

СОВЕРШЕННЫЕ РАСКРАСКИ СКРЕЩЕННОЙ  
ПРИЗМЫ

М.А. ЛИСИЦЫНА, С.В. АВГУСТИНОВИЧ

ABSTRACT. A coloring of vertices of a given graph is called perfect if the color structure of each sphere of radius 1 in the graph depends only on the color of the sphere center. The crossed prism graph is a graph obtained by taking two disjoint infinite cycles (the vertices of the upper cycle are even integers, and the vertices of the lower cycle are odd ones) and adding edges  $(i, i+3)$  for  $i = 4p$  and  $(i, i-1)$  for  $i = 4p + 2$  ( $p \in \mathbb{Z}$ ). A complete description of perfect colorings with an arbitrary number of colors is obtained for crossed prism graph. It is proved that all its perfect colorings are exhausted by disjunctive ones, except for six sporadic cases.

**Keywords:** crossed prism graph, perfect coloring, disjunctive perfect coloring.

## Введение

Раскраска вершин графа  $G$  в цвета  $I = \{1, 2, \dots, k\}$  называется *совершенной* с матрицей параметров  $M = (m_{ij})$ , если число вершин цвета  $j$  в 1-окрестности вершины цвета  $i$  не зависит от выбора последней и равно  $m_{ij}$ . В случае мультиграфа 1-окрестность вершины определяется с учетом кратностей входящих в нее мультиребер. Заметим, что  $M$  является квадратной матрицей порядка  $k$ .

---

LISITSYNA, M.A., AVGUSTINOVICH, S.V., PERFECT COLORINGS OF THE CROSSED PRISM GRAPH.

© 2025 Лисицына М.А., Августинович С.В..

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0017).

Поступила 14 февраля 2025 г., опубликована ?? июля 2025 г.

Граф *скрещенной призмы*  $CP_\infty$  – это граф, полученный из двух непесекающихся бесконечных цепей (вершины верхней цепи – четные числа, а вершины нижней цепи – нечетные) добавлением ребер  $(i, i + 3)$  для  $i = 4p$  и  $(i, i - 1)$  для  $i = 4p + 2$  ( $p \in \mathbb{Z}$ ) (см. рис. 1).

В работе изучаются совершенные раскраски графа  $CP_\infty$  в произвольное конечное число цветов.

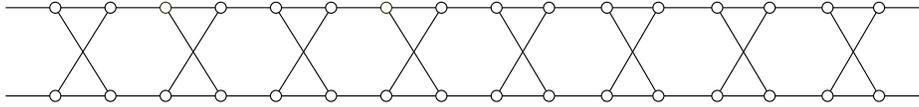


Рис. 1. Локальное строение скрещенной призмы

Первые результаты о совершенных раскрасках транзитивных кубических графов получены в [1]. В работе перечислены все допустимые параметры совершенных 2-раскрасок шести бесконечных семейств: конечных призм, лестниц Мебиуса, скрещенных призм, хордальных циклов, обобщенных графов Петерсена, усеченных графов. *Бесконечной цепью*  $C_\infty$  называется граф, множество вершин которого совпадает с множеством целых чисел, две вершины  $u$  и  $v$  смежны, если  $|u - v| = 1$ . Граф призмы  $P_\infty$  равен прямому произведению  $C_\infty$  на ребро. В [2] описаны все совершенные раскраски в конечное число цветов для графов бесконечной цепи  $C_\infty$  и призмы  $P_\infty$ .

Граф скрещенной призмы также содержит бесконечную цепь в качестве подграфа. Близкими в этом смысле к нему являются бесконечные циркулянтные графы и  $G$ -кратные бесконечные цепи.

*Бесконечным циркулянтным графом с дистанциями*  $d_1, d_2, \dots, d_n, d_i \in \mathbb{Z}$  называется граф  $C_\infty(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , множество вершин которого совпадает с множеством целых чисел, для любой вершины  $v$  множество инцидентных ей ребер имеет вид  $\{\{v, v \pm d_i\} | i = 1, 2, \dots, n\}$ . Первые работы о совершенных раскрасках циркулянтных графов принадлежат Д. Б. Хорошиловой [3, 4]. Совершенные 2-раскраски графов  $C_\infty(\tilde{n}) \stackrel{\text{def}}{=} C_\infty(1, 2, \dots, n)$  и  $C_\infty(1, 3, \dots, 2n - 1)$  получены в [5] и [6] соответственно. В [7] описаны совершенные  $k$ -раскраски для графа  $C_\infty(1, 2)$  и произвольного конечного  $k$ .

В [8] выдвинута гипотеза о том, что совершенные раскраски графов  $C_\infty(\tilde{n})$  в произвольное количество цветов исчерпываются орбитными сериями и совершенными раскрасками с периодами  $2n$ ,  $2n + 1$  и  $2n + 2$ . В работе [9] получено множество совершенных раскрасок графов  $C_\infty(\tilde{n})$  для  $n = 3m + 1$  с периодами длины  $4n + 2$ , опровергающее гипотезу.

Все совершенные  $k$ -раскраски графа  $C_\infty(\tilde{n})$  для  $k \geq 3n + 3$  перечислены в [10]. Заметим, что они в точности совпадают с совершенными раскрасками бесконечной цепи в  $k$  цветов.

Пусть  $G$  – произвольный граф. Заменим каждую вершину бесконечной цепи на копию графа  $G$ , добавим ребра, соединяющие любые две

вершины из соседних копий. Полученный граф назовем  $G$ -кратной бесконечной цепью и обозначим  $C_\infty \cdot G$ . Определенный таким образом граф является в точности лексикографическим произведением графов  $C_\infty$  на  $G$  (см., например, [11]).

Далее всюду  $n$  — натуральное число. В [12] были описаны совершенные  $k$ -раскраски произведений  $C_\infty \cdot \overline{K_n}$  и  $C_\infty \cdot K_n$  для любого конечного  $k$ , где  $\overline{K_n}$  и  $K_n$  — пустой и полный графы на  $n$  вершинах соответственно. А в [13] все такие раскраски получены для  $C_\infty \cdot M_n$ , где  $M_n$  — граф паросочетания на  $2n$  вершинах.

### 1 Дизъюнктные совершенные раскраски скрещенной призмы

Для описания конструкции на графе  $CP_\infty$ , которой посвящен этот параграф, необходимо ввести новые понятия.

Пара вершин одной доли в 4-цикле скрещенной призмы образует *блок*. Два соседних блока, не принадлежащих одному 4-циклу, назовем *комплексом*. Определенные таким образом множества вершин проиллюстрированы на рисунке 2.

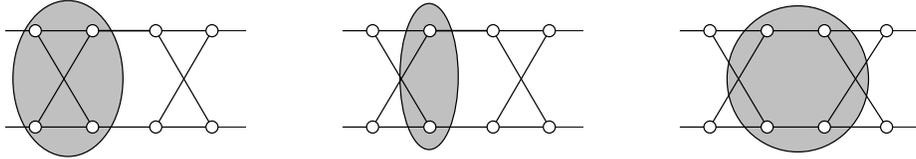


Рис. 2. 4-цикл, блок и комплекс скрещенной призмы

Граф, изображенный на рис. 3, назовем *цепочечным* графом и обозначим  $F_\infty$  (от *fettters* — цепи, кандалы). Заметим, что граф  $F_\infty$  может быть получен из  $CP_\infty$  отождествлением вершин в каждом блоке и уменьшением кратности ребер в два раза. Указанное действие задает естественное накрытие графа  $F_\infty$  графом скрещенной призмы. Ребро цепочечного графа, которое является образом комплекса при таком накрытии, назовем *промежуточным*.

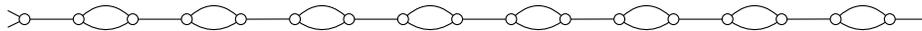


Рис. 3. Локальное строение цепочечного графа

Напомним, что  $k$  — натуральное число. Если известна матрица параметров совершенной раскраски и цвета пары смежных вершин графа  $F_\infty$  (на самом деле достаточно даже одной), легко продолжить раскраску на соседние вершины и т.д. Т.к. число различных раскрасок двух вершин в  $k$  цветов конечно для заданного  $k$ , то всякая совершенная раскраска

этого графа периодична. Таким образом, для описания совершенной раскраски цепочечного графа достаточно указать ее наименьший период, где под периодом мы понимаем последовательность цветов, заключенную в квадратные скобки, количество элементов в которой равно длине периода.

Две раскраски графа  $CP_\infty$  будем считать *эквивалентными*, если можно указать автоморфизм графа и перестановку цветов так, чтобы первую его раскраску перевести во вторую. Здесь следует отметить, что группа автоморфизмов графа  $CP_\infty$  насыщена парными транспозициями, которые меняют местами верхние и нижние вершины в блоках из одного комплекса. Этот факт требует особой аккуратности при выборе канонических представителей в классах эквивалентности совершенных раскрасок исследуемого графа.

При фиксированном линейном порядке на множестве цветов раскраску вершин комплекса будем называть *монотонной*, если цвет верхней вершины левого блока в комплексе не превосходит цвета его нижней вершины. Далее приведем все совершенные раскраски к виду, когда все комплексы окрашены монотонным образом. Нетрудно заметить, что такая раскраска периодична. Ее период будем записывать таблицей размера  $2 \times l$  в квадратных скобках ( $l$  – длина периода), где первый столбец – это раскраска левого блока некоторого комплекса. Раскраску фрагмента графа  $CP_\infty$ , в том числе блока или комплекса, будем записывать таблицей размера  $2 \times l$  в круглых скобках, где  $l$  – длина такого фрагмента.

Всякому периоду  $\left[ \begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \end{array} \right]$  поставим в соответствие вектор длины  $2l$  вида:  $(c_{11}, c_{21}, c_{12}, c_{22}, \dots, c_{1l}, c_{2l})$ . Назовем его *характеристическим*. Рассмотрим разметку множества цветов натуральными числами  $1, 2, \dots, k$ . Канонической в своем классе эквивалентности будем считать совершенную раскраску, характеристический вектор которой лексикографически минимален среди всех таких разметок, а также среди циклических сдвигов периода.

Раскраску скрещенной призмы назовем *дизъюнктивной*, если цветовые составы блоков в ней либо не пересекаются, либо совпадают. Решая задачу характеристики совершенных раскрасок бесконечного графа, удастся, как правило, выделить одну или несколько серий стандартных раскрасок, за рамками которых может остаться лишь конечное число sporadic-случаев. Далее будет доказано, что для графа  $CP_\infty$  такой серией являются дизъюнктивные совершенные раскраски.

Для всякой дизъюнктивной совершенной раскраски скрещенной призмы построим *редуцированную* раскраску следующим образом. Каждому варианту окрашивания блока в ней назначим некоторый дополнительный цвет так, чтобы различным раскраскам блоков соответствовали различные цвета. Перекрасим вершины блоков в соответствующие им дополнительные цвета.

Вершины одного блока в редуцированной раскраске скрещенной призмы соцветны по построению. Таким образом, редуцированные раскраски графа  $CP_\infty$  являются блочно монохромными. Для них верна следующая лемма.

**Лемма 1.** *Редуцированные раскраски скрещенной призмы являются совершенными.*

*Доказательство.* Возьмем две соцветные вершины редуцированной раскраски графа  $CP_\infty$ . Если они принадлежат одному блоку, то цветовой состав их окружения совпадает, так как редуцированная раскраска является блочно монохромной.

Рассмотрим случай, когда эти вершины из разных блоков –  $B_1$  и  $B_2$ . В дизъюнктивной совершенной раскраске блоки, которые находятся в одних 4-циклах с  $B_1$  и  $B_2$ , окрашены одинаково. Аналогичное утверждение справедливо и для блоков, которые расположены в одних с ними комплексах. Значит, в редуцированной раскраске цвета соседей  $B_1$  и  $B_2$  соответственно равны. Следовательно, цветовые составы 1-окрестностей рассматриваемых соцветных вершин также совпадают.  $\square$

Так как редуцированные раскраски графа  $CP_\infty$  являются блочно монохромными, то они находятся во взаимнооднозначном соответствии с совершенными раскрасками цепочечного графа.

Последние описаны в лемме 2.

**Лемма 2.** *Совершенные раскраски графа  $F_\infty$  в  $k$  цветов исчерпываются следующим списком:*

1. *циклические раскраски:*

$S(k) = [1\ 2\ 3\ \dots\ k-1\ k]$  *при четных  $k$ ;*

2. *зеркальные раскраски:*

$S_{22}(k) = [k\ k-1\ \dots\ 2\ 1\ 1\ 2\ \dots\ k-1\ k]$  *при  $k \in \mathbb{N}$ .*

*Доказательство.* Ранее уже отмечено, что совершенные раскраски цепочечного графа являются периодическими. Рассмотрим его совершенную раскраску  $\phi$ . Заметим, что  $\phi$  легко восстановить, зная ее параметры и раскраску любых двух смежных вершин.

Если для каждого цвета  $a$  окружение вершины этого цвета имеет одинаковый порядок цветов при чтении периода слева направо, то период такой совершенной раскраски имеет вид  $S(k) = [1\ 2\ 3\ \dots\ k-1\ k]$ , где  $k$  – четное (т.к. граф содержит кратные ребра).

Пусть найдется цвет  $a^*$  такой, что две вершины этого цвета имеют различный порядок цветов окружения при чтении периода слева направо. Заметим, что при этом порядок цветов относительно двукратного ребра должен быть одинаковый. Зная параметры  $\phi$ , легко продолжить раскраску этих фрагментов по направлению друг к другу. Такое продолжение будет симметричным и однозначно восстанавливается до совершенной раскраски с периодом  $S_{22}(k) = [k\ k-1\ \dots\ 2\ 1\ 1\ 2\ \dots\ k-1\ k]$ .  $\square$

**Следствие 1.** *Цветовые составы пар концов промежуточных ребер в совершенной раскраске графа  $F_\infty$  либо не пересекаются, либо совпадают.*

Всякая редуцированная раскраска скрещенной призмы получается двукратным воспроизведением некоторой совершенной раскраски цепочечного графа – на верхней и на нижней бесконечной цепи. Чтобы описать все дизъюнктные совершенные раскраски графа  $CP_\infty$ , необходимо получить все совершенные расщепления редуцированных. Заметим, что два блока из одного комплекса не могут расщепиться независимо, так как вершины одного блока принадлежат 1-окрестности другого. Раскраску комплекса назовем *допустимой*, если существует совершенная раскраска графа  $CP_\infty$ , частью которой она является.

Для дальнейших рассуждений введем понятие палитры цвета  $i$ . Множество цветов окружения вершины цвета  $i$  в совершенной раскраске  $\phi$  назовем *палитрой* цвета  $i$  в  $\phi$  и обозначим  $P_\phi(i)$ .

В следующей лемме перечислены все допустимые раскраски комплексов.

**Лемма 3.** *Допустимые раскраски комплексов с точностью до переобозначения цветов исчерпываются следующим списком ( $a, b, c$  и  $d$  различные):*

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & c \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

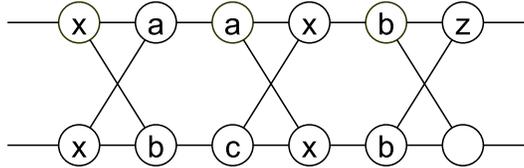


Рис. 4. Доказательство леммы 3

*Доказательство.* У вершин одного блока два из трех соседей совпадают, а несовпадающие принадлежат соседнему блоку в этом комплексе. Значит, два блока в одном окрашенном допустимым образом комплексе являются одновременно либо монохромными, либо – нет.

Кроме перечисленных выше раскрасок, данному условию (одновременной монохромности двух блоков в одном комплексе) удовлетворяет еще одна раскраска –  $\begin{pmatrix} a & a \\ b & c \end{pmatrix}$  – и только она. Покажем, что она не является допустимой. Предположим, что это не так, и найдется совершенная раскраска  $\phi$ , в которой есть комплекс, окрашенный таким образом. Блоки, дополняющие  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  до 4-циклов, лежат в 1-окрестностях

смежных вершин цвета  $a$ , значит, их цветовые составы совпадают. Пусть они равны  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ( $x$  и  $y$  не определены), причем  $P_\phi(x) = P_\phi(y) = \{a, b, c\}$ .

Продолжаем раскраску фрагмента далее одним блоком вправо  $-\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}$ . Из его монохромности следует  $x = y$ . Т.к. палитра цвета  $b$  содержит две вершины цвета  $x$ , то  $z = x$ . Но в 1-окрестности последней лежат две вершины цвета  $b$ , что противоречит составу  $P_\phi(x)$  (см. рис. 4).  $\square$

Из леммы 3 для дизъюнктных раскрасок получаем следующее утверждение.

**Следствие 2.** Пусть  $a < b < c < d$ . Раскраски комплексов в дизъюнктных совершенных раскрасках графа  $CP_\infty$  с точностью до приведения к каноническому виду исчерпываются следующим списком:

$$\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & b \\ d & a \end{pmatrix}.$$

Обобщим результаты проведенного исследования в конструкции, которая исчерпывает все дизъюнктные совершенные раскраски скрещенной призмы.

### Построение дизъюнктивной совершенной раскраски графа $CP_\infty$

1. Рассмотрим совершенную раскраску графа  $F_\infty$  в  $k$  цветов (см. лемму 2).

2. Каждой раскраске промежуточного ребра в ней назначим допустимую дизъюнктивную раскраску комплекса так, чтобы различным цветам его концов соответствовали раскраски блоков с непересекающимися цветовыми составами (см. следствие 2).

Заметим, что при  $a < b < c < d$  в дизъюнктивной совершенной раскраске графа  $CP_\infty$  комплекс  $\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}$  встречается вместе с комплексом  $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ , причем эта раскраска получена из зеркальной раскраски графа  $F_\infty$ . Аналогичное утверждение верно еще для двух пар комплексов  $\begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ , а также  $\begin{pmatrix} c & b \\ d & a \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}$ .

## 2 Основной результат

Дизъюнктные совершенные раскраски скрещенной призмы уже получены, поэтому для описания всех ее совершенных раскрасок остается получить все недизъюнктные совершенные раскраски.

Раскраска исследуемого графа является недизъюнктной, если существуют два блока, цветовые составы которых пересекаются, но не совпадают. Имеем два варианта: в первом – совершенная раскраска графа  $CP_\infty$  содержит блоки  $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ , а во втором –  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  (для различных  $a, b$  и  $c$ ).

Для окружения недизъюнктных блоков верна следующая лемма.

**Лемма 4.** *Если совершенная раскраска графа  $CP_\infty$  недизъюнктная, то в блоках, дополняющих блоки с пересекающимися цветовыми составами до 4-циклов, найдется пара соцветных вершин.*

*Доказательство.* Предположим противное: пусть блок, дополняющий блок  $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$  до 4-цикла, окрашен  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , а блок, дополняющий блок  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  до 4-цикла окрашен  $\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$ . Заметим, что в окружении вершин цвета  $a$  встречаются вершины цветов  $x, y, z$  и  $t$ . А т.к. граф кубический, то среди них найдутся одинаковые цвета.

Для блоков  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  рассуждения аналогичные.  $\square$

Длину кратчайшей цепи, соединяющей вершины двух блоков, назовем *расстоянием* между этими блоками. За  $\rho$  обозначим минимальное расстояние между двумя недизъюнктными блоками в совершенной раскраске. Характеризацию недизъюнктных совершенных раскрасок скрещенной призмы выполним перебором всех возможных значений параметра  $\rho$ .

Из определения  $\rho$  следует справедливость леммы 5.

**Лемма 5.** *Между недизъюнктными блоками  $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  ( $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ ), расположенными на минимальном расстоянии  $\rho$ , нет блоков, содержащих вершины цветов  $a$  и  $b$  ( $a, b$  и  $c$ ).*

Сформулируем и докажем основной результат статьи:

**Теорема 1.** *Совершенные раскраски графа  $CP_\infty$  с точностью до эквивалентности исчерпываются следующим списком:*

1. *дизъюнктные совершенные раскраски;*
2. *шесть недизъюнктных совершенных раскрасок:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

*Доказательство.* По сути дела, надо доказать только второй пункт теоремы. Пусть  $\phi$  – недизъюнктная совершенная раскраска скрещенной

призмы. Выделим три варианта для  $\rho$ :  $\rho = 1$ ,  $\rho = 2$  и  $\rho > 2$ . Каждый из них, в свою очередь, делится еще на два случая: первый соответствует паре блоков  $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  на расстоянии  $\rho$  ( $a \neq b$ ), второй – паре блоков  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  на том же расстоянии ( $a, b$  и  $c$  различные). Рассмотрим фрагмент совершенной раскраски  $\phi$ , содержащий два недизъюнктивных блока на расстоянии  $\rho$ . Не ограничивая общности, считаем, что в первом случае блок  $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$  лежит левее блока  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ , а во втором – блок  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  лежит левее блока  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ .

*Случай 1.1.* Два блока скрещенной призмы находятся на расстоянии 1, если они либо принадлежат одному комплексу, либо – одному 4-циклу. Первый вариант противоречив в силу леммы 3. Рассмотрим второй: когда блоки  $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  лежат в одном 4-цикле. Тогда  $P_\phi(a) = \{a, a, b\}$ , а  $P_\phi(b) = \{a, a, x\}$  ( $x$  не определен). Последовательно продолжим этот фрагмент вправо блоками  $\begin{pmatrix} b \\ x \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix}$  (см. рис. 5).

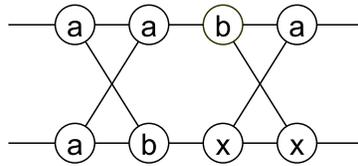


Рис. 5. Недизъюнктивные блоки  $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  на расстоянии  $\rho = 1$

Т.к. палитра цвета  $a$  известна, то  $x = a$ , и окрашенный участок однозначно продолжается до совершенной раскраски с периодом  $\begin{bmatrix} a & a & a & b \\ a & a & b & a \end{bmatrix}$ . После переобозначения цветов получаем период  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ .

*Случай 1.2.* Исследуем вариант, когда блоки  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  лежат в одном 4-цикле. Тогда  $P_\phi(a) = \{a, b, c\}$ , а  $P_\phi(c) = \{a, b, x\}$  ( $x$  не определен). Последовательно продолжим окрашенный участок вправо блоками  $\begin{pmatrix} c \\ x \end{pmatrix}$

и  $\begin{pmatrix} b \\ x \end{pmatrix}$ . Такой фрагмент однозначно продолжается до совершенной раскраски с периодом  $\begin{bmatrix} a & c & b & a \\ c & x & x & b \end{bmatrix}$  (рис. 6). Или после переобозначения цветов  $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ .

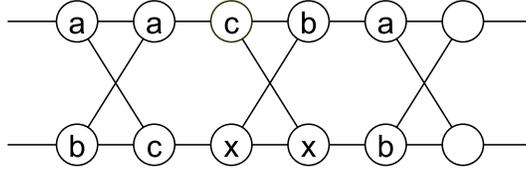


Рис. 6. Недизъюнктивные блоки  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  в одном 4-цикле

Теоретически  $x$  может совпадать с цветами  $a, b$  или  $c$ . Для  $x = b$  и  $x = c$  получим противоречие; а  $x = a$  дает совершенную раскраску с периодом  $\begin{bmatrix} a & c & b & a \\ c & a & a & b \end{bmatrix}$ , который равен  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  после переобозначения цветов и приведения правого комплекса к монотонному виду.

Далее рассмотрим случай, когда блоки  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  принадлежат одному комплексу. Согласно лемме 3 его раскраска имеет вид:  $\begin{pmatrix} a & c \\ b & a \end{pmatrix}$ . Доопределим палитру цвета  $a$  элементом  $x$ . Таким образом:  $P_\phi(a) = \{b, c, x\}$ . Тогда блоки, дополняющие  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  до 4-циклов, окрашены  $\begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} c \\ x \end{pmatrix}$  соответственно (рис. 7). А значит, полностью известны палитры цветов  $b, c$  и  $x$ . Последнее замечание позволяет нам однозначно продолжить фрагмент до совершенной раскраски с периодом  $\begin{bmatrix} a & c & c & x \\ b & a & x & b \end{bmatrix}$ , который приводим к каноническому виду  $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ .

Цвет  $x$  теоретически может совпадать с цветом  $a, b$  или  $c$ . Для  $x = b$  и  $x = c$  получим противоречие; при  $x = a$  получим совершенную раскраску с периодом  $\begin{bmatrix} a & c & c & a \\ b & a & a & b \end{bmatrix}$ , который приводим к каноническому виду  $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ .

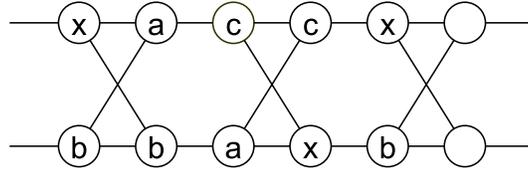


Рис. 7. Недизъюнктные блоки  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix}$  в одном комплексе

Случай 2.1. Пусть минимальное расстояние  $\rho = 2$  достигается на паре блоков  $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ . На рис. 8 приведены варианты их взаимного расположения.

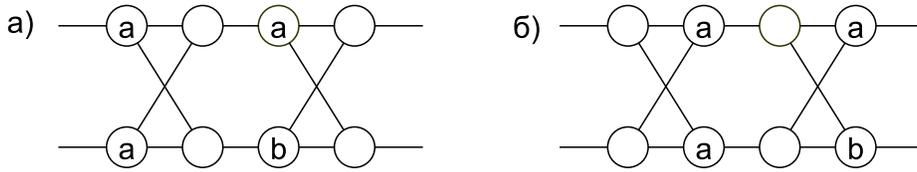


Рис. 8. Недизъюнктные блоки  $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  на расстоянии  $\rho = 2$

Приступим к п. а). Блок, дополняющий пестрый блок  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  до комплекса, окрашен  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , причем  $x$  и  $y$  различные и не равны ни  $a$ , ни  $b$  согласно леммам 3 и 5 (см. рис. 9).

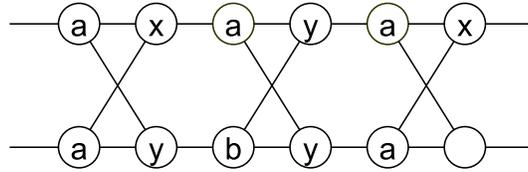


Рис. 9. Недизъюнктные блоки  $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  на расстоянии  $\rho = 2$ , п. а)

Палитры цветов  $x$  и  $y$  равны  $P_\phi(x) = \{a, a, a\}$  и  $P_\phi(y) = \{a, a, b\}$  соответственно. А у цвета  $a$  известны только два цвета в 1-окрестности

–  $x$  и  $y$ . Будем продолжать  $\phi$  вправо согласно этим параметрам. Блок, который находится на расстоянии 3 от  $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$  содержит вершину цвета  $y$ ; на расстоянии 4 – вершину цвета  $a$ ; на расстоянии 5 – вершину цвета  $x$ . Далее двигаемся в обратном направлении и восстанавливаем цвета всех вершин: на расстоянии 4 – блок  $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ , на расстоянии 3 – блок  $\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$  (в силу монохромности предыдущего). Такой фрагмент однозначно продолжается до совершенной раскраски с периодом  $\begin{bmatrix} y & a & x & a \\ y & a & y & b \end{bmatrix}$ . После переобозначения цветов и приведения раскраски правого комплекса к монотонному виду получаем период  $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ .

Доказательство п. б) аналогично предыдущему пункту и приводит к раскраске с тем же периодом.

*Случай 2.2.* Исследуем случай, когда минимальное расстояние  $\rho = 2$  достигается на блоках  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ . Пусть блок между ними окрашен  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , а блок, который лежит на расстоянии 1 справа от рассматриваемого фрагмента –  $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$  (наличие соцветных вершин гарантирует лемма 4). Такой фрагмент представлен на рис. 10.

В силу леммы 5 цвета  $x$  и  $y$  отличны от  $a, b$  и  $c$ . Кроме того  $x \neq y$ , так как у них разные палитры:  $P_\phi(x) = \{a, a, b\}$ ,  $P_\phi(y) = \{a, b, c\}$ . Согласно  $P_\phi(y)$  получаем  $p = b$ . В окружении вершины цвета  $b$  должна быть  $x$ -окрашенная вершина. Не ограничивая общности, считаем, что  $s = x$ . Определим теперь цвета в ее 1-окрестности:  $q = u = a$ . Значит,  $P_\phi(z) = \{a, a, c\}$ , и цвет  $z$  отличен от  $x$  и  $y$ . Далее восстанавливаем палитру цвета  $a$ :  $P_\phi(a) = \{x, y, z\}$ . Откуда имеем:  $t = y$ .

Полученный фрагмент однозначно продолжается до совершенной раскраски с периодом  $\begin{bmatrix} x & a & y & b \\ y & c & z & a \end{bmatrix}$ , который равен  $F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$  после переобозначения цветов ( $a = 4, b = 6, c = 3, x = 2, y = 1, z = 5$ ) и приведения к каноническому виду.

*Случай 3.1.* Пусть минимальное расстояние  $\rho$ , большее 2, достигается на паре недизъюнктивных блоков  $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ . Варианты их взаимного расположения изображены на рис. 11.

Начнем с пункта а). Согласно леммам 3 и 5 блок, дополняющий  $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$  до комплекса, окрашен монохромно  $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ , где  $x \neq a$ ,  $x \neq b$ . Значит, в окружении  $a$ -окрашенной вершины из блока  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  есть вершина цвета  $x$ .

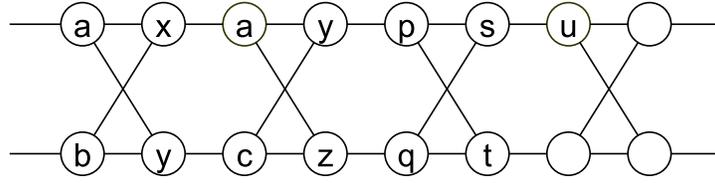


Рис. 10. Недизъюнктные блоки  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  на расстоянии  $\rho = 2$

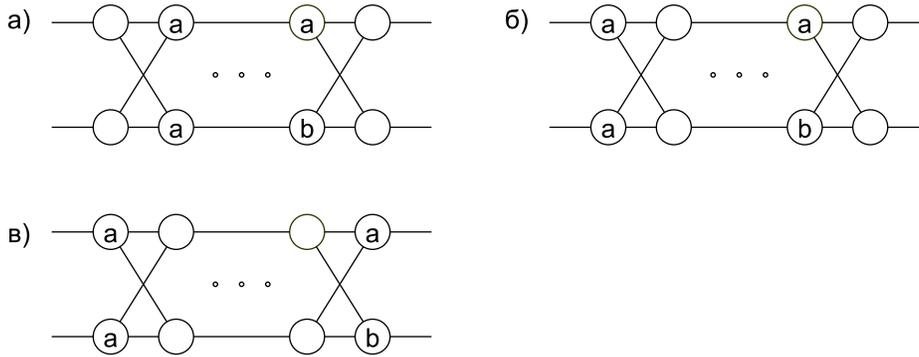


Рис. 11. Недизъюнктные блоки  $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  на расстоянии  $\rho > 2$

Если такая вершина принадлежит блоку, дополняющему  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  до комплекса, то он окрашен  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , причем  $y \neq x$  в силу леммы 3 (см. рис. 12). Получили недизъюнктные блоки  $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  на расстоянии  $\rho - 2$ , что противоречит минимальности  $\rho$ . Если вершина цвета  $x$  принадлежит блоку, дополняющему  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  до 4-цикла, то  $b \in P_\phi(x)$ . Тогда справа от  $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$  расположен блок с  $b$ -окрашенной вершиной, что противоречит лемме 5.

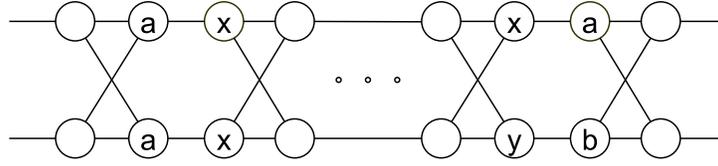


Рис. 12. Недизъюнктные блоки  $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  на расстоянии  $\rho > 2$ , п. а)

Рассуждения для пунктов б) и в) одинаковые. Согласно леммам 4 и 5 в блоках, дополняющих  $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  до 4-циклов найдутся две вершины одинакового цвета, допустим,  $x$  ( $x \neq a$ ,  $x \neq b$ ). Его палитра равна  $\{a, a, b\}$ . Тогда блок, расположенный справа от  $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$  на расстоянии 2, содержит вершину цвета  $b$ . Получили противоречие с леммой 5 (см. рис. 13).

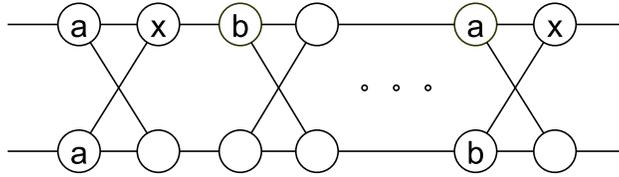


Рис. 13. Недизъюнктные блоки  $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  на расстоянии  $\rho > 2$ , п. б)

*Случай 3.2.* Исследуем вариант, когда блоки  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  находятся на расстоянии  $\rho$  большем 2. Как и в предыдущем случае, возможны три варианта их взаимного расположения.

Рассмотрим пункт а). Согласно лемме 4 в блоках, дополняющих данные до 4-циклов, найдется пара вершин одинакового цвета, допустим  $x$ . Раскраски этих дополнений совпадают —  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ; иначе их продолжение по направлению друг к другу приведет к противоречию с леммой 5.

Итак, раскраски блоков, лежащих с  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  в одних 4-циклах, равны. Пара вершин в 1-окрестности  $a$ -окрашенных и не из данных 4-циклов соцветны и равны  $z$  (см. рис. 14). Причем, если  $t \neq s$ , получим

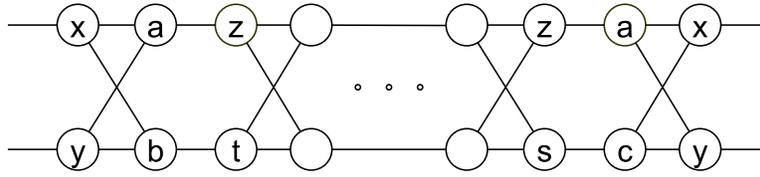


Рис. 14. Недизъюнктные блоки  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  на расстоянии  $\rho > 2$ , п. а)

противоречие с минимальностью  $\rho$ . А в случае  $t = s$ , продолжая раскраску фрагмента вовнутрь, придем к противоречию с леммой 5. Значит, для такого расположения пары недизъюнктных блоков  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  совершенных раскрасок нет.

Доказательство пунктов б) и в) аналогично случаю 3.1. □

Таким образом, доказано, что все совершенные раскраски скрещенной призмы исчерпываются дизъюнктными, за исключением шести спорадических случаев.

### Заключение

Пусть  $G$  – бесконечный граф. Время работы алгоритмов, которые ищут среди его раскрасок в  $k$  цветов совершенные, стремительно растет с ростом  $k$ . Кроме того, даже для небольших  $k$  интересно не только перечислить все такие раскраски, но и получить их классификацию. Тем большую ценность приобретают результаты, которые характеризуют совершенные раскраски бесконечных графов в произвольное конечное число цветов [2, 7, 10, 12, 13]. В данной работе описаны все совершенные  $k$ -раскраски графа  $CP_\infty$  для любых натуральных  $k$ .

### References

- [1] S. V. Avgustinovich, M. A. Lisitsyna, *Perfect 2-colorings of transitive cubic graphs*, J. Appl. Industr. Math., **5**:4 (2011), 519–528.
- [2] M. A. Lisitsyna, S. V. Avgustinovich, *Perfect colorings of prism graph*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 1116–1128.
- [3] D. B. Khoroshilova, *On the parameters of perfect 2-colorings of circulant graphs*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **18**:6 (2011), 82–89.
- [4] D. B. Khoroshilova, *On two-color perfect colorings of circular graphs*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **16**:1 (2009), 80–92.
- [5] O. G. Parshina, *Perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances*, J. Appl. Industr. Math., **8**:3 (2014), 357–361.
- [6] O. G. Parshina, M. A. Lisitsyna, *The perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of odd distances*, Sib. Electron. Math. Rep., **17** (2020), 590–603.

- [7] M. A. Lisitsyna, O. G. Parshina, *Perfect colorings of the infinite circulant graph with distances 1 and 2*, J. Appl. Industr. Math., **11**:3 (2017), 381–388.
- [8] O. G. Parshina, *Perfect  $k$ -colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances*, Abstracts of the International Conference and PhD Summer School on Groups and Graphs, Algorithms and Automata ( 2015), 80.
- [9] V. D. Plaksina, P. A. Shcherbina, *New perfect colorings of infinite circulant graphs with continuous sets of distances*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **18**:1 (2021), 530–533.
- [10] M. A. Lisitsyna, S. V. Avgustinovich, *The perfect colorings of circulant graphs with a large number of colors*, Sib. Electron. Math. Rep., **21**:1 (2024), 188–195.
- [11] A. A. Taranenko, *Algebraic properties of perfect structures*, Linear Algebra and its Applications, **607** (2020), 286–306.
- [12] M. A. Lisitsyna, S. V. Avgustinovich, O. G. Parshina, *On perfect colorings of infinite multipath graphs*, Sib. Electron. Math. Rep., **17** (2020), 2084–2095.
- [13] M. A. Lisitsyna, S. V. Avgustinovich, *On perfect colorings of paths divisible by a matching*, J. Appl. Industr. Math., **16** (2022), 98–104.

MARIYA ALEKSANDROVNA LISITSYNA  
MOZHAIKY MILITARY SPACE ACADEMY,  
ZHDANOVSKAYA, 13,  
197198, ST PETERSBURG, RUSSIA  
Email address: [lisitsyna.mariya.mathematician@gmail.com](mailto:lisitsyna.mariya.mathematician@gmail.com)

SERGEY VLADIMIROVICH AVGUSTINOVICH  
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,  
PR. KOPTYUGA, 4,  
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
Email address: [avgust@math.nsc.ru](mailto:avgust@math.nsc.ru)