S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 519.21
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 60G50

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПОЛОСЫ СЛУЧАЙНЫМ БЛУЖДАНИЕМ С МАЛЫМ СНОСОМ

В.И. Лотов

Представлено ???????????

Abstract: In contrast to the author's previous work [1], we obtain a limit theorem for the distribution of the crossing number of a strip by trajectories of a random walk with small drift without the requirement of the existence of an exponential moment of the jump distribution (Cramér's condition).

Keywords: random walk, crossing number of a strip, limit theorem, factorization method.

Пусть $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем

$$\mathbf{E}Y = 0, \qquad \mathbf{E}Y^2 = \sigma^2 < \infty. \tag{1}$$

Для $\varepsilon > 0$ введем новую последовательность

$$X = X(\varepsilon) = Y - \varepsilon, \quad X_k = X_k(\varepsilon) = Y_k - \varepsilon, \quad k \geq 1,$$

Lotov, V.I., Asymptotic distribution of the crossing number of a strip by random walk with small drift.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект FWNF-2022-0010.

Поступила ?? февраля 2025 г., опубликована ?? ???????? 2025 г.

и пусть

$$S_n = S_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\varepsilon), \quad n \geq 1, \quad S_0 = 0.$$

Введем в рассмотрение случайную величину $N = N(\varepsilon)$, равную числу пересечений снизу вверх полосы $-a \leq y \leq b$ на координатной плоскости точек (x, y) траекторией случайного блуждания $\{(n, S_n(\varepsilon)), n \geq 0\}$, $-a < 0 < b$.

Для этого определим сначала моменты остановки (возможно, несобственные):

$$\tau_0^+ = \tau_0^- = 0, \quad \tau_i^- = \inf\{n > \tau_{i-1}^+ \colon S_n \leq -a\},$$
$$\tau_i^+ = \inf\{n > \tau_i^- \colon S_n \geq b\}, \quad i \geq 1.$$

Полагаем всегда $\inf \varnothing = \infty$.

Очевидно, $\mathbf{P}(N(\varepsilon) \geq k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty)$. Для случайных блужданий с ненулевым сносом число пересечений полосы конечно с вероятностью единица, однако при стремлении сноса к нулю число пересечений неограниченно растет.

Цель данной работы состоит в изучении предельного поведения распределения случайной величины $N(\varepsilon)$ при условии, что $\varepsilon \to 0$.

Нахождение точных формул для распределений различных функционалов, связанных с моментом достижения траекторией случайного блуждания определенных границ, доступно только для некоторых частных ситуаций. Для блужданий общего вида приходится довольствоваться различными аппроксимациями искомых распределений и их характеристик. Традиционным способом построения таких аппроксимаций является использование первых членов асимптотических разложений нужных распределений в рамках подходящего метода асимптотического анализа.

Один из возможных методов асимптотического анализа в граничных задачах основывается на предположении, что снос случайного блуждания стремится к нулю. Известно достаточно большое число публикаций, в которых изучается предельное поведение различных функционалов от траекторий случайного блуждания в этой ситуации, см. [1] и литературу там. Теоремы такого сорта обычно относят к исследованию переходных явлений. Полученные на этом пути результаты часто используются для описания функционирования систем обслуживания в условиях большой нагрузки, см. [2, §24] и библиографические замечания там.

Настоящая работа продолжает исследования [1], где при соответствующей нормировке была установлена сходимость распределения числа пересечений полосы к экспоненциальному. При этом на скачки случайного блуждания накладывалось условие Крамера о существовании экспоненциального момента. Целью настоящей работы является получение аналогичного результата без условия Крамера.

Приведем формулировку основного результата из [1]. Для этого потребуется ввести ряд обозначений.

Обозначим $\psi(\lambda) = \mathbf{E}\, e^{\lambda Y}$ и введем в рассмотрение условие (A) крамеровского типа, включающее следующие два пункта.

(A_1) Распределение Y содержит абсолютно непрерывную компоненту.

(A_2) Для некоторого $\gamma > 0$ выполняется $\psi(\gamma) + \psi(-\gamma) < \infty$.

Положим также

$$\eta_+ = \min\{n \geq 1 : \ S_n \geq 0\}, \qquad \eta_- = \min\{n \geq 1 : \ S_n < 0\},$$

и пусть

$$\chi_\pm = S_{\eta_\pm}, \qquad \rho = \rho(\varepsilon) = \frac{\mathbf{E}(\chi_+^2;\ \eta_+ < \infty)}{2\mathbf{E}(\chi_+;\ \eta_+ < \infty)} + \frac{\mathbf{E}\chi_-^2}{2\,\mathbf{E}|\chi_-|}.$$

Отметим, что введенные величины зависят от ε. Существование моментов, входящих в определение величины ρ, обеспечивается условием (1) (см. [3, Ch.3]).

Теорема 1. [1] *Пусть для случайной величины Y, введенной в* (1)*, выполнено условие (A). Тогда для каждого $t \geq 0$*

$$\mathbf{P}\left(\frac{2\varepsilon N(\varepsilon)}{\sigma^2} \geq t\right) = e^{-t(\rho(\varepsilon)+a+b)} + O(\varepsilon), \qquad \varepsilon > 0, \qquad \varepsilon \to 0.$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что функция $F(y) = \mathbf{P}(Y < y)$ непрерывна и содержит абсолютно непрерывную компоненту в некоторой окрестности нуля, и пусть $\mathbf{E}Y = 0$ и $\mathbf{E}\,|Y|^{3+\kappa} < \infty$ для некоторого $\kappa > 0$. Тогда*

$$\mathbf{P}\left(\frac{2\varepsilon N(\varepsilon)}{\sigma^2} \geq t\right) = e^{-t(\rho(0)+a+b)} + O(\varepsilon), \qquad \varepsilon > 0, \qquad \varepsilon \to 0,$$

где $\rho(0) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \rho(\varepsilon)$.

Для последующего доказательства повторим ряд необходимых сведений, подробно представленных в [1]. Пусть для $|z| \leq 1$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$

$$r_{z\pm}(\lambda) = 1 - \mathbf{E}\left(z^{\eta_\pm} \exp\{\lambda\chi_\pm\};\ \eta_\pm < \infty\right). \tag{2}$$

Хорошо известно следующее представление, называемое часто факторизацией Винера — Хопфа:

$$r_{z+}(\lambda)\, r_{z-}(\lambda) = 1 - z\mathbf{E}\, e^{\lambda X}, \quad |z| \leq 1, \quad \mathrm{Re}\lambda = 0.$$

Обозначим далее через Π множество функций g, имеющих вид

$$g(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y), \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |dG(y)| < \infty. \tag{3}$$

Как и в ряде работ (см. [1] и ссылки там), вводим операторы A и B следующим образом. Для всякой функции $g \in \Pi$ положим по определению при $|z| < 1$, $\mathrm{Re}\lambda = 0$

$$(Ag)(z, \lambda) = r_{z-}(\lambda)\big[r_{z-}^{-1}(\lambda)g(\lambda)\big]^{(-\infty,-a]},$$

$$(Bg)(z, \lambda) = r_{z+}(\lambda)\big[r_{z+}^{-1}(\lambda)g(\lambda)\big]^{[b,\infty)},$$

где принято обозначение

$$\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dG(y)\right]^{D} = \int\limits_{D} e^{\lambda y} dG(y)$$

для любого измеримого $D \subset \mathbb{R}$.

Основным инструментом для доказательства теоремы 1 в [1] явилось установленное в [4] представление

$$\mathbf{E}\left(z^{\tau_k^+} \exp\{\lambda S_{\tau_k^+}\}; \tau_k^+ < \infty\right) = ((BA)^k e)(z, \lambda), \tag{4}$$

в котором $e(\lambda) = e(z, \lambda) \equiv 1$ и степень оператора понимается как суперпозиция. Отсюда сразу следует

$$\mathbf{P}(N(\varepsilon) \geq k) = \mathbf{P}(\tau_k^+ < \infty) = \lim_{z \to 1}((BA)^k e)(z, 0). \tag{5}$$

Дальнейшие исследования в [1] сводились к анализу асимптотического поведения правой части (5) при $\varepsilon \to 0$, основываясь на уже известных свойствах операторов A и B при выполнении условия Крамера. Формула (5) также будет использоваться в доказательстве теоремы 2.

Приступим к доказательству этой теоремы. Покажем, как утверждение этой теоремы можно получить без условия существования экспоненциального момента для случайной величины Y.

В соответствии с условием теоремы 2 предполагаем теперь, что функция распределения $F(y) = \mathbf{P}(Y < y)$ непрерывна и содержит абсолютно непрерывную компоненту в некоторой окрестности нуля. Этим же свойством обладает распределение случайной величины $X = Y - \varepsilon$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Введем последовательность срезанных случайных величин $Y^{(n)}$, $n \geq 1$, таких, что $Y^{(n)} = Y$, если $Y \in [-L_n, K_n]$, и $Y^{(n)} = 0$ в противном случае. Числа L_n и K_n выбираются такими, что $L_n \to \infty$, $K_n \to \infty$ и сохраняется $\mathbf{E}Y^{(n)} = \mathbf{E}Y = 0$. Такой выбор срезок возможен в силу непрерывности функции F. Обозначим

$$X^{(n)} = Y^{(n)} - \varepsilon, \qquad F_n(y) = \mathbf{P}(X^{(n)} < y).$$

Ясно, что $F_n(y) \to F(y+\varepsilon)$ при $n \to \infty$. Введем последовательность независимых случайных величин $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \ldots$, одинаково распределенных с $X^{(n)}$, и пусть $S_k^{(n)} = X_1^{(n)} + \cdots + X_k^{(n)}$. Индекс n у операторов A и B, у величин $\chi_\pm$, ρ, N и σ будет означать, что эти объекты построены по случайному блужданию $\{S_k^{(n)}, k \geq 1\}$. Это блуждание удовлетворяет условиям теоремы 1, в соответствии с которой при каждом n и $t \geq 0$

$$\mathbf{P}\left(\frac{2\varepsilon N_n(\varepsilon)}{\sigma_n^2} \geq t\right) = \exp\{-t(\rho_n(\varepsilon) + a + b)\} + O(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{6}$$

Лемма 1. *В условиях теоремы* 2 *оценка* $O(\varepsilon) = O_n(\varepsilon)$ *в* (6) *выполняется равномерно по* n.

Доказательство. Проанализируем более детально вывод оценки $O(\varepsilon)$ в доказательстве теоремы 1 в [1] применительно к случайному блужданию $\{S_k^{(n)}, k \geq 1\}$ при фиксированном n. Компоненты факторизации тоже будут в этом случае зависеть от n, однако, чтобы избежать громоздких обозначений, на протяжении этой леммы мы сохраним для них прежние обозначения $r_{z\pm}(\lambda)$.

Пусть, по-прежнему, числа $\lambda_\pm(z)$ являются вещественными решениями уравнения $1 - z\mathbf{E}\exp\{\lambda X^{(n)}\} = 0$ при $z \in (1-\delta, 1]$, $\lambda_-(z) \leq 0 \leq \lambda_+(z)$. Кроме того, $\lambda_-(1) = 0$, $\lambda_+(1) = h = h_n > 0$ вследствие условия $\mathbf{E}\, X^{(n)} < 0$. В доказательстве теоремы 1 в [1] установлено, что сходимость выражений при $\varepsilon \to 0$ эквивалентна сходимости при $h \to 0$ и порядок малости при $h \to 0$ совпадает с порядком малости при $\varepsilon \to 0$. В связи с этим в [1] первоначально исследовалась асимптотика при $h \to 0$. Будем следовать такому же порядку действий. Вывод оценки $O(\varepsilon)$ в (6) основывался в [1] на получении равномерных (по h и одновременно по ε) оценок для коэффициентов в главных членах асимптотики при $h \to 0$ величин

$$r_{1+}(0)), \qquad r_{1-}(h), \qquad \lim_{z\to 1} \psi_{z+}(0), \qquad \lim_{z\to 1} \psi_{z-}(h), \tag{7}$$

где

$$\psi_{z\pm}(\lambda) = r_{z\pm}^{-1}(\lambda) - \frac{1}{(\lambda - \lambda_\pm(z)) r'_{z\pm}(\lambda_\pm(z))}.$$

Нам теперь потребуется доказать равномерность этих оценок по n.

Установлено в [1], что при $h \to 0$

$$r_{1+}(0)) = -hr'_{1+}(h) + \frac{h^2}{2} r''_{1+}(h) + \ldots, \qquad r_{1-}(h) = hr'_{1-}(0) + \frac{h^2}{2} r''_{1-}(0) + \ldots. \tag{8}$$

Эти формулы легко получаются из разложений функций $r_{z\pm}(\lambda)$ соответственно в точках $\lambda_\pm(z)$, где принято во внимание, что $r_{z+}(\lambda_+(z)) = 0$, $r_{z-}(\lambda_-(z)) = 0$:

$$r_{z+}(\lambda) = (\lambda - \lambda_+(z))\, r'_{z+}(\lambda_+(z)) + \frac{(\lambda - \lambda_+(z))^2}{2}\, r''_{z+}(\lambda_+(z)) + \ldots,$$

$$r_{z-}(\lambda) = (\lambda - \lambda_-(z)) r'_{z-}(\lambda_-(z)) + \frac{(\lambda - \lambda_-(z))^2}{2}\, r''_{z-}(\lambda_-(z)) + \ldots.$$

Эти же разложения приводят к формулам

$$\psi_{z+}(\lambda) = -\frac{r''_{z+}(\lambda_+(z))}{2(r'_{z+}(\lambda_+(z)))^2} +$$

$$+(\lambda-\lambda_+(z))\left(\frac{(r''_{z+}(\lambda_+(z)))^2}{4(r'_{z+}(\lambda_+(z)))^3}-\frac{r'''_{z+}(\lambda_+(z))}{6(r'_{z+}(\lambda_+(z)))^2}\right)+\ldots,$$

$$\psi_{z-}(\lambda)=-\frac{r''_{z-}(\lambda_-(z))}{2(r'_{z-}(\lambda_-(z)))^2}+$$

$$+(\lambda-\lambda_-(z))\left(\frac{(r''_{z-}(\lambda_-(z)))^2}{4(r'_{z-}(\lambda_-(z)))^3}-\frac{r'''_{z-}(\lambda_-(z))}{6(r'_{z-}(\lambda_-(z)))^2}\right)+\ldots,$$

откуда следует

$$\lim_{z\to1}\psi_{z+}(0)=-\frac{r''_{1+}(h)}{2(r'_{1+}(h))^2}-h\left(\frac{(r''_{1+}(h))^2}{4(r'_{1+}(h))^3}-\frac{r'''_{1+}(h)}{6(r'_{1+}(h))^2}\right)+O(h^2),\quad(9)$$

$$\lim_{z\to1}\psi_{z-}(h)=-\frac{r''_{1-}(0)}{2(r'_{1-}(0))^2}+h\left(\frac{(r''_{1-}(0))^2}{4(r'_{1-}(0))^3}-\frac{r'''_{1-}(0)}{6(r'_{1-}(0))^2}\right)+O(h^2).\quad(10)$$

Из (2) следует

$$r_{1+}(\lambda)=1-\mathbf{E}\left(\exp\{\lambda\chi_+\};\ \eta_+<\infty\right),\qquad r_{1-}(\lambda)=1-\mathbf{E}\left(\exp\{\lambda\chi_-\}\right),$$

поэтому при $h\to0$ получаем

$$r'_{1+}(h)=-\mathbf{E}(\chi_+e^{h\chi_+};\ \eta_+<\infty)=-\mathbf{E}(\chi_+;\ \eta_+<\infty)+O(h),$$
$$r''_{1+}(h)=-\mathbf{E}(\chi_+^2e^{h\chi_+};\ \eta_+<\infty)=-\mathbf{E}(\chi_+^2;\ \eta_+<\infty)+O(h),$$
$$r'_{1-}(0)=-\mathbf{E}(\chi_-e^{h\chi_-})=-\mathbf{E}(\chi_-)+O(h),$$
$$r''_{1-}(0)=-\mathbf{E}(\chi_-^2e^{h\chi_-})=-\mathbf{E}(\chi_-^2)+O(h).$$

Таким образом, интересующие нас коэффициенты разложений для величин (7) при $h\to0$ (и одновременно при $\varepsilon\to0$) определяются различными функционалами от первых моментов перескоков $\chi_\pm$, относящихся к случайному блужданию $\{S_k^{(n)},k\ge1\}$.

Распределение F_n имеет моменты любого порядка, каждый из них ограничен равномерно по ε. В силу этого обстоятельства и сходимости $F_n(y)\to\mathbf{P}(Y^{(n)}<y)$ при $\varepsilon\to0$ имеет место сходимость компонент факторизации и моментов перескоков $\chi_\pm^{(n)}$ к соответствующим компонентам факторизации и моментам перескоков для случайного блуждания, у которого скачки распределены одинаково с $Y^{(n)}$. Эти факты следуют из теорем 1 и 2 в [5] и формул (18) и (22) там же.

Впрочем, можно установить сходимость моментов перескоков и не прибегая к результатам общего характера из [5], а воспользоваться явным видом зависимости компонент факторизации от ε в нашем случае. Действительно, хорошо известны следующие формулы: для $|z|<1$, $\mathrm{Re}\lambda=0$

$$r_{z-}(\lambda)=\exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}\mathbf{E}\left(\exp\{\lambda S_k^{(n)}\};\ S_k^{(n)}<0\right)\right\},$$

$$r_{z+}(\lambda)=\exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}\mathbf{E}\left(\exp\{\lambda S_k^{(n)}\};\ S_k^{(n)}\ge0\right)\right\}.$$

Пусть $Y_i^{(n)} = X_i^{(n)} + \varepsilon, \quad T_k^{(n)} = Y_1^{(n)} + \cdots + Y_k^{(n)}$, тогда приведенные выше формулы для компонент факторизации можно переписать в виде

$$r_{z-}(\lambda) = \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \mathbf{E}\left(\exp\{\lambda(T_k^{(n)} - k\varepsilon)\};\, T_k^{(n)} < k\varepsilon \right) \right\},$$

$$r_{z+}(\lambda) = \exp\left\{ -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \mathbf{E}\left(\exp\{\lambda(T_k^{(n)} - k\varepsilon)\};\, T_k^{(n)} \geq k\varepsilon \right) \right\}.$$

Из этих представлений становится ясным, что при $\varepsilon \to 0$ компоненты факторизации $r_{z\pm}(\lambda)$ и их производные по λ стремятся соответственно к компонентам факторизации и их производным, построенным по случайному блужданию $\{T_k^{(n)}, k \geq 1\}$. Моменты перескоков $\chi_\pm^{(n)}$ известным образом находятся с помощью дифференцирования функций $r_{1\pm}(\lambda)$, и они также сходятся при $\varepsilon \to 0$ к соответствующим моментам перескоков для случайного блуждания $\{T_k^{(n)}, k \geq 1\}$.

Из сходимости первых двух моментов перескоков, участвующих в определении величины $\rho_n(\varepsilon)$, вытекает сходимость $\rho_n(\varepsilon) \to \rho_n(0)$ при $\varepsilon \to 0$. Более того, функции $r_{z\pm}(\lambda)$ дифференцируемы по ε. Рассматривая их разложения (а также разложения их производных) по ε в окрестности нуля, нетрудно убедиться, что при $\varepsilon \to 0$ равномерно по n

$$\mathbf{E}\,\chi_-^{(n)}(\varepsilon) = \mathbf{E}\,\chi_-^{(n)}(0) + O(\varepsilon),$$

$$\mathbf{E}\left(\chi_+^{(n)}(\varepsilon);\ \eta_+^{(n)}(\varepsilon) < \infty\right) = \mathbf{E}\,\chi_+^{(n)}(0) + O(\varepsilon),$$

и так же обстоит дело со вторыми моментами. Отсюда простыми вычислениями убеждаемся, что $\rho_n(\varepsilon) = \rho_n(0) + O(\varepsilon)$ равномерно по n.

Таким образом коэффициенты первых двух членов разложений (8)–(10) при $h \to 0$ мало отличаются от соответствующих величин, вычисленных по случайному блужданию $\{T_k^{(n)}, k \geq 1\}$.

Далее будем устремлять $n \to \infty$. Наряду с условием $\mathbf{E}\,|Y|^{3+\kappa} < \infty$ при всех $n \geq 1$ выполняется также $\mathbf{E}\,|Y^{(n)}|^{3+\kappa} \leq C < \infty$.

Данное моментное ограничение и сходимость $\mathbf{P}(Y^{(n)} < x) \to \mathbf{P}(Y < x)$ вновь позволяют в силу соотношений (18) и (22) из [5] утверждать сходимость при $n \to \infty$ первых двух моментов для перескоков случайного блуждания $\{T_k^{(n)}, k \geq 1\}$ к соответствующим моментам для перескоков случайного блуждания со скачками, одинаково распределенными с Y.

В итоге заключаем, что при малых ε и больших n коэффициенты первых двух членов разложений (8)–(10) мало отличаются от соответствующих величин, вычисленных по случайному блужданию, скачки которого распределены одинаково с Y. Отсюда следует равномерность по n оценки $O_n(\varepsilon)$ в (6) при $\varepsilon \to 0$. Лемма доказана. $\square$

Приведенные выше рассуждения позволяют также переписать (6) в виде

$$\mathbf{P}\left(\frac{2\varepsilon N_n(\varepsilon)}{\sigma_n^2} \geq t\right) = \exp\{-t(\rho_n(0)+a+b)\} + O(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{11}$$

Продолжаем доказательство теоремы 2. Наряду с (6) имеем в силу (5)

$$\mathbf{P}(N_n(\varepsilon) \geq k) = \lim_{z\to 1}((B_nA_n)^k e)(z,0).$$

Далее можно воспользоваться следующим утверждением, установленным в [6].

Теорема 3. *Пусть F_n слабо сходится к F при $n \to \infty$ и F непрерывна. Пусть также последовательность функций $g_n \in \Pi$ такова, что $g_n(\lambda) \to g(\lambda) \in \Pi$, и в представлении (3) функция G непрерывна на множестве $[b,\infty)$. Тогда при $|z|<1$ и $\mathrm{Re}\lambda = 0$ выполняется*

$$(B_ng_n)(z,\lambda) \to (Bg)(z,\lambda), \qquad n\to\infty.$$

Если функция G непрерывна на множестве $(-\infty,-a]$, то

$$(A_ng_n)(z,\lambda) \to (Ag)(z,\lambda), \qquad n\to\infty.$$

Применение этой теоремы влечет при всех $k \geq 1$ и $z \in (1-\delta,1)$ соотношение

$$((B_nA_n)^k e)(z,0) \to ((BA)^k e)(z,0), \qquad n\to\infty. \tag{12}$$

Действительно, для $g \in \Pi$ функция $(Ag)(z,\lambda)$ аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda > 0$, а $(Bg)(z,\lambda)$ в свою очередь аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda < 0$, что с запасом обеспечивает условия непрерывности на функцию g в теореме. Поэтому при $n\to\infty$

$$(A_ne)(z,0) \to (Ae)(z,0),$$
$$(B_nA_ne)(z,0) \to (BAe)(z,0),$$
$$(A_nB_nA_ne)(z,0) \to (ABAe)(z,0),$$

и т.д., то есть при любом $k\geq 1$ выполняется (12).

В силу (4) величины $((B_nA_n)^k e)(z,0)$ и $((BA)^k e)(z,0)$ являются непрерывными неубывающими функциями переменной $z \in (1-\delta,1)$, то есть одновременно

$$\mathbf{P}(N(\varepsilon)\geq k) = \lim_{z\to 1}((BA)^k e)(z,0) = \sup_{z\in(\delta,1)}((BA)^k e)(z,0),$$

$$\mathbf{P}(N_n(\varepsilon)\geq k) = \lim_{z\to 1}((B_nA_n)^k e)(z,0) = \sup_{z\in(\delta,1)}((B_nA_n)^k e)(z,0).$$

Используя (11), (12) и лемму 1, получаем в итоге при $t = 2\varepsilon k/\sigma_n^2$ и $\varepsilon\to 0$

$$\mathbf{P}(N(\varepsilon)\geq k) = \sup_{z\in(\delta,1)}((BA)^k e)(z,0) = \sup_{z\in(\delta,1)}\lim_{n\to\infty}((B_nA_n)^k e)(z,0)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sup_{z\in(\delta,1)}((B_nA_n)^k e)(z,0) = \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(N_n(\varepsilon)\geq k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{2\varepsilon}{\sigma_n^2} N_n(\varepsilon) \ge t\right) = \lim_{n\to\infty} \big(\exp\{-t(\rho_n(\varepsilon)+a+b)\} + O_n(\varepsilon)\big)$$
$$= \exp\{-t(\rho(0)+a+b)\} + O(\varepsilon).$$

Последнее равенство следует из установленного выше соотношения $\rho_n(\varepsilon) = \rho_n(0) + O(\varepsilon)$ и сходимости $\rho_n(0) \to \rho(0)$ при $n \to \infty$. Теорема 2 доказана.

References

[1] V.I. Lotov, *Transient phenomena in a boundary crossing problem for random walks*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **21**:2 (2024), 1152–1166.

[2] A.A. Borovkov, *Stochastic Processes in Queueing Theory*, Springer, New York etc., 1976. Zbl 0319.60057.

[3] A. Gut, *Stopped random walks*, Springer, 1988. Zbl 1166.60001.

[4] V.I. Lotov, *On an approach to two-sided boundary problems*, in: Statistics and Control of Stochastic Processes [in Russian], Nauka, Moscow, 1989, 117–121.

[5] A.A. Mogul'skii, *Absolute estimates for moments of certain boundary functionals*, Theory Probab. Appl., **18**:2 (1973), 340–347.

[6] V.I. Lotov, *Properties of factorization operators in boundary crossing problems for random walks*, Izv. Math., **83**:5 (2019), 1050–1065.

Vladimir Ivanovich Lotov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: lotov@math.nsc.ru