УДК 517.538

М. О. Корпусов

Об асимптотическом поведении при больших временах слабого решения обобщенной диффузионно–дрейфовой системы уравнений и уравнения Пуассона

В работе рассмотрена одна обобщенная система уравнений амбиполярной диффузии. Доказана глобальная во времени разрешимость и единственность. Построена асимптотика при больших временах.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: система нелинейных параболических и эллиптического уравнений, асимптотика при больших временах, амбиполярная диффузия в полупроводниках

§ 1. Введение

В настоящей работе мы рассмотрели задачу Коши для следующей системы уравнений амбиполярной диффузии в полупроводниковой плазме в формализме электронов и дырок в $\mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 3$:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = a^2 \left(\Delta_x n + \operatorname{div}(|n|^{m-1} n D_x \phi)\right), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = b^2 \left(\Delta_x p - \operatorname{div}(|p|^{m-1} p D_x \phi)\right),$$
$$\Delta_x \phi = p - n, \quad m \geqslant 1, \quad a, b > 0, \tag{1.2}$$

где переменные n и p соответствуют концентрациям электронов и дырок соответственно.

Отметим, что в настоящей работе мы впервые рассмотрели случай $m > 1$. Случаю $m = 1$ посвящено много интересных работ. Отметим, прежде всего работу [1]. В этой работе рассматривался случай $\mathbb{R}^3$ и изучалась глобальная во времен разрешимость задачи Коши для такой системы уравнений:

$$n_t = \operatorname{div}(\nabla n + n\nabla(\psi + V)) - R(n, p, x), \tag{1.3}$$

$$p_t = \operatorname{div}(\nabla p + p\nabla(-\psi + V)) - R(n, p, x), \tag{1.4}$$
$$-\varepsilon^2 \Delta\psi = n - p - D(x).$$

Отметим, однако, что эта система уравнений с физической точки зрения ошибочна, поскольку в уравнение (1.4) для дырок потенциал V внешнего электрического поля должен входить как и потенциал ψ самосогласованного электрического

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00056).

поля электронов и дырок со знаком «$-$»! Тем не менее это не сколько не влияет на математическое качество работы! Отметим также более раннюю работу [2].

В настоящей работе мы доказали существование, единственность и глобальную во времени разрешимость слабого решения задачи Коши для системы уравнений (1.1)–(1.3), а также изучили асимптотическое поведение решения $\{n, p, \phi\}$ при больших временах. При этом существенно использовали технику работы [3]. Заметим, что широкий спектр результатов об асимптотическом поведении при больших временах для нелинейных эволюционных уравнений математической физики получен в работах И. А. Шишмарева, П. И. Наумкина, Е. И. Кайкиной и Н. Хаяши (см. работы [4], [5]).

§ 2. Вывод системы уравнений

Рассмотрим диффузию электронов и дырок в полупроводниковой плазме (см. работы [6], [7]). Уравнения диффузии имеют вид уравнений непрерывности для электронов (e) и дырок (p) в $\mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 3$:

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}_e = 0, \quad \frac{\partial N_p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}_p = 0, \tag{2.1}$$

причем плотности потоков $\mathbf{J}_e$ и $\mathbf{J}_p$ выражаются через плотности числа частиц и их градиенты согласно:

$$\mathbf{J}_e = -N_e b_e e \mathbf{E} - D_e \nabla N_e, \quad \mathbf{J}_p = N_p b_p e \mathbf{E} - D_p \nabla N_p,$$

где D_e, D_p — коэффициенты диффузии, а b_e, b_p — подвижности электронов и дырок, а e — заряд электрона, который отрицательный: $e < 0$. Мы предполагаем, что подвижности зависят от концентрации электронов и дырок согласно степенному закону:

$$b_e = b_{e0}|N_e|^{m-1}, \quad b_p = b_{p0}|N_p|^{m-1}, \quad m \geqslant 1.$$

Кроме того, коэффициенты диффузии D_e, D_p связаны с подвижностями b_{e0}, b_{p0} соотношениями (см. [6] формула 25.3):

$$D_e = T b_{e0}, \quad D_p = T b_{p0}.$$

Наконец, для самосогласованного электрического поля $\mathbf{E}$ справедливы такие уравнения:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi e(N_p - N_e), \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}. \tag{2.2}$$

Таким образом, если ввести потенциал электрического поля ϕ согласно формуле $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, то из (2.1)–(2.2) получим такую систему уравнений:

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} = D_e \Delta_x N_e - \frac{D_e e}{T} \operatorname{div}(|N_e|^{m-1} N_e \nabla\phi), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial N_p}{\partial t} = D_p \Delta_x N_p + \frac{D_p e}{T} \operatorname{div}(|N_p|^{m-1} N_p \nabla\phi),$$

$$\Delta_x \phi = -\frac{4\pi e}{\varepsilon}(N_p - N_e). \tag{2.4}$$

Систему уравнений (2.3)–(2.4) можно в безразмерных переменных (поскольку $e < 0$) привести к виду (1.1)–(1.2).

§ 3. Обозначения

В работе рассматривается ситуация, когда $N \in \mathbb{N}$ и $N \geqslant 3$.

Символом $\lfloor a, b \rceil$ мы обозначаем всевозможные варианты:

$$[a,b], \quad (a,b), \quad [a,b), \quad (a,b].$$

Символом $O(x,R) \subset \mathbb{R}^N$ мы обозначаем открытый шар с центром в точке $x \in \mathbb{R}^N$ и радиусом $R > 0$. Под $C^{\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ при $\alpha \in (0,1]$ понимаем линейное пространство таких функций f, что для любого шара $O(x_0,R_0) \subset \mathbb{R}^N$ имеем:

$$[f]_{\alpha;O(x_0,R_0)} := \sup_{x\neq y,\, x,y\in O(x_0,R_0)} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha}} < +\infty.$$

Будем говорить, что функция $f = f(x,t)$ при $(x,t) = \mathbb{R}^N \times [0,T]$ принадлежит $C^{\alpha}_{x,loc}(\mathbb{R}^N)$ при $\alpha \in (0,1]$ равномерно по $t \in [0,T]$, если для любого шара $O(x_0,R_0) \subset \mathbb{R}^N$ имеем:

$$\sup_{t\in[0,T]} [f(t)]_{\alpha;O(x_0,R_0)} = \sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\neq y,\, x,y\in O(x_0,R_0)} \frac{|f(x,t)-f(y,t)|}{|x-y|^{\alpha}} < +\infty.$$

Отметим, что мы пользуемся обозначениями из книги [8]. В частности, мы используем такое обозначение:

$$|f|_0 := \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x)|.$$

Символом D_x — мы обозначаем градиент, символом D_{x_j} — частную производную по переменной x_j, символом $D^2_{x_j x_k}$ — частную производную второго порядка по переменным x_j и x_k в такой же последовательности, символом D_t — обозначаем частную производную по времени. Символом D^l_x мы обозначаем произвольную частную производную (по переменной $x = (x_1, \dots, x_N)$) порядка $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Символом $C^{(m,n)}_{x,t}(\mathbb{R}^N \times \lfloor 0,T \rceil)$ мы обозначаем линейное пространство таких функций $f = f(x,t)$, что все частные производные по переменной x до порядка $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и все частные производные по переменной t до порядка $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существуют в классическом смысле на множестве $\mathbb{R}^N \times \lfloor 0,T \rceil$ и являются непрерывными, причем частные производные по $t \in \lfloor 0,T \rceil$ в граничных точках понимаются в смысле возможности непрерывного продолжения в граничную точку. Если в дополнение сама функция и все её частные производные до порядков m и n включительно ограничены, то мы используем обозначение $C^{(m,n)}_{b,x,t}(\mathbb{R}^N \times \lfloor 0,T \rceil)$.

Символом $C_b(\mathbb{R}^N)$ мы обозначаем линейное пространство функций непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^N$. Символом $C^{(k)}_b(\mathbb{R}^N)$ мы обозначаем линейное пространство $k-$раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^N$, причем сама функция и все ее частные производные до порядка k являются ограниченными. Символом $C_b(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ мы обозначаем линейное пространство непрерывных и ограниченных функций на $\mathbb{R}^N \times [0,T]$.

Символом $C([0,T];B)$, где B — банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|_B$, мы обозначаем линейное пространство функций f, определенных на $[0,T]$

со значениями в B, таких, что

$$\|f(t_1) - f(t_2)\|_B \to +0 \quad \text{при} \quad |t_1 - t_2| \to +0$$

для любых $t_1, t_2 \in [0,T]$. Причем линейное пространство $C([0,T];B)$ является банаховым относительно нормы:

$$\|f\|_{BT} := \sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_B.$$

Символом $C((0,T];B)$ мы обозначаем линейное пространство таких функций f, что для любого $\delta \in (0,T)$ функция $f \in C([\delta,T];B)$. Аналогичным образом определяется линейное пространство $C^{(1)}((0,T];B)$.

Положительные постоянные мы обычно обозначаем большой буквой C, если постоянная C зависит от каких-то параметров мы пишем C с аргументами. На протяжении всей статьи символом $\mathfrak{M}_{c,x,t}$ мы обозначаем оператор:

$$\mathfrak{M}_{c,x,t} := \frac{\partial}{\partial t} - c^2 \Delta_x, \quad \Delta_x := \sum_{j=1}^{N} D^2_{x_j x_j},$$

а символом $\mathfrak{M}^T_{c,x,t}$ мы обозначаем транспонированный оператор:

$$\mathfrak{M}^T_{c,x,t} := -\frac{\partial}{\partial t} - c^2 \Delta_x.$$

Символами $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N \times (-\infty,T))$, $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{N+1})$ мы обозначаем линейные топологические пространства основных функций с компактным носителем, а символами $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N \times (-\infty,T))$, $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{N+1})$ — соответствующие двойственные пространства обобщенных функций. При этом символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ мы единообразно обозначаем соответствующее спаривание, причем из контекста ясно между какими пространствами.

Символом $L^m_{loc}(\mathbb{R}^N \times [0,T))$ мы обозначаем такое линейное пространство функций f, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^N \times [0,T)$ функция $f \in L^m(K)$. Символом $W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N \times [0,T))$ мы обозначаем такое линейное пространство функций f, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^N \times [0,T)$ функция $f \in W^{1,\infty}(K)$. Аналогичным образом определяются линейные пространства $L^m_{loc}(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty))$ и $W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty))$. Мы используем следующие нормы на соответствующих линейных пространствах:

$$\|f\|_{r,T} := \sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_r, \quad \|f\|_T = \|f\|_{1,T} + \|f\|_{\infty,T}, \quad r \in [1,+\infty],$$

§ 4. Слабые решения

Пусть $N \geqslant 3$. Рассмотрим уравнение в смысле $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{N+1})$:

$$\mathfrak{M}_{c,x,t}\mathscr{E}_c(x,t) = \delta(x)\delta(t),$$

$$\mathfrak{M}_{c,x,t} := \frac{\partial}{\partial t} - c^2 \Delta_x, \quad \mathfrak{M}^T_{c,x,t} := -\frac{\partial}{\partial t} - c^2 \Delta_x, \quad c > 0.$$

Несложно показать, что

$$\mathscr{E}_c(x,t) = \frac{\theta(t)}{(4\pi c^2 t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4c^2 t}\right).$$

Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений при $a, b > 0$, $m \geqslant 1$:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = a^2 \left(\Delta_x n + \operatorname{div}(|n|^{m-1} n D_x \phi)\right), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T], \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = b^2 \left(\Delta_x p - \operatorname{div}(|p|^{m-1} p D_x \phi)\right), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T],$$

$$\Delta_x \phi = p - n, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T],$$

$$n(x,0) = n_0(x), \quad p(x,0) = p_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.2}$$

Дадим определение локального во времени слабого решения.

Определение 1. Слабым локальным во времени решением задачи Коши (4.1)–(4.2) называется такая упорядоченная тройка

$$\{n, p, \phi\} \in L^m_{loc}(\mathbb{R}^N \times [0,T)) \times L^m_{loc}(\mathbb{R}^N \times [0,T)) \times W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N \times [0,T)),$$

что для любых $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times (-\infty, T))$ выполнены равенства:

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} n(x,t) \mathfrak{M}^T_{a,x,t} \psi_1(x,t)\, dx\, dt - \int\limits_{\mathbb{R}^N} n_0(x) \psi_1(x,0)\, dx + \\ + a^2 \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} |n(x,t)|^{m-1} n(x,t) \left(D_x \phi(x,t), D_x \psi_1(x,t)\right)\, dx\, dt = 0, \tag{4.3}$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} p(x,t) \mathfrak{M}^T_{b,x,t} \psi_2(x,t)\, dx\, dt - \int\limits_{\mathbb{R}^N} p_0(x) \psi_2(x,0)\, dx - \\ - b^2 \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} |p(x,t)|^{m-1} p(x,t) \left(D_x \phi(x,t), D_x \psi_2(x,t)\right)\, dx\, dt = 0, \tag{4.4}$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(D_x \phi(x,t), D_x \psi_3(x,t)\right)\, dx\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} (p(x,t) - n(x,t)) \psi_3(x,t)\, dx\, dt = 0, \tag{4.5}$$

причем $n_0, p_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ и $m \geqslant 1$.

Дадим определение глобального во времени слабого решения.

Определение 2. Слабым глобальным во времени решением задачи Коши (4.1)–(4.2) называется такая упорядоченная тройка

$$\{n, p, \phi\} \in L^m_{loc}(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty)) \times L^m_{loc}(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty)) \times W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N \times [0,+\infty)),$$

что для любых $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times (-\infty, +\infty))$ выполнены равенства:

$$\int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} n(x,t)\mathfrak{M}^T_{a,x,t}\psi_1(x,t)\,dx\,dt - \int\limits_{\mathbb{R}^N} n_0(x)\psi_1(x,0)\,dx + \\ + a^2 \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |n(x,t)|^{m-1} n(x,t)\left(D_x\phi(x,t), D_x\psi_1(x,t)\right)\,dx\,dt = 0,$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} p(x,t)\mathfrak{M}^T_{b,x,t}\psi_2(x,t)\,dx\,dt - \int\limits_{\mathbb{R}^N} p_0(x)\psi_2(x,0)\,dx - \\ - b^2 \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |p(x,t)|^{m-1} p(x,t)\left(D_x\phi(x,t), D_x\psi_2(x,t)\right)\,dx\,dt = 0,$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(D_x\phi(x,t), D_x\psi_3(x,t)\right)\,dx\,dt + \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} (p(x,t) - n(x,t))\psi_3(x,t)\,dx\,dt = 0,$$

причем $n_0, p_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ и $m \geqslant 1$.

Справедлива следующая несложная:

Лемма 4.1. *Всякое глобальное во времени слабое решение $\{n, p, \phi\}$ задачи Коши (4.1)–(4.2) в смысле определения 2 является локальным во времени слабым решением задачи Коши (4.1)–(4.2) в смысле определения 1 для любого $T > 0$. Обратно, если тройка $\{n, p, \phi\}$ является слабым локальным во времени решением задачи Коши в смысле определения 1 для каждого $T > 0$, то это слабое глобальное во времени решение задачи Коши в смысле определения 2.*

Наконец, справедлива следующая:

Лемма 4.2. *Всякое слабое локальное во времени решение задачи Коши (4.1)–(4.2) в смысле определения 1 представимо в следующем виде при условии существования соответствующих интегралов*:

$$\widetilde{n}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_a(x-y,t) n_0(y)\,dy + \\ + a^2 \int\limits_{-\infty}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_a(x-y,t-\tau)\,\mathrm{div}\left(|\widetilde{n}(y,\tau)|^{m-1}\widetilde{n}(y,\tau) D_y\widetilde{\phi}(y,\tau)\right)\,dy\,d\tau, \quad (4.6)$$

$$\widetilde{p}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_b(x-y,t) p_0(y)\,dy - \\ - b^2 \int\limits_{-\infty}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_b(x-y,t-\tau)\,\mathrm{div}\left(|\widetilde{p}(y,\tau)|^{m-1}\widetilde{p}(y,\tau) D_y\widetilde{\phi}(y,\tau)\right)\,dy\,d\tau, \quad (4.7)$$

$$\widetilde{\phi}(x,t) = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\widetilde{n}(y,t) - \widetilde{p}(y,t)}{|x-y|^{N-2}}\, dy,$$

где мы использовали обозначение:

$$\widetilde{h}(x,t) := \begin{cases} h(x,t), & \textit{если} \quad t \geqslant 0; \\ 0, & \textit{если} \quad t < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Итак, пусть $\{n, p, \phi\}$ — это слабое локальное во времени решение задачи Коши (4.1)–(4.2) в смысле определения 1. Тогда с учетом (4.3) получим следующую цепочку равенств:

$$\langle \mathfrak{M}_{a,x,t}\widetilde{n}, \psi_1 \rangle = \left\langle \widetilde{n}, \mathfrak{M}^T_{a,x,t}\psi_1 \right\rangle = \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} n(x,t)\mathfrak{M}^T_{a,x,t}\psi_1(x,t)\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} n_0(x)\psi_1(x,0)\, dx - a^2 \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} |n(x,t)|^{m-1} n(x,t) \left(D_x\phi(x,t), D_x\psi_1(x,t)\right)\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} n_0(x)\psi_1(x,0)\, dx - a^2 \int\limits_{-\infty}^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{n}(x,t)|^{m-1} \widetilde{n}(x,t) \left(D_x\widetilde{\phi}(x,t), D_x\psi_1(x,t)\right)\, dx\, dt =$$

$$= \langle n_0\delta(t), \psi_1 \rangle + \left\langle a^2 \operatorname{div}(|\widetilde{n}|^{m-1}\widetilde{n} D_x\widetilde{\phi}), \psi_1 \right\rangle,$$

из которых получаем равенство в смысле $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N \times (-\infty, T))$:

$$\mathfrak{M}_{a,x,t}\widetilde{n} = n_0\delta(t) + a^2 \operatorname{div}(|\widetilde{n}|^{m-1}\widetilde{n} D_x\widetilde{\phi}),$$

из которого при условии существовании всех сверток получим равенство (4.6) для почти всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (-\infty, T)$. Аналогичным образом из (4.4) при условии существования всех сверток получим равенство (4.7) для почти всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (-\infty, T)$. Наконец, с учетом (4.5) справедлива следующая цепочка равенств:

$$\left\langle \Delta_x\widetilde{\phi}, \psi_3 \right\rangle = \left\langle \widetilde{\phi}, \Delta_x\psi_3 \right\rangle = \int\limits_{-\infty}^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} \widetilde{\phi}(x,t)\Delta_x\psi_3(x,t)\, x\, dt =$$

$$= -\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(D_x\phi(x,t), D_x\psi_3(x,t)\right)\, x\, dt = \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(p(x,t) - n(x,t)\right)\psi_3(x,t)\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\widetilde{p}(x,t) - \widetilde{n}(x,t)\right)\psi_3(x,t)\, dx\, dt = \langle \widetilde{p} - \widetilde{n}, \psi_3 \rangle,$$

из которой получаем следующее равенство в смысле $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N \times (-\infty, T))$:

$$\Delta_x\widetilde{\phi} = \widetilde{p} - \widetilde{n}. \tag{4.8}$$

Здесь заметим, что фундаментальным решением уравнения в смысле $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{N+1})$

$$\Delta_x \mathscr{E}_0(x,t) = \delta(t)\delta(x)$$

является, очевидно, распределение:

$$\mathscr{E}_0(x,t) = -\frac{1}{(N-2)\omega_N}\frac{1}{|x|^{N-2}}\delta(t)$$

и тогда единственным решением уравнения (4.8) в классе, в котором существует свертка, является следующая:

$$\widetilde{\phi} = \mathscr{E}_0 * (\widetilde{p} - \widetilde{n}) = \frac{1}{(N-2)\omega_N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\widetilde{n}(y,t) - \widetilde{p}(y,t)}{|x-y|^{N-2}}\,dy.$$

Лемма доказана полностью.

§ 5. Объемный и поверхностный потенциалы

Рассмотрим следующий поверхностный потенциал по нижней крышке области $\mathbb{R}^N \times (0,T)$:

$$V_0(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_c(x-y,t)\mu_0(y)\,dy, \quad c > 0.$$

Справедливы очевидные преобразования:

$$V_0(x,t) = \frac{1}{\pi^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-|z|^2\right)\mu_0(x + 2c\sqrt{t}z)\,dz.$$

Имеет место следующая:

Лемма 5.1. *Если $\mu_0 \in C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, то $V_0 \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$ для любого $T > 0$. Если $\mu_0 \in C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N)$, то*

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{x^1\neq x^2}\frac{\left|V_0(x^1,t) - V_0(x^2,t)\right|}{|x^1 - x^2|} \leqslant C(N)\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|D_x\mu_0(x)|. \qquad (5.1)$$

Если $\mu_0 \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^N)$ при $\alpha \in (0,1)$, то для любых $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^N$ и любых $t^1, t^2 \in [0,T]$ справедливо неравенство:

$$\left|D_{x_j}V_0(x^1,t^1) - D_{x_j}V_0(x^2,t^2)\right| \leqslant \\ \leqslant C(N)\left[D_{x_j}\mu_0(x)\right]_\alpha \left[|x^1 - x^2|^\alpha + |t^1 - t^2|^{\alpha/2}\right]. \qquad (5.2)$$

Если $\mu_0 \in C_b(\mathbb{R}^N)$, то для любого $R > 0$ имеем:

$$\lim_{t\to+0}\sup_{x\in O(0,R)}|V_0(x,t) - \mu_0(x)| = 0.$$

Наконец, если $\mu_0 \in C_b(\mathbb{R}^N)$, *то имеем:*

$$\mathfrak{M}_{x,t} V_0(x,t) = 0 \quad \textit{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,+\infty), \quad \mathfrak{M}_{x,t} := \frac{\partial}{\partial t} - c^2 \Delta_x,$$

причем для любой функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times (-\infty, T))$ *справедливо равенство*:

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} V_0(x,t) \mathfrak{M}^T_{x,t} \psi(x,t)\, dx\, dt - \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mu_0(x) \psi(x,0)\, dx = 0,$$

$$\mathfrak{M}^T_{x,t} := -\frac{\partial}{\partial t} - c^2 \Delta_x.$$

Доказательство. *Шаг 1.* Справедливы следующие неравенства:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |V_0(x,t_1) - V_0(x,t_2)|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-|z|^2\right) \left|\mu_0(x + 2c\sqrt{t_1} z) - \mu_0(x + 2\sqrt{t_2} z)\right|\, dz\, dx =$$
$$= \frac{1}{\pi^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-|z|^2\right) |\mu_0(y + \delta z) - \mu_0(y)|\, dy\, dz, \quad \delta := 2c(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}). \tag{5.3}$$

Справедливы равенства:

$$\mu_0(y + \delta z) - \mu_0(y) = \int\limits_0^1 \frac{d}{d\sigma} \mu_0(y + \sigma\delta z)\, d\sigma = \delta \int\limits_0^1 (z, D_y \mu_0(y + \sigma \delta z))\, d\sigma,$$

из которых получаем оценку:

$$|\mu_0(y + \delta z) - \mu_0(y)| \leqslant |\delta||z| \int\limits_0^1 |D_y \mu_0(y + \sigma\delta z)|\, d\sigma. \tag{5.4}$$

Из (5.3) с учетом (5.4) получаем оценку:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |V_0(x,t_1) - V_0(x,t_2)|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant 2c \left|\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}\right| \frac{1}{\pi^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |z| \exp\left(-|z|^2\right)\, dz \int\limits_{\mathbb{R}^N} |D_y \mu_0(y)|\, dy \to +0$$

при $|t_1 - t_2| \to +0$. Аналогичным образом получаем оценку:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |V_0(x,t_1) - V_0(x,t_2)| \leqslant$$
$$\leqslant 2c \left|\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2}\right| \sup_{y \in \mathbb{R}^N} |D_y \mu_0(y)| \frac{1}{\pi^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |z| \exp\left(-|z|^2\right)\, dz \to +0$$

при $|t_1-t_2| \to +0$. Наконец, очевидно, что для каждого фиксированного $t \in [0,T]$ потенциал $V_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Шаг 2. Доказательство (5.1). Справедливы неравенства при $x^\sigma := \sigma x^1 + (1-\sigma)x^2$:

$$\left|V_0(x^1,t) - V_0(x^2,t)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-|z|^2\right) |x^1-x^2| \int\limits_0^1 \left|D_{x^\sigma}\mu_0(x^\sigma + 2c\sqrt{t}z)\right| d\sigma\, dz \leqslant$$
$$\leqslant C(N)|x^1-x^2| \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |D_x\mu_0(x)|\,. \tag{5.5}$$

Неравенство (5.2) доказывается аналогичным образом. Лемма доказана полностью.

Теперь рассмотрим следующий поверхностный потенциал по верхней крышке области $\mathbb{R}^N \times (0,t)$:

$$W_0(x,t) := \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\mu_1(y,t)}{|x-y|^{N-2}}\, dy.$$

Справедлива следующая:

Лемма 5.2. *Если $\mu_1 \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$, то $W_0 \in C([0,T]; C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N))$. Кроме того, для любых $\mu_{11}, \mu_{12} \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$ справедлива оценка*:

$$|||D_x W_0[\mu_{11}] - D_x W_0[\mu_{12}]|||_{\infty,T} \leqslant C(N)\|\mu_{11} - \mu_{12}\|_T. \tag{5.6}$$

Если $\mu_1 \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$, то справедлива оценка:

$$\sup_{t\in[0,T]} [D_{x_j} W_0(x,t)]_\alpha \leqslant C(N,\alpha)\|\mu_1\|_T \quad \text{для любого} \quad \alpha \in (0,1), \quad j = \overline{1,N}. \tag{5.7}$$

Если $\mu_1 \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$ и дополнительно для каждого $t \in [0,T]$ функция $\mu_1 \in C^\alpha_{x,loc}(\mathbb{R}^N)$ при $\alpha \in (0,1)$, то для всех $(x,t) \in O(x_0,R_0/2)\times[0,T]$ имеем $W_0 \in C^{(2)}_{x,b}(\mathbb{R}^N)$ для каждого $t \in [0,T]$ и справедливо равенство:

$$D^2_{x_jx_k} W_0(x,t) = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(x_0,R_0)} \mu_1(y,t)\left(D^2_{y_jy_k}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right) dy +$$
$$+ \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int\limits_{O(x_0,R_0)} (\mu_1(y,t) - \mu_1(x,t))\left(D^2_{y_jy_k}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right) dy +$$
$$+ \frac{\mu_1(x,t)}{(N-2)\omega_N} \int\limits_{\partial O(x_0,R_0)} \left(D_{y_k}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)\cos(\mathbf{n}_y, \mathbf{e}_j)\, dS_y, \tag{5.8}$$

где $\mathbf{n}_y$ — внешняя нормаль по отношению к шару $O(x_0,R_0)$, причем

$$\Delta_x W_0(x,t) = \mu_1(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]. \tag{5.9}$$

Более того, для любой функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times (-\infty, T))$ *справедливо равенство*:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(D_x W_0(x,t), D_x \psi(x,t)\right)\, dx\, dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1(x,t)\psi(x,t)\, dx\, dt = 0.$$

Доказательство. *Шаг 1. Доказательство* (5.6). Доказательство основано на классических свойствах ньютоновского потенциала и может быть доказано на основе, например, результатов леммы 4.1 работы [9].

Шаг 2. Доказательство (5.7). Пусть $\delta := |x^1 - x^2| \in (0,1)$ и $x^0 = (x^1 + x^2)/2$. Справедливы равенства:

$$D_{x_j} W_0(x^1,t) - D_{x_j} W_0(x^2,t) = \frac{1}{(N-2)\omega_N}\left[I_1 + I_2 + I_3\right], \tag{5.10}$$

$$I_1 := -\int_{O(x^0,\delta)} \left(D_{y_j} \frac{1}{|x^1 - y|^{N-2}}\right) \mu_1(y,t)\, dy,$$

$$I_2 := \int_{O(x^0,\delta)} \left(D_{y_j} \frac{1}{|x^2 - y|^{N-2}}\right) \mu_1(y,t)\, dy,$$

$$I_3 := -\int_{\mathbb{R}^N \setminus O(x^0,\delta)} \left[D_{y_j} \frac{1}{|x^1 - y|^{N-2}} - D_{y_j} \frac{1}{|x^2 - y|^{N-2}}\right] \mu_1(y,t)\, dy. \tag{5.11}$$

Если $y \in O(x^0, \delta)$, то

$$|x^1 - y| \leqslant |x^0 - y| + |x^0 - x^1| < \frac{3}{2}\delta, \quad |x^2 - y| \leqslant |x^0 - y| + |x^0 - x^2| < \frac{3}{2}\delta. \tag{5.12}$$

С учетом (5.12) получим оценки:

$$|I_1| \leqslant C(N)\|\mu_1\|_{\infty,T} \int_{O(x^1,3/2\delta)} \frac{1}{|x^1 - y|^{N-1}}\, dy \leqslant C(N)\|\mu_1\|_{\infty,T}|x^1 - x^2|, \tag{5.13}$$

$$|I_2| \leqslant C(N)\|\mu_1\|_{\infty,T} \int_{O(x^2,3/2\delta)} \frac{1}{|x^2 - y|^{N-1}}\, dy \leqslant C(N)\|\mu_1\|_{\infty,T}|x^1 - x^2|. \tag{5.14}$$

Если $y \in \mathbb{R}^N \setminus O(x^0, \delta)$, то имеет место оценка:

$$|x^\sigma - y| \geqslant |x^0 - y| - |x^\sigma - x^0| \geqslant \frac{1}{2}|x^0 - y|, \quad x^\sigma = \sigma x^1 + (1-\sigma)x^2, \quad \sigma \in [0,1], \tag{5.15}$$

$$D_{y_j} \frac{1}{|x^1 - y|^{N-2}} - D_{y_j} \frac{1}{|x^2 - y|^{N-2}} = \int_0^1 \frac{d}{d\sigma}\left(D_{y_j} \frac{1}{|x^\sigma - y|^{N-2}}\right) =$$

$$= \int_0^1 \left(x^1 - x^2, D_{x^\sigma} D_{y_j} \frac{1}{|x^\sigma - y|^{N-2}}\right) d\sigma. \tag{5.16}$$

Из (5.16) с учетом (5.15) получим оценку:

$$\left|D_{y_j}\frac{1}{|x^1-y|^{N-2}}-D_{y_j}\frac{1}{|x^2-y|^{N-2}}\right|\leqslant$$
$$\leqslant C(N)|x^1-x^2|\int\limits_0^1\frac{1}{|x^\sigma-y|^N}\,d\sigma\leqslant C(N)|x^1-x^2|\frac{1}{|x^0-y|^N}. \quad (5.17)$$

С учетом (5.17) из (5.11) получим оценку:

$$|I_3|\leqslant C(N)|x^1-x^2|\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(x^0,\delta)}\frac{|\mu_1(y,t)|}{|y-x^0|^N}\,dy=$$
$$=C(N)|x^1-x^2|\int\limits_{O(x^0,1)\setminus O(x^0,\delta)}\frac{|\mu_1(y,t)|}{|y-x^0|^N}\,dy+$$
$$+C(N)|x^1-x^2|\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(x^0,1)}\frac{|\mu_1(y,t)|}{|y-x^0|^N}\,dy\leqslant$$
$$\leqslant C(N)[|x^1-x^2|\left|\ln|x^1-x^2|\right|\|\mu_1\|_{\infty,T}+|x^1-x^2|\|\mu_1\|_{1,T}]. \quad (5.18)$$

Итак, с одной стороны, из (5.10) с учетом (5.13), (5.14) и (5.18) получим оценку:

$$\left|D_{x_j}W_0(x^1,t)-D_{x_j}W_0(x^2,t)\right|\leqslant C(N,\alpha)\|\mu_1\|_T|x^1-x^2|^\alpha \quad (5.19)$$

при $|x^1-x^2|<1$ и для любого $\alpha\in(0,1)$. С другой стороны, при $|x^1-x^2|\geqslant 1$ имеем:

$$\left|D_{x_j}W_0(x^1,t)-D_{x_j}W_0(x^2,t)\right|\leqslant 2\||D_xW_0|\|_{\infty,T}|x^1-x^2|^\alpha\leqslant C(N)\|\mu_1\|_T|x^1-x^2|^\alpha \quad (5.20)$$

для любого $\alpha\in(0,1)$. Таким образом, из (5.19) и (5.20) получим искомую оценку:

$$\sup_{t\in[0,T]}[D_{x_j}W_0(x,t)]_\alpha=\sup_{t\in[0,T]}\sup_{x^1\neq x^2}\frac{\left|D_{x_j}W_0(x^1,t)-D_{x_j}W_0(x^2,t)\right|}{|x^1-x^2|^\alpha}\leqslant C(N,\alpha)\|\mu_1\|_T.$$

Шаг 3. Доказательство (5.8) *и* (5.9). Является классическим результатом теории ньютоновского потенциала.

Рассмотрим следующий объемный потенциал:

$$U_0[\rho_0,\rho_1](x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho_0(y,\tau)\left(D_y\mathscr{E}_c(x-y,t-\tau),D_y\rho_1(y,\tau)\right)\,dy\,d\tau.$$

Справедлива следующая:

Лемма 5.3. *Если* $\rho_0\in C([0,T];L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$, $\rho_1\in C([0,T];C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N))$, *то* $U_0\in C([0,T];L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$. *Кроме того, справедлива оценка*:

$$\|U_0[\rho_{01},\rho_{11}]-U_0[\rho_{02},\rho_{12}]\|_T\leqslant C(T,\theta,N)T^\theta\Big[\||D_x\rho_{11}|\|_{\infty,T}\|\rho_{01}-\rho_{02}\|_T+$$
$$+\|\rho_{02}\|_T\||D_x\rho_{11}-D_x\rho_{12}|\|_{\infty,T}\Big], \quad (5.21)$$

для любого $\theta \in (0, 1/2)$ *и любых*

$$\rho_{01}, \rho_{02} \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)), \quad \rho_{11}, \rho_{12} \in C([0,T]; C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N)).$$

Наконец, если $\rho_0 \in C([0,T]; L^\infty(\mathbb{R}^N))$, $\rho_1 \in C([0,T]; C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N))$ *и дополнительно* $\rho_0, D_{x_j}\rho_1 \in C^\alpha_{x,loc}(\mathbb{R}^N)$ *при* $\alpha \in (0,1)$, $j = \overline{1,N}$ *равномерно по* $t \in [0,T]$, *то* $U_0 \in C^{(1,0)}_{x,t}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ *и справедлива формула*:

$$D_{x_j}U_0(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(D_{y_j} D_y \mathscr{E}_c(x-y, t-\tau), \rho_0(x,\tau) D_x\rho_1(x,\tau) - \\ - \rho_0(y,\tau) D_y \rho_1(y,\tau) \Big)\, dy\, d\tau, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T], \quad j = \overline{1,N}. \quad (5.22)$$

Если $\rho_0 \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$, $\rho_1 \in C([0,T]; C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N))$, *то*

$$\sup_{t\in[0,T]} [U_0(x,t)]_\alpha \leqslant C(N,\alpha) T^{(1-\alpha)/2} \|\rho_0\|_T \| |D_x\rho_1| \|_{\infty,T} \quad (5.23)$$

для любого $\alpha \in (0,1)$.

Доказательство. *Шаг 1.* Пусть для определенности $0 \leqslant t_2 < t_1 \leqslant T$. Тогда справедливо равенство:

$$U_0(x,t_1) - U_0(x,t_2) = \int\limits_{t_2}^{t_1} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho_0(y,\tau) \left(D_y \mathscr{E}_c(x-y, t_1-\tau), D_y\rho_1(y,\tau) \right) dy\, d\tau + \\ + \int\limits_0^{t_2} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho_0(y,\tau) \left(D_y \mathscr{E}_c(x-y, t_1-\tau) - D_y \mathscr{E}_c(x-y, t_2-\tau), D_y\rho_1(y,\tau) \right) dy\, d\tau := \\ := J_1(x,t_1,t_2) + J_2(x,t_1,t_2). \quad (5.24)$$

Заметим, что справедливы следующие оценки фундаментального решения $\mathscr{E}_c(x,t)$:

$$|D_x \mathscr{E}_c(x,t)| \leqslant C \frac{1}{t^{\mu_1} |x|^{N+1-2\mu_1}}, \quad \mu_1 \in (1/2, 1), \quad (5.25)$$

$$|D_x \mathscr{E}_c(x,t)| \leqslant C \frac{t^{\mu_2}}{|x|^{N+1+2\mu_2}}, \quad \mu_2 > 0. \quad (5.26)$$

Поэтому для J_1 имеют место такие оценки:

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{\mathbb{R}^N} |J_1(x,t_1,t_2)|\,dx \leqslant \\
\leqslant \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]} |D_x\rho_1(x,t)| \sup_{t\in[0,T]}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\rho_0(x,t)|\,dx \int\limits_{t_2}^{t_1}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |D_x\mathscr{E}_c(x,t_1-\tau)|\,dx\,d\tau \leqslant \\
\leqslant C\int\limits_{t_2}^{t_1}\left[\frac{1}{(t_1-\tau)^{\mu_1}}\int\limits_{O(0,R)}\frac{dy}{|y|^{N+1-2\mu_1}} + (t_1-\tau)^{\mu_2}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(0,R)}\frac{dy}{|y|^{N+1+2\mu_2}}\right]d\tau \leqslant \\
\leqslant C(R)\left[\frac{(t_1-t_2)^{1-\mu_1}}{1-\mu_1}+\frac{(t_1-t_2)^{1+\mu_2}}{1+\mu_2}\right]\to +0 \quad (5.27)
\end{gathered}
$$

при $|t_1-t_2|\to+0$. Аналогичным образом, получаем оценку:

$$
\begin{gathered}
\sup_{x\in\mathbb{R}^N}|J_1(x,t_1,t_2)| \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]}|D_x\rho_1(x,t)| \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]}|\rho_0(x,t)|\times \\
\times\int\limits_{t_2}^{t_1}|D_x\mathscr{E}_c(x,t_1-\tau)|\,dx\,d\tau \leqslant C(R)\left[\frac{(t_1-t_2)^{1-\mu_1}}{1-\mu_1}+\frac{(t_1-t_2)^{1+\mu_2}}{1+\mu_2}\right]\to+0 \\
(5.28)
\end{gathered}
$$

при $|t_1-t_2|\to+0$. Выражение для J_2 перепишем в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
J_2(x,t_1,t_2) = \\
= \int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho_0(x-y,\tau)\left(D_y\mathscr{E}_c(y,t_1-\tau)-D_y\mathscr{E}_c(y,t_2-\tau),D_x\rho_1(x-y,\tau)\right)dy\,d\tau = \\
= \int\limits_0^{t_2}\int\limits_{O(0,\delta)}\rho_0(x-y,\tau)\left(D_y\mathscr{E}_c(y,t_1-\tau)-D_y\mathscr{E}_c(y,t_2-\tau),D_x\rho_1(x-y,\tau)\right)dy\,d\tau + \\
+\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(0,\delta)}\rho_0(x-y,\tau)\left(D_y\mathscr{E}_c(y,t_1-\tau)-D_y\mathscr{E}_c(y,t_2-\tau),D_x\rho_1(x-y,\tau)\right)dy\,d\tau = \\
= J_{21}(x,t_1,t_2)+J_{22}(x,t_1,t_2), \quad \delta=|t_1-t_2|^{1/2}. \quad (5.29)
\end{gathered}
$$

Для $J_{21}(x,t_1,t_2)$ справедливы следующие оценки при $\mu_1 \in (1/2,1)$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |J_{21}(x,t_1,t_2)|\,dx \leqslant \sup_{t\in[0,T]}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\rho_0(x,t)|\,dx \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]} |D_x\rho_1(x,t)|\times$$
$$\times C\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{O(0,\delta)} \frac{1}{|y|^{N+1-2\mu_1}}\left[\frac{1}{(t_1-\tau)^{\mu_1}}+\frac{1}{(t_2-\tau)^{\mu_1}}\right]dy\,d\tau =$$
$$= C\frac{\delta^{2\mu_1-1}}{2\mu_1-1}\left[\frac{(t_1-t_1)^{1-\mu_1}}{1-\mu_1}+\frac{t_2^{1-\mu_1}}{1-\mu_1}\right] \leqslant C(t_1-t_2)^{(2\mu_1-1)/2}, \quad \mu_1\in(1/2,1),$$

и аналогичным образом получаем такую оценку:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |J_{21}(x,t_1,t_2)|\,dx \leqslant \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]} |\rho_0(x,t)| \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]} |D_x\rho_1(x,t)|\times$$
$$\times C\int\limits_0^{t_2}\int\limits_{O(0,\delta)} \frac{1}{|y|^{N+1-2\mu_1}}\left[\frac{1}{(t_1-\tau)^{\mu_1}}+\frac{1}{(t_2-\tau)^{\mu_1}}\right]dy\,d\tau =$$
$$= C\frac{\delta^{2\mu_1-1}}{2\mu_1-1}\left[\frac{(t_1-t_1)^{1-\mu_1}}{1-\mu_1}+\frac{t_2^{1-\mu_1}}{1-\mu_1}\right] \leqslant C(t_1-t_2)^{(2\mu_1-1)/2}, \quad \mu_1\in(1/2,1).$$

Для того чтобы получить оценку величины $J_{22}(x,t_1,t_2)$ заметим, что имеют место неравенства:

$$D_y\mathscr{E}_c(y,t_1-\tau) - D_y\mathscr{E}_c(y,t_2-\tau) = \int\limits_0^1 d\sigma\frac{d}{d\sigma}D_y\mathscr{E}_c(y,\sigma t_1+(1-\sigma t_2-\tau)) =$$
$$= (t_1-t_2)\int\limits_0^1 d\sigma D_{t_\sigma}D_y\mathscr{E}_c(y,t_\sigma), \quad t_\sigma := \sigma t_1+(1-\sigma)t_2-\tau, \tag{5.30}$$

причем имеет место оценка:

$$|D_tD_x\mathscr{E}_c(x,t)| \leqslant C\frac{1}{t^{\mu_1}|x|^{N+3-2\mu_1}}, \quad \mu_1\in(0,1),$$

с учетом которой из (5.30) получим неравенство:

$$|D_y\mathscr{E}_c(y,t_1-\tau) - D_y\mathscr{E}_c(y,t_2-\tau)| \leqslant$$
$$\leqslant C[t_1-t_2]\frac{1}{|y|^{N+3-2\mu_1}}\int\limits_0^1\frac{\theta(t_\sigma)}{t_\sigma^{\mu_1}} \leqslant C[t_1-t_2]\frac{1}{|y|^{N+3-2\mu_1}}\frac{1}{(t_2-\tau)^{\mu_1}}.$$

Справедлива следующая оценка:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |J_{22}(x,t_1,t_2)|\, dx \leqslant$$
$$\leqslant C \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]} |D_x\rho_1(x,t)| \sup_{t\in[0,T]} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\rho_0(x,t)|\, dx\times$$
$$\times [t_1-t_2] \int\limits_0^{t_2} \frac{d\tau}{(t_2-\tau)^{\mu_1}} \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(0,\delta)} \frac{dy}{|y|^{N+3-2\mu_1}} \leqslant C\frac{t_1-t_2}{\delta^{3-2\mu_1}} =$$
$$= C(t_1-t_2)^{(2\mu_1-1)/2}, \quad \mu_1\in(1/2,1).$$

Аналогичным образом получаем оценку:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |J_{22}(x,t_1,t_2)| \leqslant$$
$$\leqslant C \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]} |D_x\rho_1(x,t)| \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]} |\rho_0(x,t)|\, dx\times$$
$$\times [t_1-t_2] \int\limits_0^{t_2} \frac{d\tau}{(t_2-\tau)^{\mu_1}} \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(0,\delta)} \frac{dy}{|y|^{N+3-2\mu_1}} \leqslant C\frac{t_1-t_2}{\delta^{3-2\mu_1}} =$$
$$= C(t_1-t_2)^{(2\mu_1-1)/2}, \quad \mu_1\in(1/2,1). \tag{5.31}$$

Итак, из (5.29)–(5.31) получаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |J_2(x,t_1,t_2)|\, dx \leqslant (t_1-t_2)^{(2\mu_1-1)/2}, \tag{5.32}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |J_{22}(x,t_1,t_2)| \leqslant C(t_1-t_2)^{(2\mu_1-1)/2}, \tag{5.33}$$

где $\mu_1\in(1/2,1)$. Следовательно, из (5.24) с учетом (5.27), (5.28) и (5.32), (5.33) получим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |U_0(x,t_1)-U_0(x,t_2)| \leqslant C(t_1-t_2)^{\theta},$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |U_0(x,t_1)-U_0(x,t_2)| \leqslant C(t_1-t_2)^{\theta}$$

для любого $\theta\in(0,1/2)$ и всех $0\leqslant t_2<t_1\leqslant T$. Наконец, очевидно, что для каждого $t\in[0,T]$ функция $U_0\in L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Шаг 2. Доказательство (5.21). Пусть

$$\rho_{01},\rho_{02}\in C([0,T];L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)), \quad \rho_{11},\rho_{12}\in C([0,T];C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N)).$$

Тогда справедливо равенство:

$$U_0[\rho_{01},\rho_{11}](x,t)-U_0[\rho_{02},\rho_{12}](x,t)=$$
$$=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left[\rho_{01}(y,\tau)-\rho_{02}(y,\tau)\right]\left(D_y\mathscr{E}_c(x-y,t-\tau),D_y\rho_{11}(y,\tau)\right)\,dy\,d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}\rho_{02}(y,\tau)\left(D_y\mathscr{E}_c(x-y,t-\tau),D_y\left[\rho_{11}(y,\tau)-\rho_{12}(y,\tau)\right]\right)\,dy\,d\tau:=$$
$$:=K_1+K_2. \quad (5.34)$$

С учетом (5.25) и (5.26) для любых $R>0$, $\mu_1\in(1/2,1)$ и $\mu_2>0$ имеют место оценки:

$$\|K_1\|_{1,T}\leqslant C\|\rho_{01}-\rho_{02}\|_{1,T}|||D_x\rho_{11}|||_{\infty,T}\times$$
$$\times\left[\frac{T^{1-\mu_1}}{1-\mu_1}\frac{R^{2\mu_1-1}}{2\mu_1-1}+\frac{1}{(N+2\mu_2)R^{N+2\mu_2}}\frac{T^{\mu_2+1}}{\mu_2+1}\right], \quad (5.35)$$

$$\|K_1\|_{\infty,T}\leqslant C\|\rho_{01}-\rho_{02}\|_{\infty,T}|||D_x\rho_{11}|||_{\infty,T}\times$$
$$\times\left[\frac{T^{1-\mu_1}}{1-\mu_1}\frac{R^{2\mu_1-1}}{2\mu_1-1}+\frac{1}{(N+2\mu_2)R^{N+2\mu_2}}\frac{T^{\mu_2+1}}{\mu_2+1}\right],$$

$$\|K_2\|_{1,T}\leqslant C\|\rho_{02}\|_{1,T}|||D_x\rho_{11}-D_x\rho_{12}|||_{\infty,T}\times$$
$$\times\left[\frac{T^{1-\mu_1}}{1-\mu_1}\frac{R^{2\mu_1-1}}{2\mu_1-1}+\frac{1}{(N+2\mu_2)R^{N+2\mu_2}}\frac{T^{\mu_2+1}}{\mu_2+1}\right],$$

$$\|K_2\|_{\infty,T}\leqslant C\|\rho_{02}\|_{\infty,T}|||D_x\rho_{11}-D_x\rho_{12}|||_{\infty,T}\times$$
$$\times\left[\frac{T^{1-\mu_1}}{1-\mu_1}\frac{R^{2\mu_1-1}}{2\mu_1-1}+\frac{1}{(N+2\mu_2)R^{N+2\mu_2}}\frac{T^{\mu_2+1}}{\mu_2+1}\right]. \quad (5.36)$$

Из (5.34) с учетом оценок (5.35)–(5.36) для любого $\theta\in(0,1/2)$ получим оценку:

$$\|U_0[\rho_{01},\rho_{11}]-U_0[\rho_{02},\rho_{12}]\|_T\leqslant C(T,\theta)T^\theta\Big[|||D_x\rho_{11}|||_{\infty,T}\|\rho_{01}-\rho_{02}\|_T+$$
$$+\|\rho_{02}\|_T|||D_x\rho_{11}-D_x\rho_{12}|||_{\infty,T}\Big],$$

где постоянная $C=C(\theta,T,N)$ является монотонно неубывающей функцией по $T>0$.

Шаг 3. Доказательство (5.22). Пусть $x\in O(x_0,R_0/2)$. Справедливо равенство:

$$U_0(x,t)=U_{01}(x,t)+U_{02}(x,t),$$

$$U_{01}(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(x_0,R_0)}\rho_0(y,\tau)\left(D_y\mathscr{E}_c(x-y,t-\tau),D_y\rho_1(y,\tau)\right)\,dy\,d\tau,$$

$$U_{02}(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_{O(x_0,R_0)}\rho_0(y,\tau)\left(D_y\mathscr{E}_c(x-y,t-\tau),D_y\rho_1(y,\tau)\right)\,dy\,d\tau.$$

Совершенно понятно, что $U_{01}(x,t)\in C^{(1,0)}_{x,t}(\overline{O(x_0,R_0/2)}\times[0,T])$, причем

$$D_{x_j}U_{01}(x,t)=-\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(x_0,R_0)}\rho_0(y,\tau)\left(D_{y_j}D_y\mathscr{E}_c(x-y,t-\tau),D_y\rho_1(y,\tau)\right)\,dy\,d\tau. \tag{5.37}$$

Для U_{02} воспользуемся стандартной схемой. Введем функцию:

$$\eta(s)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad 0\leqslant s\leqslant 1,\\ 1, & \text{если}\quad s\geqslant 2,\end{cases}\qquad \eta(s)\in C^{(1)}[0,+\infty),\quad 0\leqslant\eta'(s)\leqslant 2.$$

Для любого $\varepsilon>0$ рассмотрим функцию:

$$U_{02\varepsilon}(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_{O(x_0,R_0)}\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\rho_0(y,\tau)\left(D_y\mathscr{E}_c(x-y,t-\tau),D_y\rho_1(y,\tau)\right)\,dy\,d\tau.$$

Очевидно, что $U_{02\varepsilon}\in C^{(1,0)}_{x,t}(\overline{O(x_0,R_0/2)}\times[0,T])$ при $\varepsilon>0$, причем

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\sup_{(x,t)\in\overline{O(x_0,R_0/2)}\times[0,T]}|U_{02\varepsilon}(x,t)-U_{02}(x,t)|=0. \tag{5.38}$$

Введем функцию:

$$\begin{aligned}U_{02j}(x,t):=\int\limits_0^t\int\limits_{O(x_0,R_0)}\Big(D_{y_j}D_y\mathscr{E}_c(x-y,t-\tau),\rho_0(x,\tau)D_x\rho_1(x,\tau)-\\ -\rho_0(y,\tau)D_y\rho_1(y,\tau)\Big)\,dy\,d\tau-\\ -\int\limits_0^t\int\limits_{\partial O(x_0,R_0)}\left(D_y\mathscr{E}_c(x-y,t-\tau),\rho_0(x,\tau)D_x\rho_1(x,\tau)\right)\cos(\mathbf{n}_y,\mathbf{e}_j)\,dS_y\,d\tau,\end{aligned}$$

где $\mathbf{n}_y$ — внешняя нормаль по отношению к шару $O(x_0,R_0)$. Несложно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\sup_{(x,t)\in\overline{O(x_0,R_0/2)}\times[0,T]}\left|D_{x_j}U_{02\varepsilon}(x,t)-U_{02j}(x,t)\right|=0. \tag{5.39}$$

Из (5.38) и (5.39) вытекает, что

$$\begin{aligned}D_{x_j}U_{02}(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_{O(x_0,R_0)}\Big(D_{y_j}D_y\mathscr{E}_c(x-y,t-\tau),\rho_0(x,\tau)D_x\rho_1(x,\tau)-\\ -\rho_0(y,\tau)D_y\rho_1(y,\tau)\Big)\,dy\,d\tau-\\ -\int\limits_0^t\int\limits_{\partial O(x_0,R_0)}\left(D_y\mathscr{E}_c(x-y,t-\tau),\rho_0(x,\tau)D_x\rho_1(x,\tau)\right)\cos(\mathbf{n}_y,\mathbf{e}_j)\,dS_y\,d\tau,\end{aligned} \tag{5.40}$$

Теперь заметим, что в силу оценки (5.26) в пределе при $R_0 \to +\infty$ из (5.37) и (5.40) получим, что

$$D_{x_j}U_0(x,t) = D_{x_j}U_{01}(x,t) + D_{x_j}U_{02}(x,t) \to$$
$$\to \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Big(D_{y_j}D_y\mathscr{E}_c(x-y,t-\tau), \rho_0(x,\tau)D_x\rho_1(x,\tau) - \rho_0(y,\tau)D_y\rho_1(y,\tau)\Big)\,dy\,d\tau.$$

Стало быть, приходим к выводу, что

$$D_{x_j}U_0(x,t) =$$
$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Big(D_{y_j}D_y\mathscr{E}_c(x-y,t-\tau), \rho_0(x,\tau)D_x\rho_1(x,\tau) - \rho_0(y,\tau)D_y\rho_1(y,\tau)\Big)\,dy\,d\tau.$$

Шаг 4. Доказательство (5.23). Пусть $\delta := |x^1 - x^2| \in (0,1)$, $x^0 = (x^1 + x^2)/2$. Тогда справедливо равенство:

$$U_0(x^1,t) - U_0(x^2,t) = I_1 + I_2 + I_3, \tag{5.41}$$

$$I_1 := \int_0^t \int_{O(x^0,\delta)} \rho_0(y,\tau)\left(D_y\mathscr{E}_c(x^1-y,t-\tau), D_y\rho_1(y,\tau)\right)\,dy\,d\tau,$$

$$I_2 := -\int_0^t \int_{O(x^0,\delta)} \rho_0(y,\tau)\left(D_y\mathscr{E}_c(x^2-y,t-\tau), D_y\rho_1(y,\tau)\right)\,dy\,d\tau,$$

$$I_3 := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N\setminus O(x^0,\delta)} \rho_0(y,\tau)\left(D_y\mathscr{E}_c(x^1-y,t-\tau) - D_y\mathscr{E}_c(x^2-y,t-\tau), D_y\rho_1(y,\tau)\right)\,dy\,d\tau.$$

Для I_1 и I_2 справедливы оценки при $\mu_1 \in (1/2,1)$:

$$|I_1| \leqslant C(N)\|\rho_0\|_{\infty,T}\||D_x\rho_1|\|_{\infty,T}\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\mu_1}}\int_{O(x^1,3\delta/2)} \frac{dy}{|x^1-y|^{N+1-2\mu_1}} \leqslant$$
$$\leqslant C(N)\|\rho_0\|_{\infty,T}\||D_x\rho_1|\|_{\infty,T}\frac{T^{1-\mu_1}}{1-\mu_1}\frac{|x^1-x^2|^{2\mu_1-1}}{2\mu_1-1}, \tag{5.42}$$

$$|I_2| \leqslant C(N)\|\rho_0\|_{\infty,T}\||D_x\rho_1|\|_{\infty,T}\int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\mu_1}}\int_{O(x^2,3\delta/2)} \frac{dy}{|x^2-y|^{N+1-2\mu_1}} \leqslant$$
$$\leqslant C(N)\|\rho_0\|_{\infty,T}\||D_x\rho_1|\|_{\infty,T}\frac{T^{1-\mu_1}}{1-\mu_1}\frac{|x^1-x^2|^{2\mu_1-1}}{2\mu_1-1}.$$

Для оценивания I_3 заметим, что при $y \in \mathbb{R}^N \backslash O(x^0,\delta)$ справедлива оценка при $\mu_1 \in (1/2, 1)$:

$$\big|D_y \mathscr{E}_c(x^1-y,t-\tau) - D_y \mathscr{E}_c(x^2-y,t-\tau)\big| \leqslant \\ \leqslant C(N)|x^1-x^2| \frac{1}{(t-\tau)^{\mu_1}} \frac{1}{|x^0-y|^{N+2-2\mu_1}}.$$

Тогда имеем:

$$|I_3| \leqslant C(N)\|\rho_0\|_{\infty,T}\||D_x\rho_1|\|_{\infty,T}|x^1-x^2| \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\mu_1}} \times \\ \times \int\limits_{\mathbb{R}^N\backslash O(x^0,\delta)} \frac{dy}{|x^0-y|^{N+2-2\mu_1}} \leqslant C(N)\|\rho_0\|_{\infty,T}\||D_x\rho_1|\|_{\infty,T} \frac{T^{1-\mu_1}}{1-\mu_1} \frac{|x^1-x^2|^{2\mu_1-1}}{1-\mu_1}. \tag{5.43}$$

Таким образом, из (5.41) с учетом (5.42)–(5.43) получим оценку:

$$\big|U_0(x^1,t) - U_0(x^2,t)\big| \leqslant C(N,\alpha)\|\rho_0\|_{\infty,T}\||D_x\rho_1|\|_{\infty,T} T^{(1-\alpha)/2}|x^1-x^2|^\alpha \tag{5.44}$$

для любого $\alpha \in (0,1)$ и $|x^1-x^2| \in (0,1)$. Если $|x^1-x^2| \geqslant 1$, то стандартным образом получаем оценку:

$$\big|U_0(x^1,t) - U_0(x^2,t)\big| \leqslant C(N,\alpha)\|\rho_0\|_{T}\||D_x\rho_1|\|_{\infty,T} T^{(1-\alpha)/2}|x^1-x^2|^\alpha \tag{5.45}$$

для любого $\alpha \in (0,1)$. Таким образом, из (5.44) и (5.45) приходим к оценке (5.23).

Лемма доказана полностью.

Рассмотрим классический объемный тепловой потенциал:

$$U(x,t) := \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_c(x-y,t-\tau)\rho(y,\tau)\,dy\,d\tau.$$

Для потенциала U_0 справедлив набор классических результатов, которые мы собрали в следующей:

Лемма 5.4. *Если $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times (0,T))$, то $U \in C^{(1,0)}_{x,t,b}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ и имеет место равенство*:

$$D_{x_j}U(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} D_{x_j}\mathscr{E}_c(x-y,t-\tau)\rho(y,\tau)\,dy\,d\tau, \quad j=\overline{1,N}.$$

Кроме того, для любых $\theta_1,\theta_2 \in (0,1)$ и $x^1,x^2 \in \mathbb{R}^N$, $t^1,t^2 \in [0,T]$ имеет место неравенство:

$$\big|D_{x_j}U(x^1,t^1) - D_{x_j}U(x^2,t^2)\big| \leqslant \\ \leqslant C(N,\theta_1,\theta_2,T)\|\rho\|_{\infty,T}\left[|x^1-x^2|^{\theta_1} + |t^1-t^2|^{\theta_2/2}\right], \quad j=\overline{1,N}. \tag{5.46}$$

Если $\rho \in C_b(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ *и* $\rho \in C^{\alpha}_{x,loc}(\mathbb{R}^N)$ *при* $\alpha \in (0,1)$ *равномерно по* $t \in [0,T]$, *то* $U \in C^{(2,0)}_{x,t,b}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ *и справедливо равенство*:

$$D^2_{x_j x_k} U(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} D^2_{y_j y_k} \mathscr{E}_c(x-y, t-\tau)\left(\rho(y,\tau) - \rho(x,\tau)\right) dy\, d\tau.$$

Если $\rho \in C_b(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ *и* $\rho \in C^{\alpha}_{x,loc}(\mathbb{R}^N)$ *при* $\alpha \in (0,1)$ *равномерно по* $t \in [0,T]$, *то* $U \in C^{(0,1)}_{x,t,b}(\mathbb{R}^N \times (0,T])$ *и справедливо равенство*:

$$D_t U(x,t) = \rho(x,t) + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} D_t \mathscr{E}_c(x-y, t-\tau)\left(\rho(y,\tau) - \rho(x,\tau)\right) dy\, d\tau. \tag{5.47}$$

Наконец, если $\rho \in C_b(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ *и* $\rho \in C^{\alpha}_{x,loc}(\mathbb{R}^N)$ *при* $\alpha \in (0,1)$ *равномерно по* $t \in [0,T]$, *то справедливо равенство*:

$$D_t U(x,t) - c^2 \Delta_x U(x,t) = \rho(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T].$$

Имеет место предельное свойство:

$$\lim_{t \to +0} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |U(x,t)| = 0.$$

Наконец, из леммы 5.4 вытекает следующая:

Лемма 5.5. *если* $\rho \in C_b(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ *и* $\rho \in C^{\alpha}_{x,loc}(\mathbb{R}^N)$ *при* $\alpha \in (0,1)$ *равномерно по* $t \in [0,T]$, *то для любой функции* $\psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N \times (-\infty, T))$ *справедливо равенство*:

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} U(x,t) \mathfrak{M}^T_{x,t} \psi(x,t)\, dx\, dt = \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho(x,t) \psi(x,t)\, dx\, dt,$$

$$\mathfrak{M}^T_{x,t} := -\frac{\partial}{\partial t} - c^2 \Delta_x.$$

§ 6. Система интегральных уравнений

Рассмотрим следующую вспомогательную систему интегральных уравнений:

$$n(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_a(x-y,t) n_0(y)\, dy -$$
$$- a^2 \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(D_y \mathscr{E}_a(x-y, t-\tau), |n(y,\tau)|^{m-1} n(y,\tau) D_y \phi(y,\tau)\right) dy\, d\tau, \tag{6.1}$$

$$p(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathscr{E}_b(x-y,t)p_0(y)\,dy+$$
$$+b^2\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(D_y\mathscr{E}_b(x-y,t-\tau),|p(y,\tau)|^{m-1}p(y,\tau)D_y\phi(y,\tau)\right)\,dy\,d\tau,$$

$$\phi(x,t)=\frac{1}{(N-2)\omega_N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{n(y,t)-p(y,t)}{|x-y|^{N-2}}\,dy. \tag{6.2}$$

Справедлива следующая:

Лемма 6.1. *Для любых* $n_0,p_0\in C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N)\cap W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ *при* $m\geqslant 1$ *найдется такое максимальное* $T_0=T_0(n_0,p_0)>0$, *что для любого* $T\in(0,T_0)$ *существует единственное решение* $\{n,p,\phi\}\in C([0,T];L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N))\times C([0,T];L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N))\times C([0,T];C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N))$ *системы интегральных уравнений* (6.1)–(6.2), *причем либо* $T_0=+\infty$ *либо* $T_0<+\infty$ *и в этом последнем случае имеем*:

$$\lim_{T\uparrow T_0}\left(\|n\|_T+\|p\|_T\right)=+\infty.$$

Доказательство. Является следствием метода сжимающих отображений и стандартного алгоритма продолжения решения вольтеровских интегральных уравнений во времени, а также лемм 5.1–5.3.

Справедлива следующая:

Лемма 6.2. *При выполнении условий леммы* 6.1 *для любого* $T\in(0,T_0)$ *справедливы оценки*:

$$\sup_{t\in[0,T]}[n(x,t)]_\alpha\leqslant C(N,\alpha)\left[\||D_xn_0|\|_\infty+T^{(1-\alpha)/2}\|n\|_T^m\left(\|n\|_T+\|p\|_T\right)\right], \tag{6.3}$$

$$\sup_{t\in[0,T]}[p(x,t)]_\alpha\leqslant C(N,\alpha)\left[\||D_xp_0|\|_\infty+T^{(1-\alpha)/2}\|p\|_T^m\left(\|n\|_T+\|p\|_T\right)\right], \tag{6.4}$$

$$\sup_{t\in[0,T]}[D_{x_j}\phi(x,t)]_\alpha\leqslant C(N,\alpha)\left(\|n\|_T+\|p\|_T\right),\quad j=\overline{1,N} \tag{6.5}$$

для любого $\alpha\in(0,1)$. *Кроме того, справедливы оценки*:

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{x\neq y}\frac{\left||n(x,t)|^{m-1}n(x,t)D_x\phi(x,t)-|n(y,t)|^{m-1}n(y,t)D_y\phi(y,t)\right|}{|x-y|^\alpha}\leqslant$$
$$\leqslant K(n_0,n,p,T,m,\alpha)<+\infty, \tag{6.6}$$

$$\sup_{t\in[0,T]}\sup_{x\neq y}\frac{\left||p(x,t)|^{m-1}p(x,t)D_x\phi(x,t)-|p(y,t)|^{m-1}p(y,t)D_y\phi(y,t)\right|}{|x-y|^\alpha}\leqslant$$
$$\leqslant K(p_0,p,n,T,m,\alpha)<+\infty \tag{6.7}$$

для любого $\alpha \in (0,1)$, *поэтому* $n, p \in C^{(1,0)}_{x,t,b}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ *и имеют место равенства*:

$$D_{x_j} n(x,t) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-|z|^2\right) D_{x_j} n_0(x + 2a\sqrt{t}z)\, dz -$$
$$- a^2 \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(D_{y_j} D_y \mathscr{E}_a(x-y, t-\tau), |n(x,\tau)|^{m-1} n(x,\tau) D_x \phi(x,\tau) -$$
$$- |n(y,\tau)|^{m-1} n(y,\tau) D_y \phi(y,\tau) \Big)\, dy\, d\tau, \quad (6.8)$$

$$D_{x_j} p(x,t) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-|z|^2\right) D_{x_j} p_0(x + 2b\sqrt{t}z)\, dz +$$
$$+ b^2 \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(D_{y_j} D_y \mathscr{E}_b(x-y, t-\tau), |p(x,\tau)|^{m-1} p(x,\tau) D_x \phi(x,\tau) -$$
$$- |p(y,\tau)|^{m-1} p(y,\tau) D_y \phi(y,\tau) \Big)\, dy\, d\tau, \quad (6.9)$$

$$\Delta_x \phi(x,t) = p(x,t) - n(x,t) \quad \textit{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]. \quad (6.10)$$

Доказательство. Оценки (6.3), (6.4) и (6.5) являются следствиями неравенств (5.1), (5.23) и (5.7). С учетом (6.3)–(6.5) получаем оценки (6.11) и (6.12). При этом в силу оценок (6.11) и (6.12) и (5.22), (5.9) получаем равенства (6.8), (6.9) и (6.10), причем $n, p \in C^{(1,0)}_{x,t}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$. Введем обозначение:

$$J(x,t) := \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(D_{y_j} D_y \mathscr{E}_a(x-y, t-\tau), |n(x,\tau)|^{m-1} n(x,\tau) D_x \phi(x,\tau) -$$
$$- |n(y,\tau)|^{m-1} n(y,\tau) D_y \phi(y,\tau) \Big)\, dy\, d\tau = J_1(x,t) + J_2(x,t), \quad (6.11)$$

$$J_1(x,t) :=$$
$$:= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus O(x,1)} \Big(D_{y_j} D_y \mathscr{E}_a(x-y, t-\tau), |n(x,\tau)|^{m-1} n(x,\tau) D_x \phi(x,\tau) -$$
$$- |n(y,\tau)|^{m-1} n(y,\tau) D_y \phi(y,\tau) \Big)\, dy\, d\tau, \quad (6.12)$$

$$J_2(x,t) :=$$
$$:= \int\limits_0^t \int\limits_{O(x,1)} \Big(D_{y_j} D_y \mathscr{E}_a(x-y, t-\tau), |n(x,\tau)|^{m-1} n(x,\tau) D_x \phi(x,\tau) -$$
$$- |n(y,\tau)|^{m-1} n(y,\tau) D_y \phi(y,\tau) \Big)\, dy\, d\tau.$$

Для J_1 имеет место такая оценка:

$$\|J_1\|_{\infty,T} \leqslant C(N)T\|n\|^m_{\infty,T}\left[\|n\|_T + \|p\|_T\right] \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus O(x,1)} \frac{dy}{|x-y|^{N+2}} = \\ = C(N)T\|n\|^m_{\infty,T}\left[\|n\|_T + \|p\|_T\right].$$

Для J_2 имеет место такая оценка:

$$\|J_2\|_{\infty,T} \leqslant C(N)K(n_0,n,p,T,m,\alpha) \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\mu_1}} \times \\ \times \int\limits_{O(x,1)} \frac{dy}{|x-y|^{N+2-2\mu_1-\alpha}} \leqslant C(N,\alpha,\mu_1)K(n_0,n,p,T,m,\alpha)T^{1-\mu_1} \quad (6.13)$$

для любого $\mu_1 \in (1-\alpha/2, 1)$, $\alpha \in (0,1)$. С учетом (6.11)–(6.13) из равенства (6.8) получим оценку:

$$\||D_x n|\|_{\infty,T} \leqslant C(N)\||D_x n_0|\|_\infty + C(N)T\|n\|^m_{\infty,T}\left[\|n\|_T + \|p\|_T\right] + \\ + C(N,\alpha,\mu_1)K(n_0,n,p,T,m,\alpha)T^{1-\mu_1}. \quad (6.14)$$

Аналогичным образом из равенства (6.9) получим такую оценку:

$$\||D_x p|\|_{\infty,T} \leqslant C(N)\||D_x p_0|\|_\infty + C(N)T\|p\|^m_{\infty,T}\left[\|n\|_T + \|p\|_T\right] + \\ + C(N,\alpha,\mu_1)K(p_0,p,n,T,m,\alpha)T^{1-\mu_1}. \quad (6.15)$$

Из равенств (6.14) и (6.15) получаем, что, в частности, $n,p \in C^{(1,0)}_{x,t,b}(\mathbb{R}^N\times[0,T])$.

Имеет место следующая:

Лемма 6.3. *В классе $n,p \in C([0,T];L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N))\cap C^{(1,0)}_{x,t,b}(\mathbb{R}^N\times[0,T])$, $n_0,p_0 \in C^{(1)}_b(\mathbb{R}^N)\cap W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ система интегральных уравнений* (6.1)–(6.2) *эквивалентна следующей*:

$$n(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_a(x-y,t)n_0(y)\,dy + \\ + a^2\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_a(x-y,t-\tau)\,\mathrm{div}\left(|n(y,\tau)|^{m-1}n(y,\tau)D_y\phi(y,\tau)\right)\,dy\,d\tau, \quad (6.16)$$

$$p(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_b(x-y,t)p_0(y)\,dy - \\ - b^2\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_b(x-y,t-\tau)\,\mathrm{div}\left(|p(y,\tau)|^{m-1}p(y,\tau)D_y\phi(y,\tau)\right)\,dy\,d\tau, \quad (6.17)$$

$$\phi(x,t) = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{n(y,t)-p(y,t)}{|x-y|^{N-2}}\,dy \tag{6.18}$$

для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]$.

Доказательство. Является следствием лемм 6.1, 6.2 и лемм 5.1–5.3.

Справедлива следующая:

Лемма 6.4. *Если* $n_0, p_0 \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ *при* $\alpha \in (0,1)$, *то существует такое максимальное* $T_0 = T_0(n_0,p_0) > 0$, *что для любого* $T \in (0,T_0)$ *система уравнений* (6.16)–(6.18) *имеет единственное решение в классе*:

$$\{n,p,\phi\} \in C([0,T];L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N))\times \\ \times C([0,T];L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)) \times C([0,T];C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N)),$$

$n,p \in C^{(1,0)}_{x,t,b}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$, *причем* $D_{x_j}n, D_{x_j}p, D_{x_j}\phi \in C^\beta_{x,loc}(\mathbb{R}^N)$ *при* $\beta \in (0,1)$, $j=\overline{1,N}$ *равномерно по* $t \in [0,T]$. *Более того,*

$$\operatorname{div}(|n(x,t)|^{m-1}n(x,t)D_x\phi(x,t)) \in C_b(\mathbb{R}^N \times [0,T]) \cap C^\beta_{x,loc}(\mathbb{R}^N),$$

$$\operatorname{div}(|p(x,t)|^{m-1}p(x,t)D_x\phi(x,t)) \in C_b(\mathbb{R}^N \times [0,T]) \cap C^\beta_{x,loc}(\mathbb{R}^N)$$

равномерно по $t \in [0,T]$.

Доказательство. Является следствием лемм 6.1 и 6.3, а также свойств (5.2), (5.7) и (5.46).

Справедлива следующая основная:

Теорема 1. *Для любых* $n_0,p_0 \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^N)\cap W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ *при* $\alpha \in (0,1)$ *и* $m \geqslant 1$ *найдется такое максимальное* $T_0 = T_0(n_0,p_0) > 0$, *что для любого* $T \in (0,T_0)$ *существует единственное в классе*

$$\{n,p,\phi\} \in C([0,T];L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N))\times \\ \times C([0,T];L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)) \times C([0,T];C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N)),$$

$n,p \in C^{(1,0)}_{x,t,b}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ *слабое локальное во времени решение задачи Коши в смысле определения* 1, *причем либо* $T_0 = +\infty$ *либо* $T_0 < +\infty$ *и в этом последнем случае имеет место предельное свойство*:

$$\lim_{T\uparrow T_0} (\|n\|_T + \|p\|_T) = +\infty.$$

Кроме того, при этом $n,p \in C^{(2,0)}_{x,t,b}(\mathbb{R}^N\times[0,T])\cap C^{(0,1)}_{x,t,b}(\mathbb{R}^N\times(0,T])$, $\phi \in C^{(2)}_{x,b}(\mathbb{R}^N)$ *для каждого* $t \in [0,T]$, *причем справедливы поточечные равенства*:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = a^2\left(\Delta_x n + \operatorname{div}(|n|^{m-1}nD_x\phi)\right), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T], \tag{6.19}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = b^2\left(\Delta_x p - \operatorname{div}(|p|^{m-1}pD_x\phi)\right), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T], \tag{6.20}$$

$$\Delta_x\phi = p - n, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T],$$

$$n(x,0) = n_0(x), \quad p(x,0) = p_0(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Доказательство. Теорема является следствием лемм 5.1–5.5 6.2–6.4, а также леммы 4.2.

§ 7. Априорные оценки

Прежде всего заметим, что справедливы оценки при $t > 0$:

$$\|\mathscr{E}_c\|_r \leqslant C(N,r)t^{-(N/2)(1-1/r)}, \quad r \in [1,+\infty], \tag{7.1}$$

$$\||D_x\mathscr{E}_c|\|_r \leqslant C(N)t^{-N/2(1-1/r)-1/2}, \quad r \in [1,+\infty]. \tag{7.2}$$

Из интегральных уравнений (6.16) и (6.17) вытекают следующие равенства:

$$D_x n(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_a(x-y,t)D_y n_0(y)\,dy - \\ - a^2\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} D_y\mathscr{E}_a(x-y,t-\tau)\,\mathrm{div}\left(|n(y,\tau)|^{m-1}n(y,\tau)D_y\phi(y,\tau)\right)\,dy\,d\tau, \tag{7.3}$$

$$D_x p(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_b(x-y,t)D_y p_0(y)\,dy + \\ + b^2\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} D_y\mathscr{E}_b(x-y,t-\tau)\,\mathrm{div}\left(|p(y,\tau)|^{m-1}p(y,\tau)D_y\phi(y,\tau)\right)\,dy\,d\tau. \tag{7.4}$$

Используя неравенство Юнга для свертки и оценку 5.6 с учетом (7.1) и (7.2) из интегральных уравнений (7.3) и (7.4) получим следующие интегральные неравенства при $t \in [0,T]$ для любого фиксированного $T \in (0,T_0)$ и $r \in [1,+\infty]$:

$$\||D_x n|\|_r \leqslant \||D_x n_0|\|_r + \\ + C(N)\int\limits_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2}}\left[\||n|^{m-1}n(n-p)\|_r(s) + \left\||D_x(|n|^{m-1}n)||D_x\phi|\right\|_r(s)\right]\,ds, \tag{7.5}$$

$$\||D_x p|\|_r \leqslant \||D_x p_0|\|_r + \\ + C(N)\int\limits_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2}}\left[\||p|^{m-1}p(n-p)\|_r(s) + \left\||D_x(|p|^{m-1}p)||D_x\phi|\right\|_r(s)\right]\,ds, \tag{7.6}$$

причем имеем:

$$\||n|^{m-1}n(n-p)\|_r \leqslant \left(\|n\|_T + \|p\|_T\right)^{m+1}, \quad \||p|^{m-1}p(n-p)\|_r \leqslant \left(\|n\|_T + \|p\|_T\right)^{m+1}, \tag{7.7}$$

$$\left\||D_x(|n|^{m-1}n)||D_x\phi|\right\|_r \leqslant C(N,m)\left\||D_x n|\right\|_r(\|n\|_T+\|p\|_T)^m,$$

$$\left\||D_x(|p|^{m-1}p)||D_x\phi|\right\|_r \leqslant C(N,m)\left\||D_x p|\right\|_r(\|n\|_T+\|p\|_T)^m. \tag{7.8}$$

Таким образом, из (7.5) и (7.6) с учетом (7.7)–(7.8) получим неравенства:

$$\left\||D_x n|\right\|_r \leqslant \left\||D_x n_0|\right\|_r + C(N)T^{1/2}(\|n\|_T+\|p\|_T)^{m+1} + \\ + C(N,m)(\|n\|_T+\|p\|_T)^m \int\limits_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2}}\left\||D_x n|\right\|_r(s)\,ds, \tag{7.9}$$

$$\left\||D_x p|\right\|_r \leqslant \left\||D_x n_0|\right\|_r + C(N)T^{1/2}(\|n\|_T+\|p\|_T)^{m+1} + \\ + C(N,m)(\|n\|_T+\|p\|_T)^m \int\limits_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2}}\left\||D_x p|\right\|_r(s)\,ds. \tag{7.10}$$

Используя неравенство Гроноулла–Беллмана–Бихари [10] из (7.9) и (7.10) получим оценки для всех $t\in[0,T]$ и $r\geqslant 1$:

$$\left\||D_x n|\right\|_r(t) \leqslant \left(\left\||D_x n_0|\right\|_r + C(N)T^{1/2}(\|n\|_T+\|p\|_T)^{m+1}\right)\times \\ \times\exp\left(C(N,m)T^{1/2}(\|n\|_T+\|p\|_T)^m\right), \tag{7.11}$$

$$\left\||D_x p|\right\|_r(t) \leqslant \left(\left\||D_x p_0|\right\|_r + C(N)T^{1/2}(\|n\|_T+\|p\|_T)^{m+1}\right)\times \\ \times\exp\left(C(N,m)T^{1/2}(\|n\|_T+\|p\|_T)^m\right). \tag{7.12}$$

Значит,

$$n,p\in L^\infty(0,T;W^{1,r}(\mathbb{R}^N)) \quad \text{при} \quad r\in[1,+\infty]. \tag{7.13}$$

Из оценок (7.11), (7.12) несложно получить, что

$$\operatorname{div}(|n|^{m-1}nD_x\phi),\ \operatorname{div}(|p|^{m-1}pD_x\phi)\in L^\infty(0,T;L^r(\mathbb{R}^N)) \quad \text{для всех} \quad r\in[1,+\infty].$$

Кроме того,

$$\phi\in L^\infty(0,T;W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)).$$

С учетом (7.13) из интегральных уравнений (7.3), (7.4) точно также как при доказательстве леммы 5.3 (см. шаг 1) получим, что

$$D_{x_j}n, D_{x_j}p\in C((0,T];L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)).$$

Отсюда и из результата теоремы 1 получим, что

$$n,p\in C((0,T];W^{1,r}(\mathbb{R}^N)) \quad \text{для всех} \quad r\in[1,+\infty]. \tag{7.14}$$

Используя очевидные свойства свертки из (6.16) и (6.17) можно получить при $m \geqslant 2$ и при $m = 1$ равенства:

$$D_{x_j} D_x n(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_a(x-y,t) D_{y_j} D_y n_0(y)\, dy +$$
$$+ a^2 \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} D_y \mathscr{E}_a(x-y,t-\tau)\Big((D_{y_j} D_y(|n(y,\tau)|^{m-1} n(y,\tau)), D_y\phi(y,\tau)) +$$
$$+ (D_y(|n(y,\tau)|^{m-1} n(y,\tau)), D_{y_j} D_y \phi) +$$
$$+ D_{y_j} \left(|n(y,\tau)|^{m-1} n(y,\tau)(n(y,\tau) - p(y,\tau)) \right) \Big)\, dy\, d\tau, \quad (7.15)$$

$$D_{x_j} D_x p(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_b(x-y,t) D_{y_j} D_y p_0(y)\, dy -$$
$$- b^2 \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} D_y \mathscr{E}_b(x-y,t-\tau)\Big((D_{y_j} D_y |p(y,\tau)|^{m-1} p(y,\tau), D_y\phi(y,\tau)) +$$
$$+ (D_y(|p(y,\tau)|^{m-1} p(y,\tau)), D_{y_j} D_y \phi) +$$
$$+ D_{y_j} \left(|p(y,\tau)|^{m-1} p(y,\tau)(n(y,\tau) - p(y,\tau)) \right) \Big)\, dy\, d\tau. \quad (7.16)$$

Заметим, что справедливы равенства:

$$D_{x_j} D_x \left(|n|^{m-1} n \right) = m|n|^{m-1} D_{x_j} D_x n + m(m-1)|n|^{m-3} n D_{x_j} n D_x n,$$
$$D_{x_j} D_x \left(|p|^{m-1} p \right) = m|p|^{m-1} D_{x_j} D_x p + m(m-1)|p|^{m-3} p D_{x_j} p D_x p.$$

Из (7.15) и (7.16) с помощью неравенства Юнга для сверток можно получить оценки для любого $r \in [1, +\infty]$:

$$\|D_{x_j} D_x n\|_r(t) \leqslant C(N)\|D_{x_j} D_x n_0\|_r +$$
$$+ C(N,m) T^{1/2} |||D_{x_j} D_x \phi|||_{\infty,T} \|n\|^{m-1}_{\infty,T} |||D_x n|||_{r,T} +$$
$$+ C(N,m) T^{1/2} (|||D_x n|||_{r,T} + |||D_x p|||_{r,T})(\|n\|_T + \|p\|_T)^m +$$
$$+ C(N,m)(m-1) T^{1/2} |||D_x \phi|||_{\infty,T} \|n\|^{m-2}_{\infty,T} \|D_{x_j} n\|_{\infty,T} |||D_x n|||_{r,T} +$$
$$+ C(N,m) |||D_x \phi|||_{\infty,T} \|n\|^{m-1}_{\infty,T} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2}} \|D_{x_j} D_x n\|_r(s)\, ds,$$

$$\|D_{x_j} D_x p\|_r(t) \leqslant C(N)\|D_{x_j} D_x p_0\|_r +$$
$$+ C(N,m) T^{1/2} |||D_{x_j} D_x \phi|||_{\infty,T} \|p\|^{m-1}_{\infty,T} |||D_x p|||_{r,T} +$$
$$+ C(N,m) T^{1/2} (|||D_x n|||_{r,T} + |||D_x p|||_{r,T})(\|n\|_T + \|p\|_T)^m +$$
$$+ C(N,m)(m-1) T^{1/2} |||D_x \phi|||_{\infty,T} \|p\|^{m-2}_{\infty,T} \|D_{x_j} p\|_{\infty,T} |||D_x p|||_{r,T} +$$
$$+ C(N,m) |||D_x \phi|||_{\infty,T} \|p\|^{m-1}_{\infty,T} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2}} \|D_{x_j} D_x p\|_r(s)\, ds,$$

Используя неравенство Гронуолла–Беллмана-Бихари [10] получим оценки для любого $t \in [0,T]$:

$$\|D_{x_j}D_x n\|_r(t) \leqslant \biggl(C(N)\|D_{x_j}D_x n_0\|_r+ \\ + C(N,m)T^{1/2}|||D_{x_j}D_x\phi|||_{\infty,T}\|n\|^{m-1}_{\infty,T}|||D_x n|||_{r,T}+ \\ + C(N,m)T^{1/2}(|||D_x n|||_{r,T} + |||D_x p|||_{r,T})(\|n\|_T + \|p\|_T)^m+ \\ + C(N,m)(m-1)T^{1/2}|||D_x\phi|||_{\infty,T}\|n\|^{m-2}_{\infty,T}\|D_{x_j}n\|_{\infty,T}|||D_x n|||_{r,T}\biggr)\times \\ \times \exp\left(C(N,m)T^{1/2}|||D_x\phi|||_{\infty,T}\|n\|^{m-1}_{\infty,T}\right),$$

$$\|D_{x_j}D_x p\|_r(t) \leqslant \biggl(C(N)\|D_{x_j}D_x p_0\|_r+ \\ + C(N,m)T^{1/2}|||D_{x_j}D_x\phi|||_{\infty,T}\|p\|^{m-1}_{\infty,T}|||D_x p|||_{r,T}+ \\ + C(N,m)T^{1/2}(|||D_x n|||_{r,T} + |||D_x p|||_{r,T})(\|n\|_T + \|p\|_T)^m+ \\ + C(N,m)(m-1)T^{1/2}|||D_x\phi|||_{\infty,T}\|p\|^{m-2}_{\infty,T}\|D_{x_j}p\|_{\infty,T}|||D_x p|||_{r,T}\biggr)\times \\ \times \exp\left(C(N,m)T^{1/2}|||D_x\phi|||_{\infty,T}\|p\|^{m-1}_{\infty,T}\right).$$

Значит, $n,p \in L^\infty(0,T;W^{2,r}(\mathbb{R}^N))$ при $r \in [1,+\infty]$. Аналогично доказательству соотношений (7.14) и с учетом (7.14) получим из (7.15), (7.16), что

$$D^2_{x_jx_k}n, D^2_{x_jx_k}p \in C((0,T];L^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)). \tag{7.17}$$

Отсюда и с учетом (7.14) получим, что

$$n,p \in C((0,T];W^{2,r}(\mathbb{R}^N)) \quad \text{для всех} \quad r \in [1,+\infty].$$

Наконец при $t \in (0,T)$ с учетом (5.47) справедливы равенства:

$$
\begin{aligned}
D_t n(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} D_t \mathscr{E}_a(x-y,t) n_0(y)\, dy + a^2 \operatorname{div}(|n(x,t)|^{m-1} n(x,t) D_x \phi(x,t)) + \\
+ a^2 \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} D_t \mathscr{E}_a(x-y,t-\tau) \Big(\operatorname{div}(|n(y,\tau)|^{m-1} n(y,\tau) D_y \phi(y,\tau)) - \\
- \operatorname{div}(|n(x,\tau)|^{m-1} n(x,\tau) D_x \phi(x,\tau)) \Big)\, dy\, d\tau = \\
= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Delta_y \mathscr{E}_a(x-y,t) n_0(y)\, dy + a^2 \operatorname{div}(|n(x,t)|^{m-1} n(x,t) D_x \phi(x,t)) + \\
+ a^4 \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Delta_y \mathscr{E}_a(x-y,t-\tau) \Big(\operatorname{div}(|n(y,\tau)|^{m-1} n(y,\tau) D_y \phi(y,\tau)) - \\
- \operatorname{div}(|n(x,\tau)|^{m-1} n(x,\tau) D_x \phi(x,\tau)) \Big)\, dy\, d\tau = \\
= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_a(x-y,t) \Delta_y n_0(y)\, dy + a^2 \operatorname{div}(|n(x,t)|^{m-1} n(x,t) D_x \phi(x,t)) - \\
- a^4 \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \big(D_y \mathscr{E}_a(x-y,t-\tau), D_y \operatorname{div}(|n(y,\tau)|^{m-1} n(y,\tau) D_y \phi(y,\tau)) \big)\, dy\, d\tau,
\end{aligned}
\tag{7.18}
$$

$$
\begin{aligned}
D_t p(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathscr{E}_b(x-y,t) \Delta_y p_0(y)\, dy - b^2 \operatorname{div}(|p(x,t)|^{m-1} p(x,t) D_x \phi(x,t)) + \\
+ b^4 \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \big(D_y \mathscr{E}_b(x-y,t-\tau), D_y \operatorname{div}(|p(y,\tau)|^{m-1} p(y,\tau) D_y \phi(y,\tau)) \big)\, dy\, d\tau.
\end{aligned}
\tag{7.19}
$$

Из равенств (7.18), (7.19) с учетом полученных ранее оценок вытекает, что $D_t n, D_t p \in L^\infty(0,T; L^r(\mathbb{R}^N))$ для всех $r \in [1,+\infty]$. Снова, как и при доказательстве (7.17) из интегральных уравнений (7.18) и (7.19) получим, что

$$
D_t n, D_t p \in C((0,T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))).
$$

Таким образом, получаем, что

$$
n, p \in C^{(1)}((0,T]; L^r(\mathbb{R}^N)) \quad \text{для всех} \quad r \in [1,+\infty].
$$

Таким образом, доказана следующая основная:

Теорема 2. *Если либо $m=1$ либо $m \geqslant 2$, $n_0, p_0 \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ при $\alpha \in (0,1)$ и, кроме того, $n_0, p_0 \in W^{2,r}(\mathbb{R}^N)$ для любого $r \in [1,+\infty]$, то слабое* *локальное во времени решение* $\{n, p, \phi\}$ *задачи Коши в смысле определения* 1 *обладает такой гладкостью*: $n, p \in C((0,T]; W^{2,r}(\mathbb{R}^N)) \cap C^{(1)}((0,T]; L^r(\mathbb{R}^N))$, $\phi \in L^\infty(0,T; W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N))$ *для всех* $r \in [1, +\infty]$ *и для любого* $T \in (0, T_0)$, *где* $T_0 = T_0(n_0, p_0) > 0$ *определено в теореме* 1.

Справедлива следующая:

Лемма 7.1. *Если* $u \in C((0,T]; W^{2,r}(\mathbb{R}^N))$ *для* $r \in [1, +\infty]$ *и* $\phi(t) \in C_b^{(2)}(\mathbb{R}^N)$ *для каждого* $t \in [0,T]$, $m \geqslant 1$, *то справедливы соотношения*:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Delta u(x,t) f(u(x,t))\, dx \leqslant 0 \quad \textit{для всех} \quad t \in (0,T], \tag{7.20}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(u(x,t)) \operatorname{div}(|u(x,t)|^{m-1} u(x,t) D_x \phi(x,t))\, dx = 0 \quad \textit{для всех} \quad t \in (0,T], \tag{7.21}$$

где $f = \operatorname{sign}(s)$, $f = \operatorname{sign}(s^+)$, $f = \operatorname{sign}(s^-)$, $f = \operatorname{sign}((s-h)^+)$.

Доказательство. *Шаг 1. Доказательство* (7.20). Пусть сначала $f_\varepsilon \in C_b^{(1)}(-\infty, +\infty)$ и является монотонно неубывающей. Тогда для $t \in (0,T]$ справедливы соотношения:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Delta u(x,t) f_\varepsilon(u(x,t))\, dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^N} f'_\varepsilon(u(x,t))\, |D_x u(x,t)|^2\, dx \leqslant 0. \tag{7.22}$$

Рассмотрим теперь, например, случай функции $f = \operatorname{sign}(s)$. Тогда в качестве функции f_ε при $\varepsilon > 0$ возьмем функцию:

$$f_\varepsilon := \begin{cases} 1, & \text{если} \quad s \geqslant \varepsilon, \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2\varepsilon} s\right), & \text{если} \quad s \in [-\varepsilon, \varepsilon], \\ -1, & \text{если} \quad s \leqslant -\varepsilon. \end{cases}$$

Несложно убедиться в том, что $f_\varepsilon \in C_b^{(1)}(-\infty, +\infty)$, причем для каждого $s \in \mathbb{R}$ имеем:

$$f_\varepsilon(s) \to f(s) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0, \quad |f_\varepsilon(s)| \leqslant 1, \tag{7.23}$$

$$0 \leqslant f'_\varepsilon(s) \leqslant \frac{\pi}{2\varepsilon}. \tag{7.24}$$

С учетом (7.24) из (7.22) получим неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Delta u(x,t) f_\varepsilon(u(x,t))\, dx \leqslant 0 \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0. \tag{7.25}$$

С учетом (7.23) в пределе при $\varepsilon \to +0$ из (7.25) получим неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Delta u(x,t) \operatorname{sign}(u(x,t))\, dx \leqslant 0 \quad \text{для любого} \quad t \in (0,T].$$

Шаг 2. Доказательство (7.21). Рассмотрим функцию $f = \operatorname{sign}(s)$. При $t \in (0,T]$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \operatorname{sign}(u(x,t)) \operatorname{div}(|u(x,t)|^{m-1}u(x,t)D_x\phi(x,t))\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \operatorname{sign}(u(x,t)) \left(D_x(|u(x,t)|^{m-1}u(x,t)), D_x\phi(x,t)\right)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)|^m \Delta_x\phi(x,t)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(D_x|u(x,t)|^m, D_x\phi(x,t)\right)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)|^m \Delta_x\phi(x,t)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)|^m \Delta_x\phi(x,t)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)|^m \Delta_x\phi(x,t)\,dx = 0. \quad (7.26)$$

Аналогичным образом, рассматриваются функции $f = \operatorname{sign}(s^+)$, $f = \operatorname{sign}(s^-)$. Рассмотрим функцию $f = \operatorname{sign}((s-m)^+)$. Заметим, что если $|u|^{m-1}u \in W^{1,r}(\mathbb{R}^N)$, то функция

$$u_h := \operatorname{sign}((u-h)^+)|u|^{m-1}u = \begin{cases} |u|^{m-1}u, & \text{при} \quad u \geqslant h, \\ 0, & \text{при} \quad u < h, \end{cases} \quad u_h \in W^{1,r}(\mathbb{R}^N),$$

$$D_x u_h := \begin{cases} D_x|u|^{m-1}u, & \text{если} \quad u \geqslant h, \\ 0, & \text{если} \quad u < h. \end{cases}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны (7.26). Лемма доказана полностью.

Теперь умножим обе части уравнения (6.19) на функцию $\operatorname{sign}(n)$ при $t \in (0,T]$ и с учетом теоремы 2 и леммы 7.1 получим цепочку соотношений:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} n_t(x,t) \operatorname{sign}(n(x,t))\,dx \leqslant 0,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} n_t(x,t) \operatorname{sign}(n(x,t))\,dx = \frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |n(x,t)|\,dx,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |n(x,t)|\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} |n(x,\varepsilon)|\,dx \quad \text{для всех} \quad t \in [\varepsilon, T], \quad \varepsilon \in (0,T).$$

В пределе при $\varepsilon \to +0$ и из теоремы 2 получим неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |n(x,t)|\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} |n_0(x)|\,dx \quad \text{при} \quad t \in [0,T].$$

Аналогичным образом из уравнения (6.19) получим оценку:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |p(x,t)|\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} |p_0(x)|\,dx \quad \text{при} \quad t \in [0,T].$$

Пусть теперь $h := \|n_0\|_\infty$. Тогда из умножив уравнение (6.19) на $\operatorname{sign}((n-h)^+)$ с учетом теоремы 2 и леммы 7.1 получим неравенство:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^N}(n(x,t)-h)^+(x,t)\,dx \leqslant 0 \quad \text{при} \quad t\in(0,T],$$

из которого, как и ранее, получаем оценку:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}(n(x,t)-h)^+\;dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N}(n_0(x)-h)^+\;dx = 0 \quad \text{при} \quad t\in[0,T].$$

Отсюда получаем, что

$$n(x,t)\leqslant \|n_0\|_\infty \quad \text{для всех} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T].$$

Из уравнения (6.20) аналогичным образом получаем, что

$$p(x,t)\leqslant \|p_0\|_\infty \quad \text{для всех} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T].$$

Если умножит уравнение (6.19) на $\operatorname{sign}(n^+)$, а уравнение (6.20) на $\operatorname{sign}(p^+)$, то с учетом теоремы 2 и леммы 7.1 получим неравенства для всех $t\in[0,T]$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} n^+(x,t)\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} n_0^+(x)\,dx, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^N} p^+(x,t)\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} p_0^+(x)\,dx. \tag{7.27}$$

Если умножит уравнение (6.19) на $\operatorname{sign}(n^-)$, а уравнение (6.20) на $\operatorname{sign}(p^-)$, то с учетом теоремы 2 и леммы 7.1 получим неравенства для всех $t\in[0,T]$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} n^-(x,t)\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} n_0^-(x)\,dx, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^N} p^-(x,t)\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} p_0^-(x)\,dx. \tag{7.28}$$

Наконец, если проинтегрировать уравнения (6.19) и (6.20), то получим равенства для всех $t\in[0,T]$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} n(x,t)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} n_0(x)\,dx, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^N} p(x,t)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} p_0(x)\,dx. \tag{7.29}$$

С учетом (7.27) и (7.29) справедливы следующие соотношения:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} n^+(x,t)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} n^-(x,t)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} n_0^+(x)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} n_0^-(x)\,dx \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} n^+(x,t)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} n_0^-(x)\,dx,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} n^-(x,t)\,dx \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} n_0^-(x)\,dx. \tag{7.30}$$

Также получаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} p^-(x,t)\,dx \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} p_0^-(x)\,dx. \tag{7.31}$$

Из (7.28) и (7.30), (7.31) получим равенства:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} n^-(x,t)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} n_0^-(x)\,dx, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^N} p^-(x,t)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} p_0^-(x)\,dx. \tag{7.32}$$

Из (7.29) и (7.32) получаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} n^+(x,t)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} n_0^+(x)\,dx, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^N} p^+(x,t)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} p_0^+(x)\,dx.$$

Если $n_0, p_0 \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^N$, то из (7.32) получаем, что $n, p \geqslant 0$ для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]$. Таким образом, справедлива следующая вспомогательная:

Лемма 7.2. *Если выполнены условия теоремы 2 и, кроме того, $n_0, p_0 \geqslant 0$, то для локального во времени слабого решения задачи Коши в смысле определения 1 справедливы следующие априорные оценки*:

$$0 \leqslant n(x,t) \leqslant \|n_0\|_\infty, \quad 0 \leqslant p(x,t) \leqslant \|p_0\|_\infty, \quad \|n\|_{1,T} \leqslant \|n_0\|_1, \quad \|p\|_{1,T} \leqslant \|p_0\|_1 \tag{7.33}$$

для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]$.

Из теоремы 1 и леммы 7.2 приходим к следующей:

Лемма 7.3. *Если выполнены условия теоремы 2 и, кроме того, $n_0, p_0 \geqslant 0$, то в теореме 1 время $T_0(n_0, p_0) = +\infty$.*

§ 8. Асимптотическое поведение слабого решения при больших временах

Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда умножим обе части уравнения (6.19) на $|n|^{q-2}n$ при $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T]$ и $q \geqslant 2$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{1}{a^2}\frac{1}{q}\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|n|^q\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^N}|n|^{q-2}n\Delta_x n\,dx+\int\limits_{\mathbb{R}^N}|n|^{q-2}n\,\mathrm{div}(|n|^{m-1}nD_x\phi)\,dx=$$

$$=-(q-1)\int\limits_{\mathbb{R}^N}|n|^{q-2}|D_xn|^2\,dx+m\int\limits_{\mathbb{R}^N}(D_xn,D_x\phi)|n|^{m+q-3}n\,dx+\int\limits_{\mathbb{R}^N}|n|^{m+q-1}\Delta_x\phi\,dx=$$

$$=-(q-1)\int\limits_{\mathbb{R}^N}|n|^{q-2}|D_xn|^2\,dx+\frac{1}{m+q-1}\int\limits_{\mathbb{R}^N}(D_x|n|^{m+q-1},D_x\phi)\,dx+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^N}|n|^{m+q-1}\Delta_x\phi\,dx=$$

$$=-(q-1)\int\limits_{\mathbb{R}^N}|n|^{q-2}|D_xn|^2\,dx+\frac{m+q-2}{m+q-1}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|n|^{m+q-1}\Delta_x\phi\,dx=$$

$$=-(q-1)\int\limits_{\mathbb{R}^N}|n|^{q-2}|D_xn|^2\,dx+\frac{m+q-2}{m+q-1}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|n|^{m+q-1}(p-n)\,dx. \quad (8.1)$$

Аналогичным образом, умножая уравнение (6.20) на $|p|^{q-2}p$ и интегрируя по частям, получим равенство:

$$\frac{1}{b^2}\frac{1}{q}\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|p|^q\,dx=-(q-1)\int\limits_{\mathbb{R}^N}|p|^{q-2}|D_xp|^2\,dx-$$

$$-\frac{m+q-2}{m+q-1}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|p|^{m+q-1}(p-n)\,dx. \quad (8.2)$$

Складывая равенства (8.1) и (8.2), получим равенство:

$$\frac{1}{q}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{a^2}\|n\|_q^q+\frac{1}{b^2}\|p\|_q^q\right]+(q-1)\int\limits_{\mathbb{R}^N}|n|^{q-2}|D_xn|^2\,dx+(q-1)\int\limits_{\mathbb{R}^N}|p|^{q-2}|D_xp|^2\,dx=$$

$$=\frac{m+q-2}{m+q-1}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(|n|^{m+q-1}-|p|^{m+q-1}\right)(p-n)\;dx. \quad (8.3)$$

Если дополнительно мы потребуем, чтобы $n_0,p_0\geqslant 0$, то $n,p\geqslant 0$ и поэтому для правой часть равенства (8.3) будет выполнено неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(n^{m+q-1}-p^{m+q-1}\right)(p-n)\;dx\leqslant 0. \quad (8.4)$$

После элементарных преобразований из (8.3) с учетом (8.4) получим неравенство:

$$\frac{1}{q}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{a^2}\|n\|_q^q+\frac{1}{b^2}\|p\|_q^q\right]+\frac{4(q-1)}{q^2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left[\left|D_x(|n|^{q/2})\right|^2+\left|D_x(|p|^{q/2})\right|^2\right]\;dx\leqslant 0. \quad (8.5)$$

Заметим, что в работе [3] доказана лемма 1 такого содержания:

Лемма 8.1. *Если $v \in W^{2,r}(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ при $r \in [2,+\infty)$, то существует такая постоянная $C = C(r,N) > 0$, что выполнено неравенство*:

$$\|v\|_r^{(N(r-1)+2)r/(N(r-1))} \leqslant C\|v\|_1^{2r/(N(r-1))} \left|\left|\left|D_x(|v|^{r/2})\right|\right|\right|_2^2.$$

Из леммы 8.1 при условиях $n_0, p_0 \geqslant 0$ с учетом оценок (7.33) получим оценки снизу:

$$\left|\left|\left|D_x(|n|^{q/2})\right|\right|\right|_2^2 \geqslant \frac{C}{\|n_0\|_1^{2q/(N(q-1))}}\|n\|_q^{(N(q-1)+2)q/(N(q-1))}, \tag{8.6}$$

$$\left|\left|\left|D_x(|p|^{q/2})\right|\right|\right|_2^2 \geqslant \frac{C}{\|p_0\|_1^{2q/(N(q-1))}}\|p\|_q^{(N(q-1)+2)q/(N(q-1))}. \tag{8.7}$$

Из неравенства (8.5) с учетом (8.6) и (8.7) получим оценку:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{a^2}\|n\|_q^q + \frac{1}{b^2}\|p\|_q^q\right] + \\ + C(q,N)\left[\frac{a^{2\alpha}}{\|n_0\|_1^{2q/(N(q-1))}}\left(\frac{\|n\|_q^q}{a^2}\right)^\alpha + \frac{b^{2\alpha}}{\|p_0\|_1^{2q/(N(q-1))}}\left(\frac{\|p\|_q^q}{b^2}\right)^\alpha\right] \leqslant 0, \tag{8.8}$$

$$\alpha := \frac{N(q-1)+2}{N(q-1)}.$$

Из (8.8) получим такую оценку:

$$\frac{d}{dt}\left(f_1(t) + f_2(t)\right) + A\left(f_1^\alpha(t) + f_2^\alpha(t)\right) \leqslant 0,$$

$$f_1 := \frac{\|n\|_q^q}{a^2}, \quad f_2 := \frac{\|p\|_q^q}{b^2}.$$

$$A = \min\{A_1, A_2\},$$

$$A_1 := C(q,N)\frac{a^{2\alpha}}{\|n_0\|_1^{2q/(N(q-1))}}, \quad A_2 := C(q,N)\frac{b^{2\alpha}}{\|p_0\|_1^{2q/(N(q-1))}}.$$

В силу выпуклости вниз функции x^β при $\beta \in (1,+\infty)$, $x > 0$, то приходим к такой оценке:

$$\frac{dz}{dt} + Bz^\alpha \leqslant 0, \quad z := f_1 + f_2, \quad B := \frac{A}{2^{\alpha-1}},$$

из которого получаем:

$$z(t) \leqslant \frac{1}{\left(z_0^{1-\alpha} + Bt\right)^{1/(\alpha-1)}}.$$

Отсюда получаем оценки:

$$\|n\|_q \leqslant \frac{C_1}{(C_3 + Bt)^{N(1-1/q)/2}}, \quad \|p\|_q \leqslant \frac{C_2}{(C_3 + Bt)^{N(1-1/q)/2}}, \quad q \in [2,+\infty), \tag{8.9}$$

$$C_1 := a^{2/q}, \quad C_2 := b^{2/q}, \quad C_3 := \left(\frac{\|n_0\|_q^q}{a^2} + \frac{\|p_0\|_q^q}{b^2}\right)^{-2/(N(q-1))}.$$

Теперь заметим, что справедливо следующее интерполяционное неравенство для пространств Лебега:

$$\|u\|_q \leqslant \|u\|_s^{\theta}\|u\|_t^{1-\theta}, \tag{8.10}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}, \quad \theta \in [0,1], \quad 1 \leqslant t \leqslant q \leqslant s \leqslant +\infty. \tag{8.11}$$

Теперь заметим, что имеют место неравенства

$$\|n\|_2 \leqslant \frac{C_1}{(C_3+Bt)^{N/4}}, \quad \|p\|_2 \leqslant \frac{C_2}{(C_3+Bt)^{N/4}}, \tag{8.12}$$

$$\|n\|_1 \leqslant \|n_0\|_1, \quad \|p\|_1 \leqslant \|p_0\|_1. \tag{8.13}$$

Положим в (8.10) и (8.11) $s = 2$, $t = 1$. Тогда с учетом (8.12) и (8.13) получим оценки:

$$\|n\|_q \leqslant \frac{C_4}{(C_3+Bt)^{N(1-1/q)/2}}, \quad C_4 = C_1^{2(1-1/q)}\|n_0\|_1^{(2-q)/q}, \quad q \in [1,2], \tag{8.14}$$

$$\|p\|_q \leqslant \frac{C_5}{(C_3+Bt)^{N(1-1/q)/2}}, \quad C_5 = C_2^{2(1-1/q)}\|p_0\|_1^{(2-q)/q}, \quad q \in [1,2]. \tag{8.15}$$

Таким образом, оценки (8.9) при $q \in [2,+\infty)$ для $\|n\|_q$ и $\|p\|_q$ мы распространили на аналогичные оценки (8.14) и (8.15), но уже при $q \in [1,2]$.

В работе [3] доказана следующая лемма (см. лемма 3 работы [3]):

Лемма 8.2. *Для любого* $r \in [1,+\infty]$ *существует такая постоянная* $C = C(r,N) > 0$, *что*

$$\|G(t)*\phi - MG(t)\|_r \leqslant C\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^N;1+|x|)}t^{-(N/2)(1-1/r)-1/2} \quad \textit{для любого} \quad t > 0$$

и для любого $\phi \in L^1(\mathbb{R}^N; 1+|x|)$, *причем*

$$M := \int\limits_{\mathbb{R}^N} \phi(x)\,dx, \quad G(t) := \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\exp\left(-|x|^2/(4t)\right).$$

Справедлива следующая основная:

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы 2 и дополнительно* $n_0, p_0 \in L^1(\mathbb{R}^N; 1+|x|)$, *тогда для любого* $q \in (1,+\infty)$ *найдутся такие постоянные* $C_1(q,N,m) > 0$ *и* $C_2(q,N,m) > 0$, *что при* $t > 0$ *справедливы неравенства*:

$$\|n(t) - M_n\mathscr{E}_a(t)\|_q \leqslant \frac{C_1}{t^{\beta(q)}}, \quad \|p(t) - M_p\mathscr{E}_b(t)\|_q \leqslant \frac{C_2}{t^{\beta(q)}}, \tag{8.16}$$

$$\beta(q) := \begin{cases} N(1-1/q)/2 + 1/2, & \textit{если} \quad N > 3/m, \\ 3(1-1/q)/2 + 1/2 - \varepsilon, & \textit{если} \quad N = 3,\ m = 1 \end{cases}$$

для любого $\varepsilon > 0$, *где*

$$M_n := \int\limits_{\mathbb{R}^N} n_0(x)\,dx, \quad M_p := \int\limits_{\mathbb{R}^N} p_0(x)\,dx.$$

Кроме того, существует такая постоянная $C_3(q,N,m)>0$, *что при* $t>0$ *справедливо неравенство*:

$$\| |D_x\phi(t)-D_x\Phi(t)| \|_q \leqslant \frac{C_3}{t^{\sigma(q)}}, \quad q>\frac{N}{N-1}, \tag{8.17}$$

$$\Phi(x,t)=\frac{1}{(N-2)\omega_N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\left(M_n\mathscr{E}_a(y,t)-M_p\mathscr{E}_b(y,t)\right)dy,$$

$$\sigma(q):=\begin{cases} N(1-1/q)/2-1/2, & \text{если} \quad N>3/m,\\ 3(1-1/q)/2-1/2-\varepsilon, & \text{если} \quad N=3,\ m=1\end{cases}$$

для любого $\varepsilon>0$.

Доказательство. В силу результата лемм 4.2 и 6.3 всякое слабое решение задачи Коши в смысле определения 1 и только оно является решением соответствующей гладкости уравнений

$$n(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathscr{E}_a(x-y,t)n_0(y)\,dy-$$
$$-a^2\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}\big(D_y\mathscr{E}_a(x-y,t-\tau),|n(y,\tau)|^{m-1}n(y,\tau)D_y\phi(y,\tau)\big)\,dy\,d\tau,$$

$$p(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathscr{E}_b(x-y,t)p_0(y)\,dy+$$
$$+b^2\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}\big(D_y\mathscr{E}_b(x-y,t-\tau),|p(y,\tau)|^{m-1}p(y,\tau)D_y\phi(y,\tau)\big)\,dy\,d\tau,$$

$$\phi(x,t)=\frac{1}{(N-2)\omega_N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{n(y,t)-p(y,t)}{|x-y|^{N-2}}\,dy. \tag{8.18}$$

С учетом леммы 8.2 справедливы следующие оценки:

$$\|n(t)-M_n\mathscr{E}_a(t)\|_q\leqslant C_{1q}\|n_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N;1+|x|)}t^{-N(1-1/q)/2-1/2}+$$
$$+a^2\left\|\int\limits_0^t ds\,\big(D_x\mathscr{E}_a(t-s)*|n(s)|^{m-1}n(s)D_x\phi(s)\big)\right\|_q, \tag{8.19}$$

$$\|p(t)-M_p\mathscr{E}_b(t)\|_q\leqslant C_{2q}\|n_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N;1+|x|)}t^{-N(1-1/q)/2-1/2}+$$
$$+b^2\left\|\int\limits_0^t ds\,\big(D_x\mathscr{E}_b(t-s)*|p(s)|^{m-1}p(s)D_x\phi(s)\big)\right\|_q. \tag{8.20}$$

Дальнейшие рассуждения будем проводить для неравенства (8.19), поскольку для неравенства (8.20) рассуждения те же самые. Итак, справедливо равенство:

$$\left\|\int\limits_0^t ds \left(D_x\mathscr{E}_a(t-s)*|n(s)|^{m-1}n(s)D_x\phi(s)\right)\right\|_q \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\int\limits_0^{t/2} ds \left(D_x\mathscr{E}_a(t-s)*|n(s)|^{m-1}n(s)D_x\phi(s)\right)\right\|_q +$$

$$+\left\|\int\limits_{t/2}^{t} ds \left(D_x\mathscr{E}_a(t-s)*|n(s)|^{m-1}n(s)D_x\phi(s)\right)\right\|_q := K_1+K_2. \quad (8.21)$$

Для K_2 справедлива такая оценка:

$$K_2 \leqslant \int\limits_{t/2}^{t} \||D_x\mathscr{E}_a(t-s)|\|_1 \||n(s)|^{m-1}n(s)|D_x\phi(s)|\|_q \, ds \leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_{t/2}^{t} \frac{1}{(t-s)^{1/2}}\|n(s)\|_{mqq_1}^m \||D_x\phi(s)|\|_{qq_2}\, ds, \quad \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}=1. \quad (8.22)$$

Из уравнения (8.18) с учетом теоремы 1 работы [11] получим оценку:

$$\||D_x\phi|\|_{r_1} \leqslant C\left(\|n\|_{r_2}+\|p\|_{r_2}\right), \quad \frac{1}{r_1}=\frac{1}{r_2}-\frac{1}{N}, \quad r_2>1, \quad r_1=qq_2. \quad (8.23)$$

Заметим, что требование $r_2>1$ приводит нас к необременительному условию:

$$q_2 > \frac{1}{q}\frac{N}{N-1}, \quad \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}=1.$$

Таким образом, из (8.22) с учетом (8.23), а также оценок (8.9), (8.14) и (8.15) получим оценку:

$$K_2 \leqslant C\int\limits_{t/2}^{t} \frac{1}{(t-s)^{1/2}}\frac{1}{s^{mN(1-1/(mqq_1))/2}}\frac{1}{s^{N(1-1/r_2)/2}}\, ds, \quad (8.24)$$

причем справедлива цепочка равенств:

$$\frac{mN}{2}\left(1-\frac{1}{mqq_1}\right)+\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{N}{2}(m+1)-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{qq_1}+\frac{1}{r_2}\right)=$$

$$=\frac{N}{2}(m+1)-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{qq_1}+\frac{1}{qq_2}+\frac{1}{N}\right)=\frac{N}{2}(m+1)-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{N}\right)=$$

$$=\frac{N}{2}\left(m+1-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2},$$

с учетом которой из (8.24) получим такую оценку:

$$K_2 \leqslant \frac{C}{t^{N(m+1-1/q)/2-1}}, \quad t > 0. \tag{8.25}$$

Теперь получим оценку для K_1. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$K_1 \leqslant \int\limits_0^{t/2} \||D_x\mathscr{E}_a(t-s)|\|_q \||n(s)|^m|D_x\phi(s)|\|_1\,ds \leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_0^{t/2} \frac{1}{(t-s)^{N(1-1/q)/2+1/2}}\|n(s)\|^m_{mr_1}\||D_x\phi(s)|\|_{r_2}\,ds, \tag{8.26}$$

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=1, \quad \||D_x\mathscr{E}_a(t)|\|_q \leqslant \frac{C}{t^{N(1-1/q)/2+1/2}},$$

причем в силу теоремы 1 работы [11] имеем:

$$\||D_x\phi|\|_{r_2} \leqslant C\left(\|n\|_{r_3}+\|p\|_{r_3}\right), \quad \frac{1}{r_2}=\frac{1}{r_3}-\frac{1}{N}, \quad r_3>1. \tag{8.27}$$

Причем требование $r_3 > 1$ приводит нас к необременительному условию:

$$r_2 > \frac{N}{N-1}, \quad \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=1.$$

Из (8.26) с учетом (8.27) получим оценку:

$$K_1 \leqslant C\int\limits_0^{t/2}\frac{1}{(t-s)^{N(1-1/q)/2+1/2}}\frac{1}{(A_1+A_2s)^{mN(1-1/(mr_1))/2+N(1-1/r_3)/2}}\,ds, \tag{8.28}$$

причем $A_1, A_2 > 0$ и справедливы равенства:

$$\frac{mN}{2}\left(1-\frac{1}{mr_1}\right)+\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{r_3}\right)=$$
$$=\frac{N}{2}(m+1)-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{N}\right)=\frac{N}{2}\left(m-\frac{1}{N}\right)=\frac{mN-1}{2}. \tag{8.29}$$

Из (8.28) с учетом (8.29) получим оценку:

$$K_1 \leqslant C\int\limits_0^{t/2}\frac{1}{(t-s)^{N(1-1/q)/2+1/2}}\frac{1}{(A_1+A_2s)^{(mN-1)/2}}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{t^{N(1-1/q)/2+1/2}}\int\limits_0^{t/2}\frac{ds}{(A_1+A_2s)^{(mN-1)/2}} =$$

$$= \frac{C}{t^{N(1-1/q)/2+1/2}}\begin{cases} 1, & \text{если} \quad N > 3/m, \\ \dfrac{1}{A_2}\ln\left(\dfrac{A_2}{2A_1}t+1\right), & \text{если} \quad N=3,\ m=1. \end{cases} \tag{8.30}$$

Таким образом, из (8.19) с учетом (8.21), (8.25), (8.30) получим первую оценку из (8.16). Аналогичным образом приходим ко второй оценке из (8.16).

Для доказательства оценки (8.17) заметим, что в силу (8.16) справедливы оценки:

$$\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(D_x \frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right) (n(y,t) - M_n \mathscr{E}_a(y,t))\, dy\right\|_q \leqslant$$
$$\leqslant C(N,q)\|n(t) - M_n\mathscr{E}_a(t)\|_r \leqslant \frac{C}{t^{\beta(r)}}, \quad (8.31)$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{r} - \frac{1}{N}, \quad r > 1.$$

Заметим, что неравенство $r > 1$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$q > \frac{N}{N-1}. \quad (8.32)$$

Кроме того, несложным вычислениями получаем, что

$$\beta(r) = \beta(q) - 1. \quad (8.33)$$

Из (8.31), (8.32) и (8.33) получаем оценку (8.17). Теорема доказана полностью.

Список литературы

[1] Hao Wu, P. A. Markowich, Sogmu Zheng, “Global existence and asymptotic behavior for a semicomductor drift–diffusion–poisson model”, *MMAS*, **18**:3 (2008), 443–487.

[2] A. Arnold, P. A. Markowich, G. Toscani, “On large time asymptotics for drift–diffusion–Poisson systems”, *Transp. Th. Statist. Phys*, **29** (2000), 571–581.

[3] M. Escobedo, E. Zuanua, “Large time behavior for convection-diffusion equations in $\mathbb{R}^N$”, *J. Functional Analys.*, **100** (1991), 119–161.

[4] P. I. Naumkin, I. A. Shishmarev, “Nonlinear nonlocal equations in the theory of waves”, *Translations of mathematical monographs*, **133** (1994), 292.

[5] N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, I. A. Shishmarev, “Asymptotics for dissipative nonlinear equations”, *Springer*, **133** (2006), 557.

[6] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, “Теоретическая физика том 10. Физическая кинетика”, *М.: ФИЗМАТЛИТ*, 2001, 536 с..

[7] В. А. Сергеев, А. М. Ходаков, “Нелинейные тепловые модели полупроводниковых приборов”, *Ульяновск: УлГТУ*, 2012, 159 с..

[8] Н. В. Крылов, “Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера”, *Новосибирск: Научная книга*, 1998, 178 с..

[9] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, “Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка”, *М.: Наука*, 1989, 464 с.

[10] Б. П. Демидович, “Лекции по математической теории устойчивости”, *Москва, Наука*, 1967.

[11] И. Стейн, “Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций”, *М.: Мир*, 1973, 344 с.

М. О. Корпусов (M. O. Korpusov)
Кафедра математики физического факультета МГУ им.
М. В. Ломоносова. Российский университет дружбы народов
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: korpusov@gmail.com

Поступила в редакцию
26.03.2011