S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Vol. 20, No. 2, pp. 144–145 (2023) УДК 510.5
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 03D99

ПОЧТИ ОГРАНИЧЕННО КОМБИНАТОРНО-СЕЛЕКТОРНЫЕ МНОЖЕСТВА

Д.И. ИВАНОВ, И.Д. ИВАНОВ

Communicated by P.P. PETROV

ABSTRACT. This article discusses the classification of sets from the range of limited combinatorial, proper subsets of the set $N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ by partial Boolean functions. For an arbitrary partial Boolean function β, the concept of an almost β-limited combinatorial-selector set is defined, which is a generalization of the concept of an almost β-combinatorial selector set [5]. The classes of these sets are fully described and the relations between these classes in terms of inclusion are revealed.

Keywords: combinatorial sets, combinatorial-selector sets, limited-combinatorial sets, limited combinatorial-selector set, almost limited combinatorial-selector set.

1 Введение

Представленная работа является логическим продолжением и завершает цикл статей [12], [13] о классификации подмножеств множества $N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ посредством частичных булевых функций и эффективной вычислимости. Изначало идея такой классификации принадлежит А.Н. Дегтеву, который расширил понятие полурекурсивного множества, предложив использовать в определении произвольную всюду определенную булеву функцию (БФ) β. Напомним, множество $A \subseteq N$,

IVANOV D.I., IVANOV I.D., ALMOST LIMITED COMBINATORIAL-SELECTOR SETS.

Поступила 1 января 2025 г., опубликована 1 марта 2025 г.

называется полурекурсивным (К. Джокуш) [9], если существует всюду определенная вычислимая функция $f : N \times N \to N$ такая, что

$$(\forall x)\,(\forall y)\ (f(x,y) \in \{x,y\} \wedge ((\chi_A(x) \vee \chi_A(y)) = 1 \Leftrightarrow f(x,y) \in A)),$$

и почти полурекурсивным (А.Н.Дегтев) [4], если

$$(\forall x)\,(\forall y)\ (f(x,y) \in \{x,y,\overline{a}\} \wedge ((\chi_A(x) \wedge \chi_A(y)) = 1 \Leftrightarrow f(x,y) \in A)),$$

где $\overline{a} \notin A$ и χ_A – характеристическая функция множества A, то есть

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, \text{если } t \in A; \\ 0, \text{если } t \notin A. \end{cases}$$

Заменив в определении полурекурсивного множества дизъюнкцию на произвольную БФ β, А.Н. Дегтев получил множества, названные им β-комбинаторными, а именно, множество A называется β-комбинаторным, где β – произвольная n-местная БФ, если существует вычислимая функция $f : N^n \to N$, такая что

$$(\forall x_1, ..., x_n)\ (\beta\,(\chi_A(x_1), ..., \chi_A(x_n)) = 1 \Leftrightarrow f(x_1, ..., x_n) \in A).$$

Накладывая ограничения на функцию f, в частности, потребовав, чтобы функция f была селекторной:

$$(\forall x_1, ..., x_n)(f(x_1, ..., x_n) \in \{x_1, \ldots, x_n\}),$$

он пришёл к определению понятия β-комбинаторно-селекторного (β-селекторного) множества [1]. А несколько ослабив условие селекторности, получил почти β-комбинаторно-селекторные множества [5], т.е. такие множества $A \subseteq N$, для которых найдется элемент $\overline{a} \notin A$ и вычислимая функция $f : N^n \to N$, что

$$(\forall x_1, ..., x_n)(f(x_1, ..., x_n) \in \{x_1, \ldots, x_n, \overline{a}\}),$$
$$(\forall x_1, ..., x_n)\ (\beta\,(\chi_A(x_1), ..., \chi_A(x_n)) = 1 \Leftrightarrow f(x_1, ..., x_n) \in A).$$

Были полностью описаны классы таких множест и установлены их отношения по включению [5].

Кроме того, меняя в определении β-комбинаторного множества эквивалентность на импликацию [3], а также, рассматривая в качестве f произвольную частично вычислимую функцию, были получены определения β-импликативно-селекторного множества, слабо β-импликативно-селекторного и слабо β-комбинаторно-селекторного множеств, которые изучены и найдены соотношения между их классами в работах [2], [6], [7], [8], [10], [11].

Ограниченно-комбинаторные (ОК) множества, описанные в работе [12], являются обобщением понятия β-комбинаторных, а ограниченно комбинаторно-селекторные (ОКС) [13] – обощением β-комбинаторно-селекторных множеств посредством замены всюду определенной БФ на частичную. В настоящей статье рассматриваются ограниченно комбинаторно-селекторные множества с дополнительным требованием расширения селекторности функции f, посредством элемента $\overline{a}$. Полностью описаны классы этих множеств и установлены их соотношению по включению.

2 Основные результаты

Булева функция β называется *частичной*, если хотя бы для одного из наборов $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \{0,1\}^n$ значение БФ β на этом наборе не определено $(\beta\,(\theta_1, \ldots, \theta_n)\uparrow)$.

Определение 1. *Множество $A \subseteq N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, отличное от $\varnothing$ и N, называется почти β-ограниченно комбинаторно-селекторным (почти β-ОКС), если существует частично вычислимая функция $f : N^n \to N$ такая, что для всех $x_1, \ldots, x_n \in N$ выполнены условия:*
(i) $f\,(x_1, \ldots, x_n)\uparrow \Leftrightarrow \beta\,(\chi\,(x_1), \ldots, \chi\,(x_n))\uparrow$,
(ii) $f(x_1, \ldots, x_n)\downarrow \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \in \{x_1, \ldots, x_n, \overline{a}\}$,
(iii) $f(x_1, \ldots, x_n) \in A \Leftrightarrow \beta\,(\chi\,(x_1), \ldots, \chi\,(x_n)) = 1$,
где $\overline{a} \notin A$ и χ – характеристическая функция множества A. В этом случае говорим, что A является почти β-ОКС множеством с соответствующей частично вычислимой функцией f.

Считаем частичную БФ β *допустимой* , если она не является нигде не определённой и существует хотя бы одно почти β-ОКС множество A, такое что $A \neq \varnothing$, $A \neq N$.

Как и в работах [12], [13], будем обозначать класс всех перечислимых множеств – $\mathbf{E}_1$, а $\mathbf{E}_0 = \{X : X = N \setminus Y, Y \in \mathbf{E}_1\}$ – класс множеств, имеющих перечислимое дополнение. Тогда $\mathbf{R} = \mathbf{E}_0 \cap \mathbf{E}_1$ – класс всех вычислимых множеств.

Замечание. Так как $\varnothing$ и N не являются почти β-ОКС множествами, то будем в дальнейшем рассматривать классы $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1$ и $\mathbf{R}$ без них.

Предпошлем доказательству основного результата ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Если β – допустимая БФ, то $\beta\,(0, \ldots, 0) \neq 1$.*

Доказательство. Пусть A является почти β-ОКС множеством с соответствующей частично вычислимой функцией f. Пусть $\overline{a} \notin A$, тогда, если $f(\overline{a}, \ldots, \overline{a})\downarrow$ (функция определена), то $f(\overline{a}, \ldots, \overline{a}) \notin A$, а значит, $\beta\,(0, \ldots, 0) = 0$ (или $\beta\,(0, \ldots, 0)\uparrow$). □

Непосредственно из определения следует, что всякое β-ОКС множество является также почти β-ОКС множеством, а любое почти β-ОКС множество будет и β-ОК множеством. Поэтому утверждения лемм 2 и 3 вытекают из соответствующих фактов, полученных в статьях [12], [13].

Лемма 2. *Любое вычислимое множество является почти β-ОКС множеством для всякой допустимой частичной БФ β.* □

Лемма 3. *Всякое почти β-ОКС множество или является перечислимым, или имеет перечислимое дополнение, для любой допустимой частичной БФ β.* □

Если в определении почти β-ОКС множества вместо частичной БФ использовать всюду определенную, то придем к понятию почти комбинаторно-селекторного множества [5], при этом частично вычислимая функция станет всюду определенной. Доказано, что семейство почти β-селекторных множеств совпадает либо с семейством вычислимых ($\mathbf{R}$), либо с семейством полурекурсивных множеств ($\mathbf{S}$), либо с семейством почти полурекурсивных ($\mathbf{AS}$), или же с классом всех подмножеств множества $\mathbf{N}$ ($\mathbf{F}$) [5], причем

$$\mathbf{R} \subset \mathbf{S} \subset \mathbf{AS} \subset \mathbf{F}$$

Обратимся к понятийному аппарату и терминологии, используемыми в работах [12], [13].

Лемма 4. *Для булевых функций*

$$\beta_\theta\left(\theta_1, ..., \theta_n\right) = \begin{cases} \theta, \text{если } \theta_1 = ... = \theta_n = \theta \\ \uparrow, \ \text{иначе} \ , \end{cases}$$

семейство почти β_θ-ОКС множеств совпадает с классом $\boldsymbol{E}_\theta$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 5 работы [13]. □

Рассмотрим сужение частичной булевой функции $\beta\left(t_1, \ldots, t_n\right)$, полученное заменой $(n - m)$ ее переменных $t_{i_{m+1}}, ..., t_{i_n}$ $\left(i_{m+1} < \ldots < i_n\right)$, $1 \le m \le (n - 1)$ на константы $\theta_{i_p} \in \{0, 1\}, p \in \{m + 1, \ldots, n\}$. Может оказаться, что полученное сужение

$$\beta_1\left(t_{i_1}, \ldots, t_{i_m}\right) = \beta\left(t_{i_1}, \ldots, t_{i_m}\right)\left[\theta_{i_{m+1}}, \ldots, \theta_{i_n}\right].$$

станет всюду определенной булевой функцией.

Определение 2. [12] *Сужение называется максимальным, если оно всюду определенное и для любого $j \in \{m + 1, \ldots, n\}$, булева функция*

$$\beta_{1_j}(t_{i_1}, \ldots, t_{i_m}, t_{i_j})[\theta_{i_{m+1}}, \ldots, \theta_{i_{j-1}}, \theta_{i_{j+1}}, \ldots, \theta_{i_n}]$$

становится частичной БФ для любого набора констант.

Лемма 5. *Если БФ $\beta(t_1, \ldots, t_n)$ допускает сужение по переменным $t_{i_1}, \ldots, t_{i_m}$ на наборе констант $\left(\theta_{i_{m+1}}, \ldots, \theta_{i_n}\right)$, причем существуют $l, t \in \{i_{m+1}, \ldots, i_n\}$, $l \neq t$, такие что $\theta_l = 1 - \theta_t$, то семейство почти β-ОКС множеств совпадает с классом вычислимых множеств.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 6 работы [12]. □

Может оказаться, что БФ β допускает несколько максимальных сужений.

Определение 3. [12] *Последовательностью максимальных сужений для БФ β называется набор всех возможных ее максимальных сужений:*

$$\beta_1(t_{11},t_{12},\ldots,t_{1k_1})=\beta(t_{11},t_{12},\ldots,t_{1k_1})\left[\theta_{1(k_1+1)},\theta_{1(k_1+2)},\ldots,\theta_{1n}\right],$$
$$1\le k_1<n,$$
$$\beta_2(t_{21},t_{22},\ldots,t_{2k_2})=\beta(t_{21},t_{22},\ldots,t_{2k_2})\left[\theta_{2(k_2+1)},\theta_{2(k_2+2)},\ldots,\theta_{2n}\right],$$
$$1\le k_2<n,$$
$$\ldots,$$
$$\beta_r(t_{r1},t_{r2},\ldots,t_{rk_r})=\beta(t_{r1},t_{r2},\ldots,t_{rk_r})\left[\theta_{r(k_r+1)},\theta_{r(k_r+2)},\ldots,\theta_{rn}\right],$$
$$1\le k_r<n$$

Определение 4. [12] *Булева функция называется разложимой, если для каждого i $(1\le i\le r)$ функции последовательности максимальных сужений β_i получены на наборах одних и тех же констант $(\theta,\ldots,\theta)$, $\theta\in\{0,1\}$*

$$\beta_1(t_{11},t_{12},\ldots,t_{1k_1})=\beta(t_{11},t_{12},\ldots,t_{1k_1})[\theta,\theta,\ldots,\theta],1\le k_1<n,$$
$$\beta_2(t_{21},t_{22},\ldots,t_{2k_2})=\beta(t_{21},t_{22},\ldots,t_{2k_2})[\theta,\theta,\ldots,\theta],1\le k_2<n,$$
$$\ldots,$$
$$\beta_r(t_{r1},t_{r2},\ldots,t_{rk_r})=\beta(t_{r1},t_{r2},\ldots,t_{rk_r})[\theta,\theta,\ldots,\theta],1\le k_r<n,$$

а в остальных случаях значение β не определено.

Лемма 6. *Если допустимая частичная булева функция не является разложимой и отлична от функций $\beta_\theta,\theta\in\{0,1\}$ из леммы 4, то любое почти β-ОКС множество является вычислимым.*

Доказательство. Любое почти β-ОКС множество A является так же и β-ОК множеством, а любое β-ОК множество для всякой неразложимой БФ β вычислимо. [12] □

Теорема 1. *Для произвольной допустимой разложимой частичной БФ β, семейство почти β-ОКС множеств совпадает с семейством вычислимых множеств $\boldsymbol{R}$ или с семейством полурекурсивных перечислимых $\boldsymbol{E}_1\cap\boldsymbol{S}$ или с семейством полурекурсивных коперечислимых множеств $\boldsymbol{E}_0\cap\boldsymbol{S}$ или же с семейством перечислимых $\boldsymbol{E}_1$ или коперечислимых $\boldsymbol{E}_0$ множеств.*

Доказательство. Пусть множество A – почти β-ОКС для некоторой разложимой частичной БФ β с соответствующей вычислимой (частичной) функцией $f(x_1,\ldots,x_n)$. Кроме того, $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r$ – последовательность максимальных сужений функции β из определения 4. Так как

$$\beta_1(\chi_A(x_{11}),\chi_A(x_{12}),...,\chi_A(x_{1k_1}))=$$
$$\beta(\chi_A(x_{11}),\chi_A(x_{12}),...,\chi_A(x_{1k_1}))[\theta,\theta,...,\theta]$$

всюду определенная БФ, то соответствующая ей вычислимая функция $f_1(x_{11},x_{12},\ldots,x_{1k_1})$, полученная из n-местной функции f подстановкой

$$x_{1(k_1+1)}=x_{1(k_1+2)}=\cdots=x_{1n}=a\,(\overline{a}),$$

если $\theta=1\,(0)$ станет также всюду определенной, где $a,\overline{a}$ – фиксированные элементы из A и $N\setminus A$ соответственно. Определим по f_1,k_1 -местную вычислимую функцию g_1 следующим образом:

если $f_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k_1}) = \overline{a}$,
то положим $g_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k_1}) = f_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k_1})$;
если $f_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k_1}) \neq \overline{a}$ и $f_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k_1}) \neq a$,
то также определим $g_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k_1}) = f_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k_1})$;
если же $f_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k_1}) = a$,
то будем перечислять множество $A\,(N \setminus A)$ (по лемме 3), и, если вычислилось первым значение

$$x_{1i} \in \{x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k_1}\},$$

то положим $g_1(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k_1}) = x_{1i}$. Таким образом, множество A окажется β_1-комбинаторно-селекторным с соответствующей функцией g_1. Такие множества были изучены в работе [5], доказано, что семейство почти β-комбинаторно-селекторных множеств совпадает либо с семейством рекурсивных ($\mathbf{R}$), либо с семейством полурекурсивных ($\mathbf{S}$), либо с семейством почти полурекурсивных ($\mathbf{AS}$), или же с классом всех подмножеств множества N. А так как по лемме 3 $A \in \mathbf{E}_\theta$, где $\theta \in \{0, 1\}$, а также учитывая, что перечислимые и коперечислимые почти полурекурсивные множества являются полурекурсивными [4], можно утверждать: A принадлежит одному из классов:$\mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{S}, \mathbf{R}, \theta \in \{0, 1\}$.

Аналогично показывается, что множество A является также почти $\beta_2, \ldots, \beta_r$-селекторным множеством с соответствующими всюду определенными вычислимыми функциями $g_2, \ldots, g_r$, т. е. $A \in K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_r$, где

$$K_i \in \{\mathbf{R}, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{S}\}, \theta \in \{0, 1\}, i \in \{1, \ldots, r\},$$

а, следовательно, A принадлежит одному из классов:

$$\mathbf{R}, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{S}, \theta \in \{0, 1\}.$$

Не противоречит этому утверждению случай, когда ни одно из значений $x_{11}, x_{12}, ..., x_{1k_1}$ не вычислится. Действительно, пусть для некоторой функции $\beta^0 : \beta^0\,(0, \ldots, 0)\,[1, \ldots, 1] = 1$. Если β^0 отлична от константы, то на каком-то из наборов она примет значение 0, а, значит, функция является немонотонной. Пусть она немонотонна по первой переменной, т.е.

$$\beta^0\,(0, \chi_A(x_{12}), ..., \chi_A(x_{1k_1}))\,[1, \ldots, 1] = 1;$$
$$\beta^0\,(1, \chi_A(x_{12}), ..., \chi_A(x_{1k_1}))\,[1, \ldots, 1] = 0;$$

Обозначим первую переменную в соответствующей функции x, отождествим с y те переменные x_{1i}, для которых $\theta_{1i} = 0$, а с z те, для которых $\theta_{1j} = 1$. Получим вычислимую функцию $h\,(x, y, z)$. Тогда множество $A = \{x : g\,(x, \overline{a}, a) = \overline{a}\}$ – вычислимое.

Пусть теперь β – разложимая частичная БФ, A и B – два различных β-ОКС множества, они принадлежат одному классу, значит, A и B являются почти β-ОКС множествами, и, так как классы β-ОКС и почти

β-ОКС множеств совпадают, тоже принадлежат одному классу. Следовательно, если A – почти β-ОКС для некоторой разложимой частичной БФ β принадлежит некоторому классу, то любое другое множество этого класса является почти β-ОКС.

□

3 Заключение

Учитывая результаты, полученные выше, можно сформулировать основной результат статьи.

Теорема 2. *Всякое почти β-ОКС множество является β-ОКС множеством, и наоборот, всякое β-ОКС множество является почти β-ОКС.* □

Таким образом, в случае использования в определении частичных булевых функций, β-ОКС и почти β-ОКС оказались неразличимы.

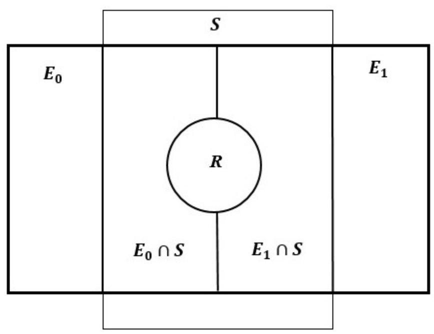

Рис. 1. Диаграмма включения классов почти β-ограниченно комбинаторно-селекторных множеств.

References

[1] A.N. Degtev, *Recursive-combinatorial properties of subsets of the natural numbers*, Algebra Logic, **29**:3 (1990), 204–210. Zbl 0727.03026

[2] A.N. Degtev, *Weak combinatorial selective properties of subsets of the natural numbers*, Algebra Logic, **29**:4 (1990), 280–286. Zbl 0733.03033

[3] A.N. Degtev, *Implicatively selector sets*, Algebra and Logic, **35**:2 (1996), 80–85. Zbl 0897.03044

[4] A.N. Degtev, *Almost semirecurcive sets*, Math. Notes, **66**:2 (1999), 188–193. Zbl 0957.03048

[5] A.N. Degtev, *Almost combinatorial selector sets*, Math. Notes, **68**:6 (2000), 721–723. Zbl 0990.03032

[6] A.N. Degtev, D.I. Ivanov, *Weakly combinatorial selector sets*, Algebra Logic, **37**:6 (1998), 357–362. Zbl 0913.03047

[7] A.N. Degtev, D.I. Ivanov, *Weakly implicatively selective sets of dimension 3*, Discrete Math. and Appl., **9**:4 (1999), 395–402. Zbl 0965.03055

[8] A.N. Degtev, D.I. Ivanov, *About the classes of linear and self-dual weakly implicative selector sets*, Tyumen State University Herald, **4** (2004), 238–241.

[9] C. G. jun. Jockusch, *Semirecursive sets and positive reducibility*, Trans. Am. Math. Soc., **131**2 (1968), 420–436. Zbl 0198.32402

[10] D.I. Ivanov, *Weakly implicative selector sets*, Russ. Math., **50**:9 (2006), 27–31. Zbl 07092351

[11] D.I. Ivanov, *Weakly combinatorial-selector sets*, Russ. Math., **50**:11 (2006), 20–23 (2006). Zbl 07092373

[12] D.I.Ivanov, M.L. Platonov, *Limited-combinatorial sets*, Sib. Electron. Mat. Izv., **16** (2019), 1553—1560. Zbl 1436.03222

[13] D.I.Ivanov, O.V. Ivanova, *Limited combinatorial-selector sets*, Sib. Electron. Mat. Izv., **20**:1 (2023), 140—149. Zbl 07896762

Dmitry Ivanovich Ivanov
Tyumen State University,
Volodarskogo St., 6,
625003 Tyumen, Russian Federation
Email address: d.i.ivanov@utmn.ru

Ivan Dmitrievich Ivanov
Novosibirsk State University,
Pirogova St., 2,
630090 Novosibirsk, Russian Federation
Email address: i.ivanov6@g.nsu.ru