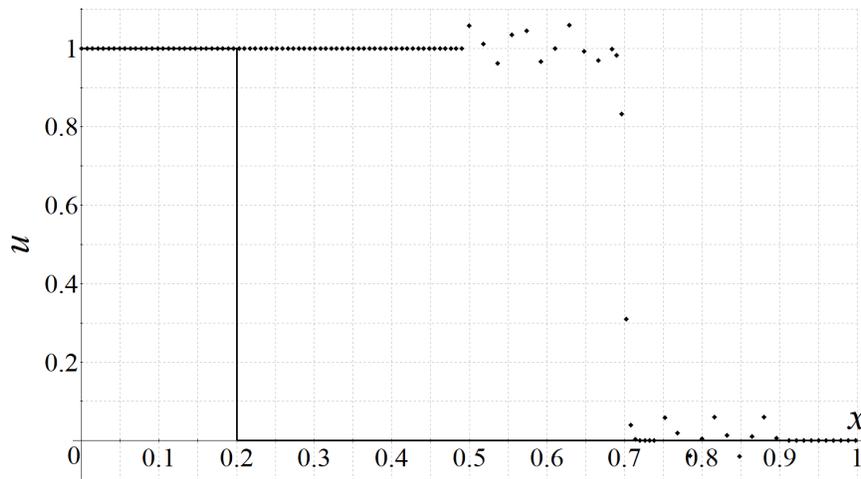


Рис. 7. Проявление неустойчивости схемы time-DG при числе Куранта $C = 4$ (базис 1-го порядка)

Неустойчивость численного решения, полученного при использовании нестабилизированного полностью разрывного метода Галёркина (full-DG), показана на рис. 8 и 9. Как можно видеть, величина осцилляций значительно меньше, чем у схемы разрывного метода Галёркина по времени (time-DG) при тех же условиях вычислительного эксперимента.

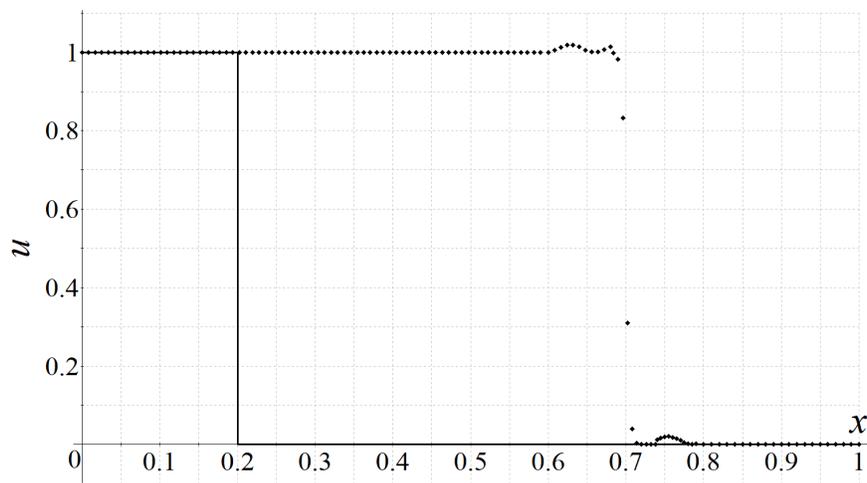


Рис. 8. Проявление неустойчивости решения по схеме full-DG при числе Куранта $C = 2$ (базис 1-го порядка)

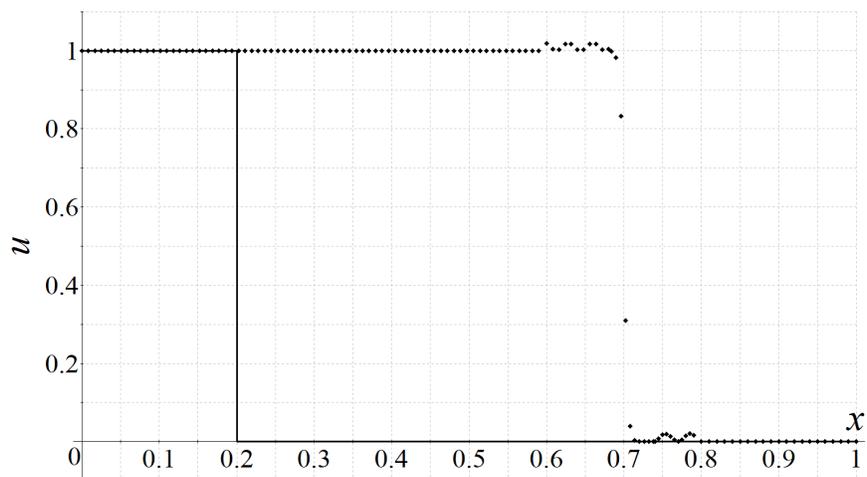


Рис. 9. Проявление неустойчивости решения по схеме full-DG при числе Куранта $C = 4$ (базис 1-го порядка)

На рис. 10 показано численное решение, полученное стабилизированным разрывным методом Галёркина.

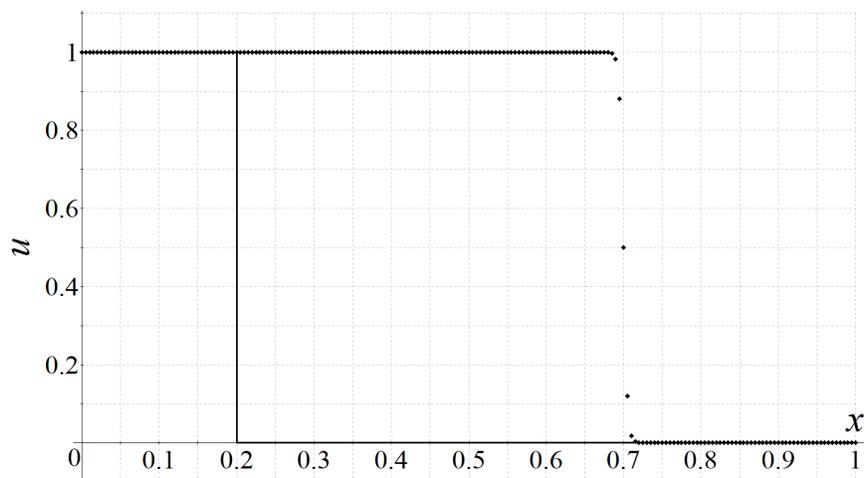


Рис. 10. Устойчивое решение задачи по схеме stab-time-DG при числе Куранта $C = 4$ (базис 1-го порядка)

Рассмотренная задача с фронтом в виде ступеньки имеет практическое значение при численном определении фазонасыщенности в прикладных задачах о фильтрации многофазных флюидов в пористых средах. Применительно к нефтегазовой отрасли: породы-коллекторы имеют слоистую структуру, в которой каждый горизонт (слой) характеризуется начальными насыщенностями компонентов многофазного флюида.

Если для данной задачи применить классический метод конечных элементов с явной или неявной конечно-разностной аппроксимацией по времени, то получить устойчивое численное решение задачи удаётся только при малых числах Куранта. На рис. 11 и 12 показаны численные решения рассмотренной задачи о фронте в виде ступеньки, полученные классическим методом конечных элементов с неявным методом Эйлера для аппроксимации по времени при разных числах Куранта.

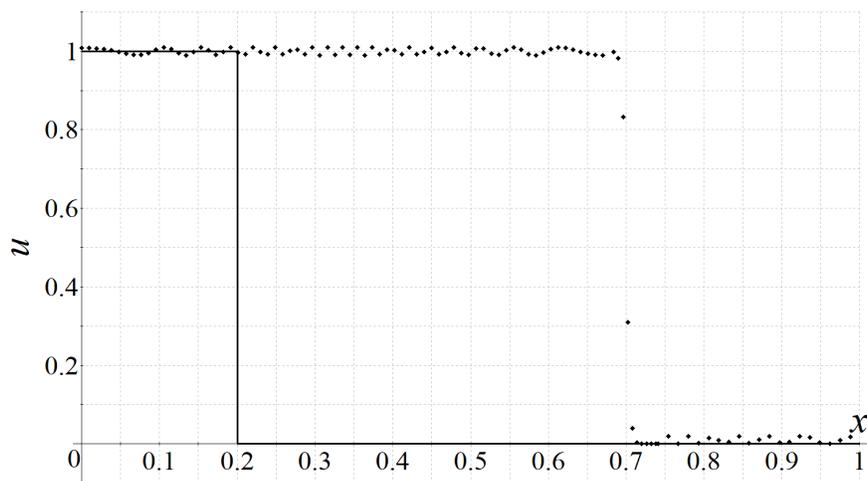


Рис. 11. Неустойчивое решение задачи по схеме классического МКЭ при числе Куранта $C = 0.1$ (базис 1-го порядка)

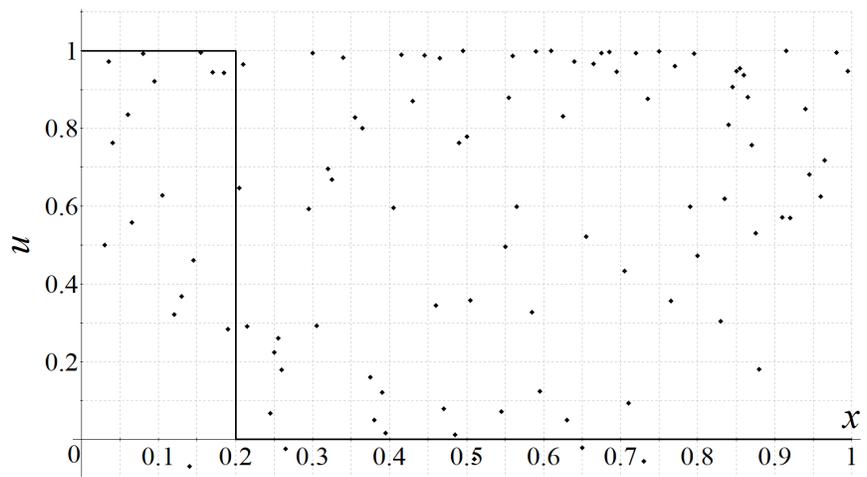


Рис. 12. Неустойчивое решение задачи по схеме классического МКЭ при числе Куранта $C = 2$ (базис 1-го порядка)

10 Анализ свойств матриц дискретного аналога

На рис. 13 и 14 показаны структуры портретов матриц СЛАУ для полностью разрывного метода Галёркина без стабилизации (full-DG) и для стабилизированного разрывного метода Галёркина (stab-time-DG) в зависимости от порядка базисных функций.

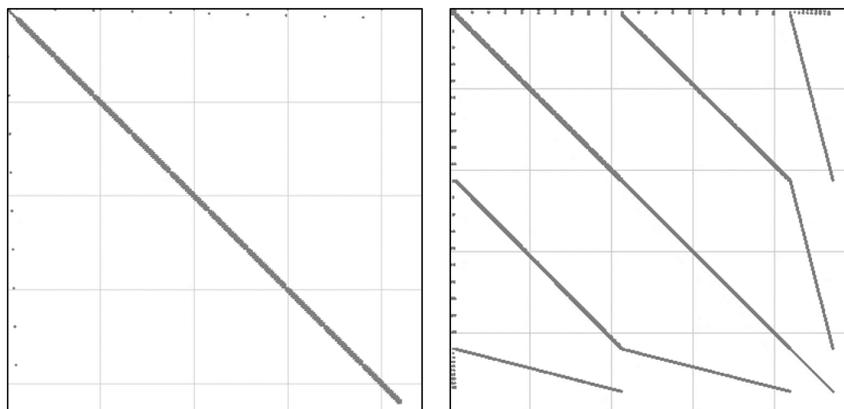


Рис. 13. Портреты матриц СЛАУ по схеме full-DG: слева – базис 1-го порядка, справа – базис 2-го порядка

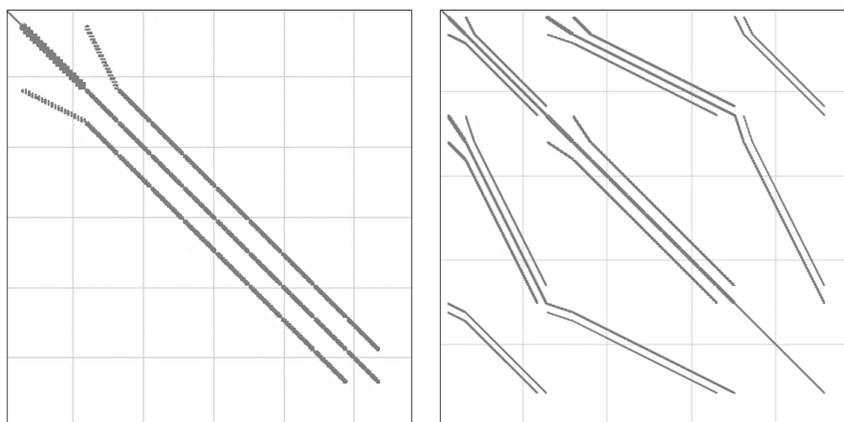


Рис. 14. Портреты матриц СЛАУ по схеме stab-time-DG: слева – базис 1-го порядка, справа – базис 2-го порядка

Матрица дискретного аналога полностью разрывного метода Галёркина имеет ленточно-блочную структуру. Матрица дискретного аналога стабилизированного разрывного метода Галёркина имеет такой же портрет, как и в классическом методе конечных элементов.

При фиксированном шаге дискретизации по пространству и при варьировании скорости переноса было выполнено сингулярное разложение матриц дискретных аналогов полностью разрывного метода Галёркина без стабилизации (full-DG) и стабилизированного разрывного метода Галёркина (stab-time-DG). В таблицах 6 и 7 приведены числа обусловленности $\text{Cond}(A) = \sigma_1/\sigma_r$ и вычислительные затраты при решении СЛАУ.

ТАБЛИЦА 6. Анализ вычислительных затрат full-DG (базис 1-го порядка)

	Число Куранта				
	0.01	0.1	1	10	100
Число обусловленности $\times 10^3$	21	32	50	281	408
Число итераций / время решения СЛАУ, мс	13 / 64	19 / 85	30 / 121	45 / 161	101 / 236

ТАБЛИЦА 7. Анализ вычислительных затрат stab-time-DG (базис 1-го порядка)

	Число Куранта				
	0.01	0.1	1	10	100
Число обусловленности $\times 10^3$	8	9	10	25	36
Число итераций / время решения СЛАУ, мс	10 / 50	10 / 50	15 / 68	19 / 81	22 / 93

Дискретный аналог вычислительной схемы полностью разрывного метода Галёркина имеет больший размер по сравнению со стабилизированной схемой, что отражается на числе обусловленности матрицы СЛАУ. Параметр стабилизации в схеме stab-time-DG позволяет получить устойчивое решение задачи, а также уменьшить число обусловленности матрицы её дискретного аналога.

11 Заключение

В статье рассмотрены вычислительные схемы пространственно-временных конечно-элементных методов для уравнения переноса. На примере задачи о фронте в виде ступеньки была исследована устойчивость численного решения, полученного разрывным методом Галёркина по времени, полностью разрывным методом Галёркина по пространству и времени, а также стабилизированным разрывным методом Галёркина. При увеличении числах Куранта наибольшую устойчивость численного решения продемонстрировал стабилизированный разрывный метод Галёркина. Следует отметить, что при малых числах Куранта данный метод проявляет свойство диффузности, что негативно сказывается на точности решения задачи: фронт переноса нефизично расширяется. Также данная вычислительная схема демонстрирует высокую чувствительность решения к выбору параметра стабилизации, что свойственно всем стабилизированным конечно-элементным методам. Общая рекомендация: при числах Куранта больше единицы предпочтение следует отдавать стабилизированному разрывному методу Галёркина, в противном случае – полностью разрывному методу Галёркина по пространству и времени.

References

- [1] Z. Kamont, *Numerical method of lines*, MAIA: Hyperbolic Functional Differential Inequalities and Applications, Springer, Netherlands, **486** (1999), 181–204.
- [2] J. Kacur, *Method of Rothe in evolution equations*, Lecture Notes in mathematics, **1192** (1970), 23–34.
- [3] X.-D. Liu, S. Osher, T. Chan. *Weighted essentially non-oscillatory schemes*, Journal of computational physics, **115** (1994), 200–212.
- [4] G.S. Jiang, C.-W. Shu. *Efficient implementation of weighted ENO schemes*, Journal of computational physics, **126** (1996), 202–228.
- [5] C.-W. Shu. *Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws*, Lecture Notes in Mathematics, **1697** (2006), 325–432.
- [6] R. Zhang, M. Zhang, C.-W. Shu. *On the Order of Accuracy and Numerical Performance of Two Classes of Finite Volume WENO Schemes*, Commun. Comput. Phys., **9:3** (2011), 807–827.
- [7] P.A. Bakhvalov, T.K. Kozubskaya. *Modification of Flux Correction method for accuracy improvement on unsteady problems*, Journal of Computational Physics, **338** (2017), 199–216.
- [8] L. Dongmi, S. Li, J. Qiu, J. Zhu, Y. Chen. *A compact simple HWENO scheme with ADER time discretization for hyperbolic conservation laws I: Structured meshes*, Journal of Computational Physics, **504** (2024), 112886.
- [9] J.S. Hesthaven, T. Warburton. *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications*, Springer, New York, 2008.
- [10] H.T. Huynh. *A flux reconstruction approach to high-order schemes including discontinuous Galerkin methods*, 18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Miami, 2007, June 25–28, AIAA 2007-4079.

- [11] J. Zhu, Y.-T. Zhang, S.A. Newman, M. Alber. *Application of discontinuous Galerkin methods for reaction-diffusion systems in developmental biology*, J. Sci. Comput., **40**:1–3 (2008), 391–418.
- [12] V.P. Nguyen. *Discontinuous Galerkin/extrinsic cohesive zone modeling: implementation caveats and applications in computational fracture mechanics*, Eng. Fract. Mech. **128** (2014), 37–68.
- [13] L. Wei, L. Zhou, Y. Xia. *The jump filter in the discontinuous Galerkin method for hyperbolic conservation laws*, Journal of Computational Physics, **520** (2025), 113498.
- [14] T. Dzanic. *Continuously bounds-preserving discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws*, Journal of Computational Physics, **508** (2024), 113010.
- [15] L. Wei, Y. Xia. *An indicator-based hybrid limiter in discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws*, Journal of Computational Physics, **498** (2024), 112676.
- [16] P.F. Antonietti, I. azzieri, F. Migliorini. *A space-time discontinuous Galerkin method for the elastic wave equation*, Journal of Computational Physics, **419** (2020), 109685.
- [17] P.F. Antonietti, F. Bonizzoni, M. Verani. *A cVEM-DG space-time method for the dissipative wave equation*, Computers and Mathematics with Applications, **152** (2023), 341–354.
- [18] M.-Y. Kim. *Arbitrary order DG-DGLM method for hyperbolic systems of multi-dimensional conservation laws*, Computers and Mathematics with Applications, **97** (2021), 100–121.
- [19] J. Shina, M.-Y. Kim. *P0 time/space subcell limiting DG-DGLM method for hyperbolic systems of conservation laws*, Computers and Mathematics with Applications, **94** (2021), 114–135 .
- [20] J. Erickson, D. Guoy, J. Sullivan, A. Ungor. *Building space-time meshes over arbitrary spatial domains*, Eng. Comput., **20** (2005), 342–353.
- [21] J. Gopalakrishnan, M. Hochsteger, J. Schoberl, C. Wintersteiger. *An explicit mapped tent pitching scheme for Maxwell equations*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, **134** (2019), 359–369.
- [22] I. Perugia, J. Schoberl, P. Stocker, C. Wintersteiger. *Tent pitching and Trefftz-dg method for the acoustic wave equation*, Comput. Math. Appl., **79**:10 (2020), 2987–3000.
- [23] T. Hughes, G. Hulbert. *Space-time finite element methods for elastodynamics: formulation and error estimates*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **66** (1988), 339–363.
- [24] A. Idesman. *Solution of linear elastodynamics problems with space-time finite elements on structured and unstructured meshes*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **196** (2007), 1787–1815 .
- [25] A. Ungor, A. Sheffer. *Pitching Tents in Space-Time: Mesh Generation for Discontinuous Galerkin Method*, International Journal of Foundations of Computer Science, **13**:2 (2002), 201–221.
- [26] D.A. French, T.E. Peterson. *A continuous space-time finite element method for the wave equation*, Math. Comput., **65** (1996), 491–506.
- [27] R. Griesmaier, P. Monk. *Discretization of the wave equation using continuous elements in time and a hybridizable discontinuous Galerkin method in space*, J. Sci. Comput., **58**:2 (2014), 472–498.
- [28] C. Johnson. *Discontinuous Galerkin finite element methods for second order hyperbolic problems*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **107**:1 (1993), 117–129.
- [29] T.J. Hughes, G.M. Hulbert. *Space-time finite element methods for second-order hyperbolic equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **84**:3 (1990), 327–348.
- [30] L.L. Thompson, P.M. Pinsky. *A space-time finite element method for structural acoustics in infinite domains part 1: formulation, stability and convergence*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **132**:3 (1996), 195–227.

- [31] W. Boscheri, M. Dumbser. *A direct Arbitrary-Lagrangian-Eulerian ADER-WENO finite volume scheme on unstructured tetrahedral meshes for conservative and non-conservative hyperbolic systems*, J. Comput. Phys., **275** (2014), 484–523.
- [32] P. Solin, K. Segeth, I. Dolezel. *Higher-Order Finite Element Methods*, CRC Press, Florida, USA, 2003.
- [33] J. Donea, A. Huerta. *Finite Element Methods for Flow Problems*, John Wiley and Sons, Hoboken, USA, 2003.

SERGEY IGOREVICH MARKOV
TROFIMUK INSTITUTE OF PETROLEUM GEOLOGY AND GEOPHYSICS, SB RAS,
KOPTUG AVE., 3, 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA,
NOVOSIBIRSK STATE TECHNICAL UNIVERSITY,
KARL MARX AVE., 20, 630073, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: www.sim91@list.ru

NATALYA BORISOVNA ITKINA
INSTITUTE OF COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES, SB RAS,
ACADEMICIAN M.A. LAVRENTIEV AVE., 6, 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA,
NOVOSIBIRSK STATE TECHNICAL UNIVERSITY,
KARL MARX AVE., 20, 630073, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: itkina.nat@yandex.ru