СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2024) УДК 517.938
https://doi.org/10.33048/semi.2024.20.??? MSC 37N35

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СОСТОЯНИЙ БИНАРНОЙ ЦЕПОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО СПЕКТРА СКОРОСТЕЙ

М.В. Яшина, А.Г. Таташев, Р.В. Стрекалов

Представлено

Добавлена аннотация и ключевые слова на русском языке

Аннотация: Рассматривается дискретная динамическая система, называемая бинарной цепочкой контуров. Эта система принадлежит классу динамических систем, разработанному А.П. Буслаевым с целью создания моделей трафика, которые имеют сетевую структуру и для которых возможно аналитическое исследование. Рассматриваемая система содержит конечное число контуров — окружностей, образующих замкнутую цепочку. На каждом контуре движется частица, которая в каждый дискретный момент времени поочередно занимает нижнюю и верхнюю ячейку контура. Задержки в перемещении частиц обусловлены ограничением, в соответствии с которым две частицы не могут пересекать одновременно узел — общую для соседних контуров точку. Ранее было установлено, что не позднее, чем в дискретный момент времени, следующий после начального момента, система попадает в состоянии одного из циклов — замкнутой траектории в пространстве состояний системы. Отношение числа перемещений частицы в течение цикла к длительности цикла — периоду называется средней скоростью частицы. Ранее было установлено, что на цикле все частицы движутся с одинаковой средней скоростью и получена формула для спектра средних скоростей, т. е. множества всех

Yashina, M.V., Tatashev, A.G., Strekalov R.V., Binary chain state distribution for velocity spectrum.

© 2024 Яшина М.В., Таташев А.Г., Стрекалов Р.В.

Работа выполнена при поддержке проекта Госзадания Министерства науки и высшего образования РФ FSFM–2023–0003.

Поступила 1 января 2024 г., опубликована 31 декабря 2024 г.

возможных значений средней скорости для различных начальных состояний при фиксированном числе контуров. В настоящей работе получены комбинаторные формулы, позволяющие при заданном числе контуров вычислить для каждого принадлежащего спектру значения средней скорости суммарное число состояний, которые принадлежат циклам с данным значением средней скорости, и число невозвратных состояний, из которых система переходит в состояния таких циклов. Комбинаторные задачи для систем рассматриваемого вида ранее не рассматривались. Полученные комбинаторные формулы могут быть полезными при планировании имитационных экспериментов или, например, при рассмотрении теоретических вопросов, связанных с характером изменения энтропии динамической системы.

Ключевые слова: динамические системы, клеточные автоматы, сети Буслаева, предельные циклы динамической системы, спектр средних скоростей.

Abstract: A discrete dynamical system called a binary chain of contours is considered. The system belongs to a class of dynamic systems developed by A.P. Buslaev with aim of creating traffic models with network structure and such that analytical results may be obtained for these systems. The system under consideration contains a finite set of circumferences forming a closed chain. There is a particle in any circumference. At any discrete moment, the particle is in a cell — the lower cell or in the upper cell alternately. Delays in particle movement are due to the condition that two particle cannot pass simultaneously through the same node — the common point of the circumferences. It was previously found that no later than at discrete moment of time following the initial moment the system results in the state of a cycle — a closed trajectory in the system state space. The ratio of the number of particle movements during a cycle to the period — duration of the cycle is called the average velocity of the particle. It was previously proved that, during a cycle, all particles move with the same average velocity and a formula was obtained for the spectrum of average velocities, i.e., the set of all possible values of the average velocities for different initial states with a prescribed number of circumferences. In this paper, combinatorial formulas are obtained that allow, for any value belonging to the spectrum, to compute the total number of states belonging to cycles with this value of the average velocity and the number of non-recurrent states from that the system results in states of cycles. Combinatorial problems for systems of the type under consideration have not been studied previously. The combinatorial formulas may be useful to plan simulation experiments or, for example, in considering theoretical problems related to the nature of the change in the entropy of a dynamic system

Keywords: dynamic systems, cellular automaton, Buslaev networks, limit cicles of dynamicalal system, spectrum of average velocities.

1 Введение

А.П. Буслаев разработал класс динамических систем с целью создания транспортных моделей с сетевой структурой, для которых возможно аналитическое исследование [10].

Исправлена опечатка 1

Отметим некоторые работы по тематике математического моделирования трафика, которые могут быть представлены в терминах клеточных автоматов.

В модели Нагеля–Шрекенберга [1] частицы, соответствующие автотранспортным средствам, движутся по определенным правилам на решетке, представляющей собой бесконечную или замкнутую последовательность ячеек, в каждой из которых не может одновременно находиться более одной частицы. Для относительно простых вариантов модели найдены аналитические результаты, например, в [2]–[6]. В [2]–[4] рассматривалась, в частности, модель, в которой частицы движутся на одномерной решетке и на каждом шаге частица перемещается на одну ячейку вперед, если ячейка впереди свободна, и не перемещается, если эта ячейка впереди занята. Если модели поставить в соответствие элементарный клеточный автомат, каждая клетка которого соответствует ячейке модели, причем клетка находится в состоянии 0, если соответствующая ячейка свободна, или в состоянии 1, если эта ячейка занята, то такой клеточный автомат представляет собой элементарный клеточный автомат с правилом 184 (Elementary Cellular Automaton 184, ECA 184, CA 184) в классификации С. Вольфрама [7].

Транспортной моделью с двумерной структурой является модель Biham–Middleton–Levine (BML) [8]. В этой модели частицы движутся в перпендикулярных направлениях на двумерной решетке по правилу, представляющему собой двумерный аналог правила ECA 184. Модель BML рассматривалась, в частности, в [9].

Приведена расшифровка аббревиатуры BML.

Модели трафика со сложными правилами движения и с сетевой структурой исследуются в основном имитационным моделированием.

Рассматриваются дискретные и непрерывные сети Буслаева. Сеть Буслаева содержит систему контуров, которые в дискретном варианте представляют собой замкнутые последовательности ячеек. Контуры имеют общие точки, называемые узлами. В дискретном варианте на контурах движутся частицы, каждая из которых в любой дискретный момент времени занимает одну из ячеек. В основном рассматривались сети Буслаева, в которых не происходит переходов частиц с одного контура на другой. Частицы движутся на контуре по правилу ECA 184 или по правилу ECA 240, при котором находящиеся в соседних ячейках частицы образуют кластеры и перемещаются одновременно. Понятие кластерного движения в моделях трафика введено в [11]. При прохождении узлов возникают задержки, обусловленные условием, в соответствии с которым более одной частицы не могут проходить через узел одновременно. Если более одной частицы подошли к общему узлу одновременно, то возникает конкуренция и первой проходит через узел частица, выбираемая в соответствии с заданным правилом разрешения конкуренции.

Сеть Буслаева, называемая бинарной цепочкой контуров, содержит замкнутую последовательность контуров, на каждом из которых находится две ячейки. В каждый дискретный момент времени частица находится в одной из ячеек — нижней или верхней. Для каждого контура имеются два соседних контура — слева и справа. Каждые два соседних контура имеют одну общую точку — узел. На каждом шаге частица переходит в другую ячейку контура, если нет задержки. Переходя из нижней ячейки в верхнюю, частица проходит через правый от контура узел, а переходя из верхней ячейки в нижнюю — через левый узел. Задержки в перемещении частиц обусловлены ограничением, в соответствии с которым две частицы не могут пересекать один и тот же узел одновременно. При попытке двух частиц пересечь одновременно общий узел перемещается только частица, выигравшая конкуренцию в соответствии с заданным правилом разрешения конкуренции. В [10], [12]—[14] исследовались различные варианты бинарной цепочки. В [12] наряду с бинарными цепочками с другими правилами разрешения конкуренции исследовалась цепочка с правоприоритетным правилом, в соответствии с которым конкуренцию всегда выигрывает частица, располагающаяся на контуре, который находится справа от узла. Ясно, что в силу симметрии бинарная цепочка с правоприоритетным правилом эквивалентна бинарной цепочке с левоприоритетным правилом, при котором конкуренцию выигрывает частица, которая располагается на контуре, находящемся слева от узла.

Исправлена опечатка 2

Бинарную цепочку можно представить как элементарный клеточный автомат.

Приведем определения детерминированного элементарного клеточного автомата, используя терминологию [15].

В соответствии с определениями, данными в [15], атомарным понятием клеточного автомата является клетка, которая характеризуется именем $x \in X$ и состоянием $a \in A$, где X — множество имен клеток, которое обычно интерпретируется как множество координат точек в дискретном пространстве конечных размеров: A — алфавит состояний клеток. Для элементарных клеточных автоматов на замкнутой решетке, содержащей N клеток, множеством имен является множество чисел $\{0, 1, \ldots, N-1\}$. Алфавит состояний клеток элементарного клеточного автомата содержит два состояния 0 и 1. Состояние клетки x в момент времени t обозначается через $v_x(t)$. Для элементарного клеточного автомата функция перехода может быть представлена в виде $v'_i = f(v_{i-1}, v_i, v_{i+1})$, при этом данная функция определяет состояние клетки i в следующий момент в зависимости от состояния клеток $i-1$, i, $i+1$ в текущий момент времени.

Сведения о вероятностных клеточных автоматах исключены.

Добавлена ссылка

Имеются 256 элементарных клеточных автоматов ECA 000, ECA 001, ..., ECA 255 [7] . Номер элементарного клеточного автомата вычисляется следующим образом. Если автомат задается функцией f, для которой $f(1,1,1) = a_7$, $f(1,1,0) = a_6$, $f(1,0,1) = a_5$, $f(1,0,0) = a_4$, $f(0,1,1) = a_3$, $f(0,1,0) = a_2$, $f(0,0,1) = a_1$, $f(0,0,0) = a_7$, то этому автомату присваивается номер A, вычисляемый по формуле

$$A = \sum_{i=0}^{7} a_i \cdot 2^i.$$

Как отмечается в [13], вектор состояния бинарной цепочки с левоприоритетным правилом разрешения конкуренции, в которой частица движется на контуре против часовой стрелки изменяется по правилу ECA 063; бинарная цепочка с движением против часовой стрелки и правоприоритетным правилом эквивалентна ECA 017; бинарная цепочка с движением по часовой стрелке и левоприоритетным правилом эквивалентна ECA 003; бинарная цепочка с движением по часовой стрелке и правоприоритетным правилом эквивалентна ECA 119.

"Средняя скорость уже была определена, можно убрать повтор определения." - Повтор исключен.

В настоящей работе рассматривается бинарная цепочка контуров с левоприоритетным правилом разрешения конкуренции. Рассматриваемая система не позднее дискретного момента, следующего после начального момента, находится в состояниях, принадлежащих одному из циклов — замкнутой траектории в пространстве состояний системы. Получены комбинаторные формулы, позволяющие при заданном числе контуров для каждого принадлежащего спектру значения средней скорости вычислить суммарное число состояний, принадлежащих циклам с данным значением средней скорости и число невозвратных состояний, из которых система переходит в состояния таких циклов. Используя эти формулы, можно, в частности, вычислить вероятность того, что средняя скорость примет фиксированное значение, в предположении, что каждое состояние выбирается из пространства состояний системы в качестве начального равновероятно. Состояние цепи Маркова называется возвратным, если это состояние повторяется с вероятностью единица [16] . Состояние, не являющееся возвратным, называется невозвратным. Применительно к рассматриваемой детерминированной динамической системе состояние возвратно в том и только в том случае, если оно принадлежит

Добавлена ссылка

некоторому циклу. На рис. 1 кружки соответствуют состояниям, стрелки — переходам между состояниями. Зеленые кружки соответствуют возвратным состояниям, принадлежащим циклу с периодом больше 1, красные кружки — поглощающие состояния, соответствующие циклам с периодом 1, желтые кружки — невозвратные состояния.

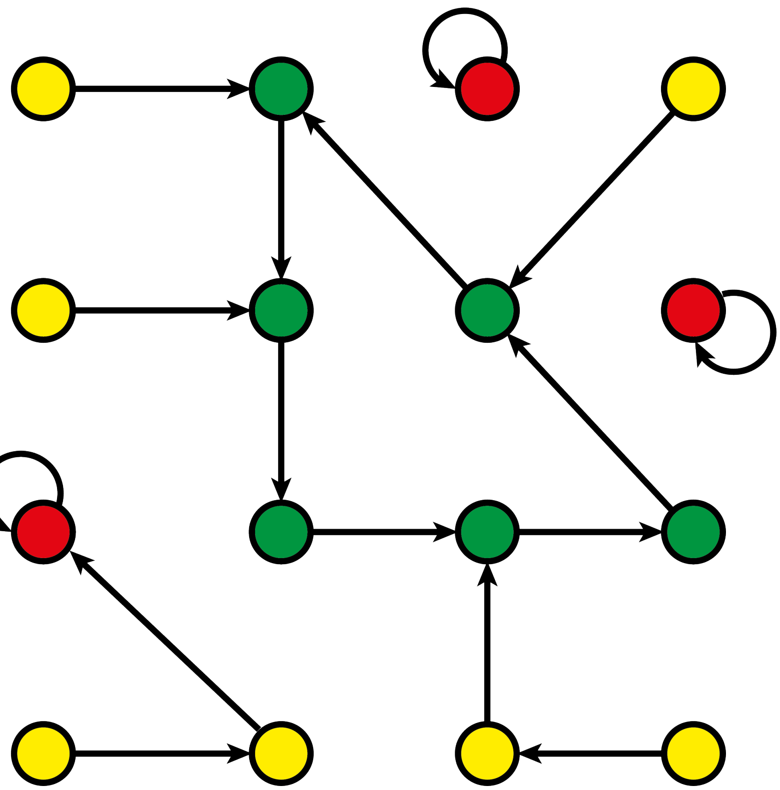

Рис. 1. Возвратные и невозвратные состояния

В качестве мотивации постановок рассматриваемых в статье комбинаторных задач отметим следующее.

Служебные слова переведены

Приведена мотивация для получения комбинаторных формул

Комбинаторные формулы для числа состояний сети Буслаева, принадлежащих циклам с заданными значениями средней скорости, может быть полезным при планировании имитационных экспериментов и анализа его результатов, так как при наличии малочисленных состояний, обладающих определенными свойствами, нужно проведение большего числа имитационных экспериментов.

Вычисление числа состояний, принадлежащих циклам с заданными характеристиками, и числа возвратных состояний может быть полезным также, например, для вычисления энтропии бинарной цепочки при рассмотрении теоретических вопросов характера изменения энтропии бинарной цепочки как динамической системы.

Настоящая статья имеет следующую структуру.

В разделах 2, 3 приводятся соответственно список определений и используемых обозначений. В разделе 4 настоящей работы приводится описание рассматриваемой системы и даются определения связанных с ней понятий. В разделе 5 приводятся сведения о результатах относящихся к рассматриваемой системе, известных раньше. В разделе 6 получена формула для числа состояний, из которых система попадает в состояние свободного движения, т. е. в состояние, при нахождении в котором все частицы перемещаются без задержек в настоящий момент и в будущем. В разделе 7 получены формулы, которые позволяют вычислить для каждого принадлежащего спектру значения средней скорости суммарное число состояний, принадлежащих циклам с данным значением средней скорости, и число невозвратных состояний, из которых система переходит в состояния таких циклов

2 Определения

Определения выделены в отдельный раздел.

Приведем определения.

Дискретная сеть Буслаева — динамическая система с дискретным пространством состоянием и дискретным временем, содержащая конечное множество контуров — замкнутых последовательностей ячеек, в каждой из которых находятся частицы, причем частицы перемещаются по заданным правилам.

Узлы — общие точки соседних контуров, через которые не могут одновременно проходить более одной частицы.

Правило разрешения конфликта (конкуренции) — правило, определяющее порядок прохождения через общий узел частиц, одновременно подошедших к узлу.

Бинарная цепочка контуров — сеть Буслаева, на каждом из которых имеются две ячейки и одна частица, перемещающаяся на каждом шаге, если нет задержки, причем каждый контур имеет по одному узлу с каждым из двух соседних контуров — слева и справа.

Левоприоритетное правило разрешения конфликта, при котором первой через узел проходит (*выигрывает конкуренцию*) частица, находящаяся на контуре, расположенном слева от узла.

Возвратное состояние системы — состояние, в которое система возвращается бесконечное число раз, [16].

Невозвратное состояние системы — состояние, в которое система возвращается не более чем конечное число раз, [16].

Цикл — замкнутая траектория в пространстве состояний системы.

Средняя скорость частицы — отношение числа перемещений частицы на цикл к периоду (длительности цикла).

Спектр скоростей сети Буслаева — множество значений средних скоростей частиц при различных начальных состояниях.

Состояние свободного движения — такое состояние сети Буслаева, что все частицы перемещаются в настоящий момент и на каждом шаге в будущем.

Вектор состояния бинарной цепочки — вектор, i-я координата которого равна 0 или 1 в зависимости от номера ячейки, в которой находится частица контура.

Кластер нулей (единиц) — последовательность соседних по модулю N (N — число ячеек) нулей (единиц) в векторе состояния. Кластер нулей (единиц) разделены единицами (нулями).

Длина кластера нулей (единиц) — число нулей (единиц) в кластере.

3 Обозначения

Обозначения выделены в отдельный раздел.

Перечислим обозначения, которые будем использовать:

$[a]$ — целая часть числа a;

C_n^m — число сочетаний из n элементов по m;

N — число контуров бинарной цепочки;

$(i, i+1)$ — общий узел контуров i и $i+1$;

v — средняя скорость частиц;

$(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ — состояние бинарной цепочки такое, что частица контура i находится в ячейке с номером x_i, $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

$b(x, d)$ — вектор, получаемый из вектора x циклическим сдвигом координат на d позиций вправо, т. е.

$$b(x, d) = (x_{N-d}, x_{N-d+1}, \ldots, x_0, \ldots, x_{N-d-1}).$$

$M^-(N, 0)$ — множество состояний, содержащих хотя бы один ноль и хотя бы одну единицу и не содержащих кластеров единиц длиной больше 1;

$M(N, 0)$ — множество всех начальных состояний, для которых средняя скорость частиц равна 1:

$G^-(N, 0, s)$ — множество состояний $(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \in M^-(N, 0, s)$ таких, что $x_0 = 1$.

$M(N, k)$ — множество состояний, векторы которых содержат хотя бы один ноль и ровно k кластеров единиц длиной не меньше двух;

$M^+(N, k)$ — подмножество множества $M(N, k)$, состоящее из возвратных состояний;

$M^-(N, k)$ — подмножество множества $M(N, k)$, состоящее из невозвратных состояний;

$M(N, k, m, s)$ – подмножество множества $M(N, k)$, состоящее из состояний, вектор которых содержит s кластеров единиц длиной 1, а суммарное число единиц в k кластерах равно m.

$G(N,k,m,s)$ – множество принадлежащих множеству $M(N,k,m,s)$ состояний $(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$, для которых контур 0 находится в состоянии 1, а контур $N-1$ — в состоянии 0, $1 \le k \le \frac{N}{3}$, $2k \le m \le N-k$, $0 \le s \le \left[\frac{N-m-k}{2}\right]$;

p_k — вероятность того, что установится цикл со скоростью $1-\frac{k}{N}$ в предположении, что каждое состояние системы выбирается в качестве начального равновероятно;

"Определение, приведенное после теоремы 3, сформулировано плохо." - Формулировка теоремы исправлена.

a_k — доля возвратных состояний среди состояний со средней скоростью $1-\frac{k}{N}$: $a_k = |M^+(N,k)|/|M(N,k)|$.

4 Описание системы и относящиеся к ней понятия

Рассматриваемая система содержит $N \ge 2$ контуров, $0, 1, \ldots, N-1$, на каждом из которых находятся две ячейки, рис. 2. Это ячейка 0 — нижняя ячейка и ячейка 1 — верхняя ячейка. Для контура i контур $i-1$ (вычитание по модулю N) является соседним слева контуром, а контур $i+1$ (сложение по модулю N) — соседним справа, при этом соседние контуры i и контуры $i+1$ (сложение по модулю N) имеют общую точку — узел $(i, i+1)$, $0, 1, \ldots, N-1$. На каждом контуре находится одна частица, которая в каждый момент времени $0, 1, 2, \ldots$ находится в одной из двух ячеек. На каждом шаге частица переходит в другую ячейку контура, если нет задержки. При переходе частицы контура i (частицы i) из ячейки 0 в ячейку 1 данная частица пересекает узел $(i, i+1)$ (вычитание по модулю N), а при переходе этой частицы из ячейки 1 в ячейку 0 частица пересекает узел $(i-1, i)$ (сложение по модулю N), $0, 1, \ldots, N-1$, (*движение против часовой стрелки*). Задержка возникает, если при переходе в другую ячейку две частицы должны пересечь общий для них узел. В этом случае перемещается только частица в соответствии с левоприоритетным правилом разрешения конкуренции, а другая частица перемещается только на следующем шаге. Таким образом, конкуренцию частиц i и $i+1$ выигрывает частица i, $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

"В тексте описано движение частицы по часовой стрелки, а не против." - Внесена поправка.

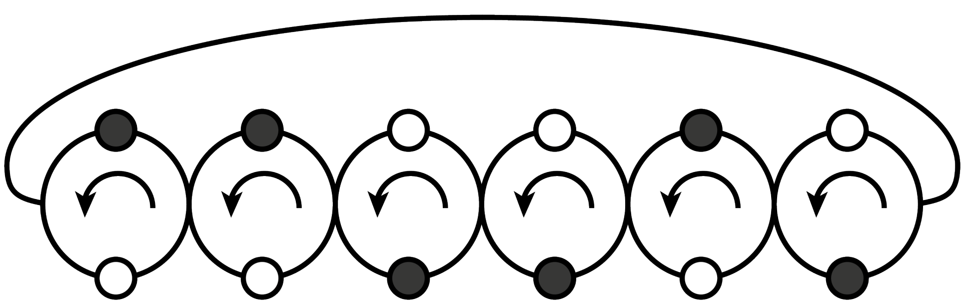

Рис. 2. Бинарная цепочка, $N = 6$, левоприоритетное правило разрешения конфликта. Формат рисунка уменьшен, качество улучшено

Будем говорить, что контур i находится в состоянии 0 или в состоянии 1 в зависимости от того, находится ли частица в ячейке 0 или в ячейке 1. Состояние системы характеризуется вектором $(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$, где x_i — состояние контура i, т. е. номер ячейки, в которой находится частица i, $i = 0, 1, \ldots, N-1$. Всего имеется 2^N состояний. Начальное состояние системы задается.

Следующее состояние системы полностью определяется предыдущим и число состояний конечно. Поэтому, начиная с некоторого момента, должна повторяться некоторая последовательность состояний — реализуется цикл. Средняя скорость частицы равна отношению числа перемещений частицы на цикле к длительности цикла.

При попадании системы в состояние свободного движения реализуется цикл со скоростью частиц, равной 1.

Как будет отмечено в разделе 6, рассматриваемая система может находиться в невозвратном состоянии только в начальный момент времени, а не позднее чем в следующий момент после начального момента система находится в состояниях одного из циклов. Это следует из того, что только в начальный момент времени система может находиться в таком состоянии, что частица находится в верхней ячейке контура и при этом на соседних слева и справа контурах частица находится в нижних ячейках. Начиная со следующего момента после начального, система находится в состоянии, когда таких троек контуров нет, и за каждые два такта конфигурация частиц (вектор состояния) сдвигается циклически на одну позицию вправо и, следовательно, состояние принадлежит циклу.

"Поясните, пожалуйста." - Пояснение дано.

Если начальное состояние бинарной цепочки принадлежит циклу, средняя скорость частиц соответствует этому циклу. Если начальное состояние не принадлежит циклу, то средняя скорость частиц соответствуют циклу, содержащему состояние, в которое бинарная цепочка переходит из данного начального состояния.

5 Известные результаты о бинарной цепочке с левоприоритетным правилом разрешения конкуренции

Приведем утверждения, следующие из результатов [12], которые используются в настоящей статье при рассмотрении задач получения комбинаторных формул для рассматриваемой системы. Эти утверждения сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Для бинарной цепочки с левоприоритетным правилом разрешения конкуренции верно следующее.*

Служебные слова переведены

1. Спектр средних скоростей системы содержит ровно $\left[\frac{N}{3}\right]+1$ *значений. Эти значения вычисляются по формуле*

$$v = 1 - \frac{k}{N},\ k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{N}{3}\right].$$

2. Имеется единственный цикл, на котором частицы движутся без задержек. Длина этого цикла равна двум. Данному циклу принадлежат два состояния $(0,0,\ldots,0)$, $(1,1,\ldots,1)$.

3. Если вектор состояния содержит хотя бы один ноль и хотя бы одну единицу и не содержит кластеров единиц длиной больше 1, то это состояние является невозвратным, причем система из этого состояния попадает за один шаг в состояние $(1,1,\ldots,1)$, *являющееся состоянием свободного движения (частицы, находившиеся в ячейках 0 перейдут в ячейки 1, а частицы, находившиеся в ячейках 1, останутся в них).*

"Судя по тексту выше, система должна попасть в состояние (0, 0, . . . , 0)." - Пояснено, почему система должна попасть в состояние (1, 1, . . . , 1).

4. Если вектор состояния содержит ровно по одному кластеру нулей и единиц, причем длина кластера единиц не меньше двух, то это состояние принадлежит циклу, для которого средняя скорость частиц равна $(N-1)/N$.

5. Если вектор состояния содержит ровно k *кластеров единиц, причем длина каждого из этих кластеров не меньше двух, то это состояние принадлежит циклу, для которого средняя скорость частиц равна* $(N-k)/N$, $k = 2, 3, \ldots, [N/3]$. *Более* $[N/3]$ *кластеров единиц длиной не менее 2 в векторе состояния содержаться не может.*

6. Если вектор состояния содержит ровно k *кластеров единиц длиной не меньше двух и хотя бы один кластер длиной 1, то это состояние является невозвратным, причем система попадает из этого состояния за один шаг в состояние, принадлежащее циклу, для которого средняя скорость частиц равна* $(N-k)/N$, $k = 1, 2, \ldots, [N/3]$.

7. Если $N \geq 3$ *и каждое состояние из пространства состояний системы выбирается равновероятно, то математическое ожидание средней скорости частиц на реализующемся цикле не зависит от* N *и равно 7/8.*

6 Число состояний свободного движения и число состояний, из которых система попадает в состояние свободного движения

Будем обозначать через C_n^m число сочетаний m элементов из n :

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

В соответствии с теоремой 1 существует единственный цикл, содержащий состояния свободного движения, т. е. цикл на котором скорость частиц равна 1, причем этот цикл содержит ровно два состояния $(0, 0, \ldots, 0)$. Этот цикл реализуется в соответствии с теоремой 1 также в случае, если начальное состояние содержит хотя бы один ноль и хотя бы одну единицу и не содержит кластеров единиц длиной больше 1. Пусть $M^-(N, 0)$ — множество таких состояний в пространстве состояний системы; $|M^-(N, 0)|$ — число таких состояний (через $|A|$ обозначаем мощность множества A); $M(N, 0)$ — множество всех начальных состояний, для которых средняя скорость частиц равна 1:

Обозначение мощности множества здесь и далее по тексту заменено на общепринятое

$$|M(N, 0)| = 2 + |M^-(N, 0)|. \tag{1}$$

Теорема 2. *Число невозвратных состояний рассматриваемой бинарной цепочки, из которых система попадает в состояние свободного движения, вычисляется по формуле*

$$|M^-(N, 0)| = \sum_{s=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{N}{s} C_{N-s-1}^{s-1}. \tag{2}$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 1 система попадает из заданного состояния в состояние свободного движения, если вектор этого состояния содержит хотя бы один кластер единиц, но длина каждого содержащегося в векторе кластера единиц равна 1. Пусть $M^-(N, 0, s)$ — множество состояний, векторы которых содержат s кластеров единиц, причем длина каждого из этих кластеров равна 1, $s = 1, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right]$. Больше чем $\left[\frac{N}{2}\right]$ кластеров единиц в векторе состояния быть не может.

Пусть $G^-(N, 0, s)$ — подмножество множества $M^-(N, 0, s)$ состоящее из состояний $(x_0, x_1, \cdots < x_{N-1}) \in M^-(N, 0, s)$ таких, что $x_0 = 1$. Мощность множества $G^-(N, 0, s)$ равна числу способов выбрать места для единиц в векторе, которое, в свою очередь, равно числу способов представить число $N - s$ в виде суммы натуральных чисел. Число $N - s$ можно представить C_{N-s-1}^{s-1} способами и, таким образом,

$$|M^-(N, 0, s)| = C_{N-s-1}^{s-1}, \; s = 1, \ldots, N. \tag{3}$$

Пусть $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$ — вектор состояния, принадлежащего множеству $G^-(N, 0, s)$ и $b(x, d)$ — вектор, получаемый из вектора x циклическим сдвигом координат на d позиций право, т. е.

$$b(x, d) = (x_{N-d}, x_{N-d+1}, \ldots, x_{N-1}, x_0, \ldots, x_{N-d-1}).$$

Каждое состояние множества $M^-(N, 0, s)$ может быть представлено в виде $b(a, d)$ для k различных пар (x, d), где x — некоторый элемент множества $G^-(N, 0, s)$, а d — одно из чисел $0, 1, \ldots, N-1$. Вектор любого состояния, принадлежащего множеству $M^-(N, 0, s)$, совпадает с вектором $b(a, d)$ при s различных парах (a, d). Действительно, пусть I_1 — множество значений i, при которых $x_i = 1$ для вектора $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$, "Пояснить почему вектор любого состояния из $M^-(N,0,s)$ совпадает с вектором $b(x,d)$ при s различных парах (x,d)?" - Пояснение добавлено.

$I_1 = \{i_1, \ldots, i_s\}$ — множество значений i, при которых $x_i = 1$, $I_1 = s$; $a(j)$ — вектор, получаемый из вектора x циклическим сдвигом на i_j позиций влево. Тогда $b(a(j), i_j) = x$ при $j = 1, \ldots, s$ и $b(a,d) \neq x$ при $d \neq I$. Из изложенного следует, что имеется ровно s различных представлений вектора x в виде $b(a,d)$.

Таким образом, имеем

$$|M^-(N,0,s)| = \frac{N}{s}|G^-(N,0,s)| \; s = 1, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right]. \tag{4}$$

Из (3), (4) получаем

$$|M^-(N,0,s)| = \frac{N}{s}C_{N-s-1}^{s-1}, \; s = 1, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right] \tag{5}$$

Так как число s может принимать значения $1, 2, \ldots, \left[\frac{N}{2}\right]$, имеем

$$|M^-(N,0)| = \sum_{s=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} B^-(N,0,s). \tag{6}$$

Из (5), (6) получаем (2). Теорема 2 доказана.

□

Теорема 3 оформлена в виде следствия

Следствие 1. Число состояний, которые либо принадлежат циклу со скоростью 1, либо из этих состояний система попадает в состояние, принадлежащее циклу со скоростью 1, вычисляется по формуле

$$|M(N,0)| = 2 + \sum_{s=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} \frac{N}{s}C_{N-s-1}^{s-1}. \tag{7}$$

Теорема 4 оформлена в виде следствия

Следствие 2. Если каждое состояние выбирается из пространства состояний системы в качестве начального равновероятно, то реализуется цикл со скоростью 1, или что то же самое, значение p_0 вычисляется по формуле

$$p_0 = |M(N,0)|/2^N,$$

где $|M(N,0)|$ вычисляется по формуле (7).

7 Число возвратных и невозвратных состояний, соответствующих различным значениям спектра средних скоростей

В данном разделе получены формулы, которые позволяют вычислить для каждого принадлежащего спектру значения средней скорости суммарное число состояний, принадлежащих циклам с данным значением средней скорости и число невозвратных состояний, из которых система переходит в состояния таких циклов.

Вектор состояния множества $M(N,k,m,s)$ должен также содержать $k+s$ кластеров нулей и, следовательно, число нулей в векторе не меньше

$k+s$. Учитывая, что должно выполняться неравенство $m+k+2s \leq N$, имеем неравенства

$$2k \leq m \leq N-k, \tag{8}$$

$$0 \leq s \leq \left[\frac{N-m-k}{2}\right], \tag{9}$$

Пусть $|M(N,k,m,s)|$ число состояний, принадлежащих множеству $M(N,k,m,s)$, где $1 \leq k \leq \frac{N}{3}$ и m, s удовлетворяют условиям (8), (9).

"Строка вышла за границы печатного листа." - Внесено исправление.

Теорема 3. *Значение* $|M(N,k,m,s)|$ *вычисляется по формуле*

$$|M(N,k,m,s)| = \frac{N}{k+s} C_{m-k-1}^{k-1} C_{N-m-s-1}^{k+s-1},$$

где $1 \leq k \leq \frac{N}{3}$, $2k \leq m \leq N-k$, $0 \leq s \leq \left[\frac{N-m-k}{2}\right]$.

Исправлена опечатка 7

Доказательство. Значение $|G(N,k,m,s)|$ равно произведению следующих трех множителей. Первый множитель — число способов выбрать в векторе места для кластеров длиной не меньше двух в последовательности кластеров единиц. Это число равно C_{k+s}^{k}. Второй множитель — число способов распределить m единиц по кластерам единиц длиной не меньше двух. Это число равно числу способов представить число m в виде суммы k целых слагаемых, каждое из которых не меньше двух, которое, в свою очередь, равно числу способов представить число $m-k$ в виде суммы k целых положительных слагаемых C_{m-k-1}^{k-1}. Третий множитель – число способов распределить $N-m-s$ нулей по $k+s$ кластерам нулей. Это число равно $C_{N-m-s-1}^{k+s-1}$. Таким образом,

$$|G(N,k,m,s)| = C_{k+s}^{k} C_{m-k-1}^{k-1} C_{N-m-s-1}^{k+s-1}. \tag{10}$$

Число элементов множества $M(N,k,m,s)$ связано с числом элементов множества $G(N,k,m,s)$ соотношением

$$|M(N,k,m,s)| = \frac{N}{k+s}|G(N,k,m,s)|, \tag{11}$$

которое доказывается аналогично тому, как доказывается формула (4) в доказательстве теоремы 2.

Исправлена опечатка 9

$\square$

Из (10) и (11) получаем утверждение теоремы.

Теорема 4. *Число состояний, принадлежащих циклам со средней скоростью* $v = 1 - \frac{k}{N}$, *вычисляется по формуле*

$$|M^{+}(N,k)| = \sum_{m=2k}^{N-k} \frac{N}{k} C_{m-k-1}^{k-1} C_{N-m-1}^{k-1}.$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 1 состояние удовлетворяет условию теоремы в том и только в том случае, если вектор состояния содержит ровно k кластеров единиц длиной не меньше двух и не содержит кластеров единиц длиной 1. Таким образом,

$$|M^+(N,k)| = \sum_{m=2k}^{N-k} M(N,k,m,0),\ \ k = 1,\dots,\left[\frac{N}{3}\right].$$

Отсюда, учитывая теоремы 1 и 3, получаем утверждение теоремы 4.

□

Теорема 5. *Число состояний, из которых система попадает в состояния, принадлежащих циклам со средней скоростью* $v = 1 - \frac{k}{N}$, *вычисляется по формуле*

$$|M^-(N,k)| = \sum_{m=2k}^{N-k} \sum_{s=1}^{\left[\frac{N-m-k}{2}\right]} \frac{N}{k+s} C_{k+s}^{k} C_{m-k-1}^{k-1} C_{N-m-s-1}^{k+s-1}.$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 1 состояние удовлетворяет условию теоремы в том и только в том случае, если вектор состояния содержит ровно k кластеров единиц длиной не меньше двух и хотя бы один кластер единиц длиной 1. Следовательно,

$$|M^-(N,k)| = \sum_{m=2k}^{N-k} \sum_{s=1}^{\left[\frac{N-m-k}{2}\right]} |M(N,k,m,0)|,\ \ k = 1,\dots,\left[\frac{N}{3}\right].$$

□

Отсюда, учитывая теоремы 1 и 5, имеем следствие 3.

Теорема 8 оформлена в виде следствия

Следствие 3. Число начальных состояний, при которых реализуется цикл со средней скоростью частиц $v = 1 - \frac{k}{N}$, вычисляется по формуле

$$|M(N,k)| = \sum_{m=2k}^{N-k} \sum_{s=0}^{\left[\frac{N-m-k}{2}\right]} \frac{N}{k+s} C_{k+s}^{k} C_{m-k-1}^{k-1} C_{N-m-s-1}^{k+s-1}. \tag{12}$$

Теорема 9 оформлена в виде следствия

Следствие 4. Если каждое состояние выбирается из пространства состояний системы в качестве начального равновероятно, то вероятность того, что установится цикл со скоростью $1 - \frac{k}{N}$, или что то же самое, значение p_k вычисляется по формуле

$$p_k = |M(N,k)|/2^N,\ \ k = 1,\dots,\left[\frac{N}{3}\right],$$

где $|M(N,k)|$ вычисляется по формуле (12).

8 Заключение

Рассмотрена динамическая система класса сетей Буслаева, представляющая собой бинарную цепочку контуров с левоприоритетным правилом разрешения конкуренции. Правило, по которому работает система, эквивалента правилу элементарного клеточного автомата ECA 063. Получены формулы для вычисления числа состояния, соответствующих каждому значению из спектра средних скоростей. Формулы позволяют вычислить число состояний, принадлежащих циклам, и число невозвратных состояний, из которых система попадает в состояния цикла с фиксированным значением скорости. Используя эти формулы можно также вычислить вероятность того, что средняя скорость примет заданное значение, при условии, что начальное состояние выбирается из пространства состояний системы равновероятно.

Список литературы

[1] K. Nagel, M. Schreckenberg, *A cellular automation models for freeway traffic*, Journal de physique I, **2** (1992), 2221–2229.

[2] M. Schreckenberg, A. Schadschneider, K. Nagel, N. Ito. *Discrete stochastic models for traffic flow*, P
hysical Revew E, **5**1:4 (1995), 2939.

[3] М.Л. Бланк. *Exact analysis of dynamical systems arising in models of traffic flow*, Russian Mathematical Surveys, **5**5:3 (2000), 562–563.

[4] V. Belitsky, P.A. Ferrari, *Invariant measures and convergence properties for cellular automaton 184 and related processes*, Journal of Statistical Physics, **118** (2005), 589–623.

[5] M. Kanai, K. Nishinari, T. Tokihiro, *Exact solution and asymptotic behaviour of the asymmetric simple exclusion process on a ring*, Journal of Physics A: Mathematical and General, **3**9:29 (2006), 9071.

[6] M.L. Blank, *Metric properties of discrete time exclusion type processes in continuum*, Journal of Statistical Physics, **1**40:1 (2010), 170–197.

[7] S. Wolfram, *Statistical mechanics of cellular automata*, Reviews of Modern Physics, **5**5:3 (1983), 601.

[8] O. Biham, A.A. Middleton, D. Levine, *Self-organization and a dynamical transition in traffic-flow models*, Physical Review A, **4**6:10 (1992), R6124.

[9] M.V. Yashina, A.G. Tatashev, *Loading conditions for self-organization in the BML model with stochastic direction choice*, Mathematical Methods in the Applied Sciences. First published: 26 August 2024

[10] V.V. Kozlov, A.P. Buslaev, A.G. Tatashev, *On synergy of totally connected flows on chainmails*, Proceedings of the 13th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Sciences and Engineering, CMMSE 2013, Almeria, Spain, 2013 **3**, 861–874 (2014).

[11] A.S. Bugaev, A.P. Buslaev, V.V. Kozlov, M.V. Yashina. *Distributed problems of monitoring and modern approaches to traffic modeling*. In 2011 14th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC) (pp. 477-481), IEEE, 2011, October.

[12] V.V. Kozlov, A.P. Buslaev, A.G. Tatashev, *Monotonic walks on a necklace and a coloured dynamic vector*, International Journal of Computer Mathematics, **9**2:9 (2015), 1910–1920.

[13] A. Tatashev, M. Yashina. *Spectrum of elementary cellular automata and closed chains of contours*. Machines, **7**:2 (2019), 1910–1920.
[14] А.Г. Таташев, М.В. Яшина. *Оптимальное правило разрешения конкуренции для управляемой бинарной цепочки*, Владикавказский математический журнал, **26**:1 (2024), 142–153.
[15] О.Л. Бандман. *Метод построения клеточно-автоматных моделей процессов формирования устойчивых структур*, Прикладная дискретная математика, **4**:1 (2024), 91–99.
[16] А.А. Боровков. *Теория вероятностей*. 3-е изд. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 472 с.

Марина Викторовна Яшина
Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ),
125319, Россия, Москва,
Ленинградский проспект, 64
Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ),
111024, Россия, Москва,
Авиамоторная, 8а
Московский авиационный институт (МАИ),
125993, Россия, Москва,
Волоколамское шоссе, 4
Email address: m.v.yashina@madi.ru

Александр Геннадьевич Таташев
Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ),
125319, Россия, Москва,
Ленинградский проспект, 64
Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ),
111024, Россия, Москва,
Авиамоторная, 8а
Email address: a-tatashev@yandex.ru

Роман Васильевич Стрекалов
Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ),
125319, Россия, Москва,
Ленинградский проспект, 64
ГНЦ РФ ФГУП "НАМИ",
125438, Россия, Москва,
Автомоторная улица, 2
Email address: rvstrekalov@yandex.ru