

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СОСТОЯНИЙ БИНАРНОЙ
ЦЕПОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО СПЕКТРА
СКОРОСТЕЙМ.В. ЯШИНА  А.Г. ТАТАШЕВ  Р.В. СТРЕКАЛОВ
Представлено

Аннотация: A discrete dynamical system called a binary chain of contours is considered. The system belongs to a class of dynamic systems developed by A.P. Buslaev with aim of creating traffic models with network structure and such that analytical results may be obtained for these systems. The system under consideration contains a finite set of circumferences forming a closed chain. There are two cells and a particle in any circumference. At any discrete moment, the particle is in a cell — the lower cell or in the upper cell. For each circumference, there are two adjacent circumferences — on the left and on the right. There is a common point for any two adjacent circumferences. This point is called a node. At any step, the particle moves to the other cell of the circumference if no delay occurs. Moving from the lower cell to the upper one, the particle passes through the node to the right of the contour, and, moving from the upper cell to the lower one, it passes through the node to the left. Delays in particle movement are due to the condition that two particles cannot pass through the same node at the same moment. If two particles try to cross a common node at the same moment, then only the particle moving from the

YASHINA, M.V., TATASHEV, A.G., STREKALOV R.V., BINARY CHAIN STATE DISTRIBUTION FOR VELOCITY SPECTRUM.

© 2024 ЯШИНА М.В., ТАТАШЕВ А.Г., СТРЕКАЛОВ Р.В.

Работа выполнена при поддержке проекта Госзадания Министерства науки и высшего образования РФ FFSM–2023–0003.

Поступила 1 января 2024 г., опубликована 31 декабря 2024 г.

lower cell to the upper one moves, and the other particle moves only at the next step. The contour can be in one of two states depending on the cell in that the particle is located. The state of the system is determined by the states of all circumferences. It was previously found that no later than at discrete moment of time following the initial moment the system results in the state of a cycle — a closed trajectory in the system state space. The ratio of the number of particle movements during a cycle to the duration of the cycle period is called the average velocity of the particle. It was previously proved that, during a cycle, all particles move with the same average velocity and a formula was obtained for the spectrum of average velocities, i.e., the set of all possible values of the average velocities for different initial states with a prescribed number of circumferences. In this paper, combinatorial formulas are obtained that allow, for any value belonging to the spectrum, to compute the total number of states belonging to cycles with this value of the average velocity and the number of non-recurrent states from that the system results in states of cycles.

Ключевые слова: dynamic systems, cellular automaton, Buslaev networks, classification of states, spectrum of average speeds.

1 Введение

В модели Нагеля–Шрекенберга [1] частицы, соответствующие автотранспортным средствам, движутся по определенным правилам на решетке, представляющей собой бесконечную или замкнутую последовательность ячеек, в каждой из которых не может одновременно находиться более одной частицы. Для относительно простых вариантов модели найдены аналитические результаты, например, в [2]–[6]. В [2]–[4] рассматривалась, в частности, модель, в которой частицы движутся на одномерной решетке и на каждом шаге частица перемещается на одну ячейку вперед, если ячейка впереди свободна, и не перемещается, если эта ячейка впереди занята. Если модели поставить в соответствие элементарный клеточный автомат, каждая клетка которого соответствует ячейке модели, причем клетка находится в состоянии 0, если соответствующая ячейка свободна, или в состоянии 1, если эта ячейка занята, то такой клеточный автомат представляет собой элементарный клеточный автомат с правилом 184 (Elementary Cellular Automaton 184, ECA 184, CA 184) в классификации С. Вольфрама [7].

В транспортной модели ВМЛ [8] частицы движутся в перпендикулярных направлениях на двумерной решетке по правилу, представляющему собой двумерный аналог правила ECA 184. Модель ВМЛ исследовалась, например, в [9]–[13].

Модели трафика со сложными правилами движения и с сетевой структурой исследуются в основном имитационным моделированием.

А.П. Буслаев разработал класс динамических систем с целью создания транспортных моделей с сетевой структурой, для которых возможно аналитическое исследование, [14]. Рассматриваются дискретные и непрерывные сети Буслаева. Сеть Буслаева содержит систему контуров, которые в дискретном варианте представляют собой замкнутые последовательности ячеек. Контуровы имеют общие точки, называемые узлами. В дискретном варианте на контурах движутся частицы, каждая из которых в любой дискретный момент времени занимает одну из ячеек. В основном рассматривались сети Буслаева, в которых не происходит переходов частиц с одного контура на другой. Частицы движутся на контуре по правилу ЕСА 184 или по правилу ЕСА 240, при котором находящиеся в соседних ячейках частицы образуют кластеры и перемещаются одновременно. Понятие кластерного движения в моделях трафика введено в [15]. При прохождении узлов возникают задержки, обусловленные условием, в соответствии с которым более одной частицы не могут проходить через узел одновременно. Если более одной частицы подошли к общему узлу одновременно, то возникает конкуренция и первой проходит через узел частица, выбираемая в соответствии с заданным правилом разрешения конкуренции.

Сеть Буслаева, называемая бинарной цепочкой контуров, содержит замкнутую последовательность контуров, на каждом из которых находится две ячейки. В каждый дискретный момент времени частица находится в одной из ячеек — нижней или верхней. Для каждого контура имеются два соседних контура — слева и справа. Каждые два соседних контура имеют одну общую точку — узел. На каждом шаге частица переходит в другую ячейку контура, если нет задержки. Переходя из нижней ячейки в верхнюю, частица проходит через правый от контура узел, а переходя из верхней ячейки в нижнюю — через левый узел. Задержки в перемещении частиц обусловлены ограничением, в соответствии с которым две частицы не могут пересекать один и тот же узел одновременно. При попытке двух частиц пересечь одновременно общий узел перемещается только частица, выигравшая конкуренцию в соответствии с заданным правилом разрешения конкуренции. В [14], [16]–[18] исследовались различные варианты бинарной цепочки. В [16] наряду с бинарными цепочками с другими правилами разрешения конкуренции исследовалась цепочка с приоритетным правилом, в соответствии с которым конкуренцию всегда выигрывает частица, располагающаяся на контуре, который находится справа от узла. Ясно, что в силу симметрии бинарная цепочка с приоритетным правилом эквивалентна бинарной цепочке с левоприоритетным правилом, при котором конкуренцию выигрывает частица, которая располагается на контуре, находящемся слева от узла.

Бинарную цепочку можно представить как элементарный клеточный автомат.

Приведем определения клеточного автомата и связанных с ним понятий, используя терминологию [19]. Параллельно опишем понятие элементарного клеточного автомата в этих терминах. Приведем правило нумерации элементарных клеточных автоматов.

В соответствии с определением применение подстановки к клетке x на итерации t называется успешным, если $(V(x) \cup V'(x) \subset \Omega) \& (\text{rand} < p)$. В теории клеточных автоматов наряду с классом детерминированных клеточных автоматов рассматривают и класс вероятностных элементарных клеточных автоматов. Но мы рассматриваем класс детерминированных клеточных автоматов. Для таких автоматов подстановка всегда успешна. Определениями, данными в [19], атомарным понятием клеточного автомата является клетка, которая характеризуется именем $x \in X$ и состоянием $a \in A$, где X — множество имен клеток, которое обычно интерпретируется как множество координат точек в дискретном пространстве конечных размеров: A — алфавит состояний клеток. Для элементарных клеточных автоматов на бесконечной решетке множеством имен клеток является множество целых чисел. Для элементарных клеточных автоматов на замкнутой решетке, содержащей N клеток, множеством имен является множество чисел $\{0, 1, \dots, N - 1\}$. Будем говорить об элементарных клеточных автоматах на конечной решетке. Алфавит состояний клеток элементарного клеточного автомата содержит два состояния 0 и 1. Состояние клетки x в момент времени t обозначается через $v_x(t)$. На множестве имен определен шаблон соседства $T(x) = \{\varphi_j(x) : j = 1, \dots, q\}$, определяющий имена клеток, которые взаимодействуют с клеткой x . Для элементарных клеточных автоматов шаблон имеет вид $T(x) = \{x - 1, x_{i+1}\}$ (вычитание и сложение по модулю N). Если пространство клеток имеет вид решетки с прямоугольной, квадратной или треугольной формой клетки, то функция $\varphi(x) \in T(x)$ имеет вид сдвигов $\varphi_j(x) = x + l_j$, а шаблон состоит из плотно прилегающих друг к другу клеток с центром в x . Это имеет место и для элементарных клеточных автоматов. Для них $q = 2$, $l_1 = -1$, $l_2 = 1$. Шаблон связывает с клеткой $x \in X$ локальную конфигурацию $V(x) = (v_1, \dots, v_q)$ таким образом, что каждая клетка $\varphi_j(T)$ имеет состояние $v_j(X)$. Множество состояний всех клеток в момент t называется глобальной конфигурацией $\Omega(t) = \{v_x(t) : x \in X\}$. Функционирование клеточного автомата задается локальным оператором над подстановками $\Theta(\theta_1(x), \dots, \theta_n(x))$. Если локальный оператор задан одной подстановкой, то он называется простым. Элементарный клеточный автомат имеет простой локальный оператор. Подстановка имеет следующий вид: $\Theta(x) : V(x) \cup V''(x) \rightarrow V'(x)$, где $V(x)$, $V'(x)$ и $V''(x)$ — соответственно базовая, новая и контекстная подстановка. Применение к клетке x подстановки состоит в замене состояний $v_i \in V$ на новые значения $v'_i \in V'$, определяемые функцией перехода $v_i = f_j(V(x) \cup V'(x))$. Для элементарного клеточного автомата функция перехода может быть задана

в виде $v'_i = f(v_{i-1}, v_i, v_{i+1})$, причем данная функция определяет состояние клетки i в следующий момент в зависимости от состояния клеток $i - 1, i, i + 1$ в текущий момент.

Подстановка называется вероятностной, если ее применение выполняется при условии $\text{rand} < p$, где rand — значение случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$, p — заданная вероятность. Применение подстановки к клетке x на итерации t называется успешным, если выполняется условие $(V(x) \cup V'(x)) \subset \Omega(t) \& (\text{rand} < p)$. В теории клеточных автоматов наряду детерминированными элементарными клеточными автоматами рассматриваются вероятностные элементарные клеточные автоматы. Мы рассматриваем только детерминированные элементарные клеточные автоматы. Для них подстановка всегда успешна.

Порядок применений подстановок при переходе от $\Omega(t)$ к $\Omega(t + 1)$ называется режимом. Базовыми являются два режима: синхронный и асинхронный.

При синхронном режиме итерация состоит из двух следующих шагов: вычисляются значения функций переходов для всех клеток, для которых выполнено условие того, что подстановка успешна. Затем в базовых конфигурациях всех клеток производится замена состояний в соответствии с подстановкой.

При асинхронном режиме итерация состоит из шагов, число которых равно числу элементов множества X . На каждом шаге случайно выбирается имя клетки $x_i \in X$, вычисляются значения функций переходов для новой локальной конфигурации $V'(x_i)$ в соответствии с функцией перехода и в базовой конфигурации $V(x_i)$ производится смена состояний на соответствующие состояния из $V'(x_i)$.

Элементарные клеточные автоматы работают в синхронном режиме.

Функционирование клеточного автомата подчиняется итерационному алгоритму, в котором итерацией считается применение локального оператора (успешное и безуспешное) ко всем клеткам $x \in X$. При этом осуществляется переход $\Omega(t) \rightarrow \Omega(t + 1)$.

Имеются 256 элементарных клеточных автоматов ЕСА 000, ЕСА 001, ЕСА 255. Номер элементарного клеточного автомата вычисляется следующим образом. Если автомат задается функцией f , для которой $f(1, 1, 1) = a_7, f(1, 1, 0) = a_6, f(1, 0, 1) = a_5, f(1, 0, 0) = a_4, f(0, 1, 1) = a_3, f(0, 1, 0) = a_2, f(0, 0, 1) = a_1, f(0, 0, 0) = a_7$, то этому автомату присваивается номер A , вычисляемый по формуле

$$A = \sum_{i=0}^7 a_i \cdot 2^i.$$

Как отмечается в [16], вектор состояния бинарной цепочки с левоприоритетным правилом разрешения конкуренции, в которой частица движется на контуре против часовой стрелки изменяется по правилу

ЕСА 063; бинарная цепочка с движением против часовой стрелки и правоприоритетным правилом эквивалентна ЕСА 017; бинарная цепочка с движением по часовой стрелке и левоприоритетным правилом эквивалентна ЕСА 003; бинарная цепочка с движением по часовой стрелке и правоприоритетным правилом эквивалентна ЕСА 119.

В настоящей работе рассматривается бинарная цепочка контуров с левоприоритетным правилом разрешения конкуренции. Рассматриваемая система не позднее дискретного момента, следующего после начального момента, находится в состояниях, принадлежащих одному из циклов — замкнутой траектории в пространстве состояний системы. Отношение числа перемещений частицы в течение цикла к длительности цикла — периоду называется средней скоростью частицы. Получены комбинаторные формулы, позволяющие при заданном числе контуров для каждого принадлежащего спектру значения средней скорости вычислить суммарное число состояний, принадлежащих циклам с данным значением средней скорости и число невозвратных состояний, из которых система переходит в состояния таких циклов. Используя эти формулы, можно, в частности, вычислить вероятность того, что средняя скорость примет фиксированное значение, в предположении, что каждое состояние выбирается из пространства состояний системы в качестве начального равновероятно. Состояние цепи Маркова называется возвратным, если это состояние повторяется с вероятностью единица. Состояние, не являющееся возвратным, называется невозвратным. Применительно к рассматриваемой детерминированной динамической системе состояние возвратно в том и только в том случае, если оно принадлежит некоторому циклу. На рис. 1 кружки соответствуют состояниям, стрелки — переходам между состояниями. Зеленые кружки соответствуют возвратным состояниям, принадлежащим циклу с периодом больше 1, красные кружки — поглощающие состояния, соответствующие циклам с периодом 1, желтые кружки — невозвратные состояния.

В разделе 2 настоящей работы приводится описание рассматриваемой системы и даются определения связанных с ней понятий. В разделе 3 приводится информация о результатах относящихся к рассматриваемой системе, известных раньше. В разделе 4 получена формула для числа состояний, из которых система попадает в состояние свободного движения, т. е. в состояние, при нахождении в котором все частицы перемещаются без задержек в настоящий момент и в будущем. В разделе 5 получены формулы, которые позволяют вычислить для каждого принадлежащего спектру значения средней скорости суммарное число состояний, принадлежащих циклам с данным значением средней скорости, и число невозвратных состояний, из которых система переходит в состояния таких циклов. В разделе 6 приводятся результаты вычислений по полученным формулам при числе контуров от 3 до 10.

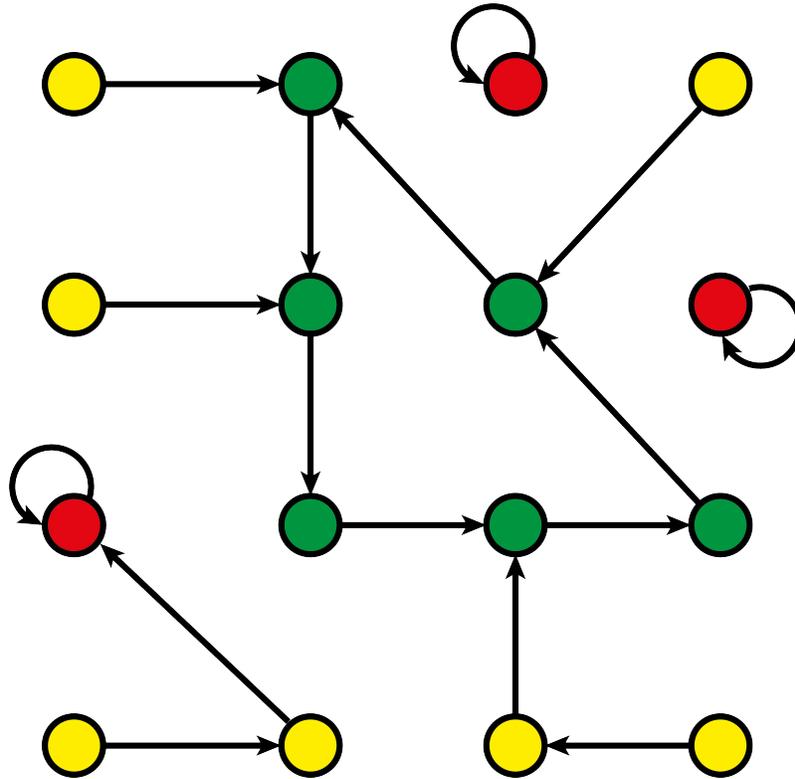


FIG. 1. Возвратные и невозвратные состояния

2. Описание системы и относящиеся к ней понятия

Рассматриваемая система содержит $N \geq 2$ контуров, $0, 1, \dots, N - 1$, на каждом из которых находятся две ячейки, рис. 2. Это ячейка 0 — нижняя ячейка и ячейка 1 — верхняя ячейка. Для контура i контур $i - 1$ (вычитание по модулю N) является соседним слева контуром, а контур $i + 1$ (сложение по модулю N) — соседним справа, при этом соседние контуры i и контуры $i + 1$ (сложение по модулю N) имеют общую точку — узел $(i, i + 1)$, $0, 1, \dots, N - 1$. На каждом контуре находится одна частица, которая в каждый момент времени $0, 1, 2, \dots$ находится в одной из двух ячеек. На каждом шаге частица переходит в другую ячейку контура, если нет задержки. При переходе частицы контура i (частицы i) из ячейки 0 в ячейку 1 данная частица пересекает узел $(i - 1, i)$ (вычитание по модулю N), а при переходе этой частицы из ячейки 1 в ячейку 0 частица пересекает узел $(i, i + 1)$ (сложение по модулю N), $0, 1, \dots, N - 1$, (движение против часовой стрелки). Задержка возникает, если при переходе в другую ячейку две частицы должны пересечь общий для них узел. В этом случае перемещается только частица, выигравшая конкуренцию в соответствии с заданным правилом разрешения конкуренции,

а другая частица перемещается только на следующем шаге. Будем считать правило разрешения конкуренции *левоприоритетным*, т. е. конкуренцию всегда выигрывает частица контура, расположенного слева от узла. Таким образом, конкуренцию частиц i и $i + 1$ выигрывает частица i , $i = 0, 1, \dots, N - 1$.

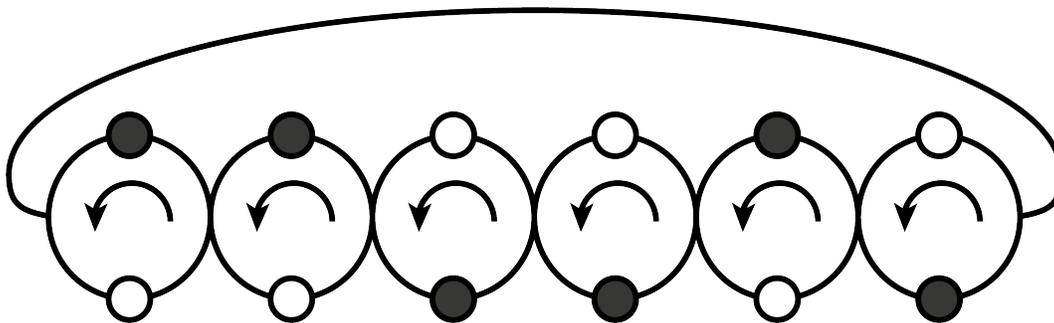


FIG. 2. Бинарная цепочка, $N = 6$, левоприоритетное правило разрешения конфликта

Будем говорить, что контур i находится в состоянии 0 или в состоянии 1 в зависимости от того, находится ли частица в ячейке 0 или в ячейке 1. Состояние системы характеризуется вектором $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$, где x_i — состояние контура i , т. е. номер ячейки, в которой находится частица i , $i = 0, 1, \dots, N - 1$. Всего имеется 2^N состояний. Начальное состояние системы задается.

Назовем последовательность соседних по модулю N единиц, разделенных нулями, в векторе состояния кластером единиц, причем число единиц в кластере называется его длиной. Аналогично определяются кластер нулей и его длина.

Следующее состояние системы полностью определяется предыдущим и число состояний конечно. Поэтому, начиная с некоторого момента, должна повторяться некоторая последовательность состояний — реализуется цикл. Отношение числа перемещений частицы на цикле к длительности цикла — периоду называем *средней скоростью частицы*.

Если начиная с некоторого момента все частицы перемещаются без задержек в текущий момент и в будущем, то говорим, что система находится в *состоянии свободного движения*. При попадании системы в состояние свободного движения реализуется цикл со скоростью частиц, равной 1.

Множество возможных значений средних скоростей при различных начальных состояниях системы и фиксированном числе контуров называем *спектром средних скоростей*.

Как отмечалось во введении, состояние цепи Маркова называется возвратным, если это состояние повторяется с вероятностью единица. В соответствии с этим состояние бинарной цепочки называем возвратным,

если оно принадлежит циклу и невозвратным, если не принадлежит никакому циклу. Как будет отмечено в разделе 3, рассматриваемая система может находиться в невозвратном состоянии только в начальный момент времени, а не позднее чем в следующий момент после начального момента система находится в состояниях одного из циклов. Если начальное состояние бинарной цепочки принадлежит циклу, средняя скорость частиц соответствует этому циклу. Если начальное состояние не принадлежит циклу, то средняя скорость частиц соответствуют циклу, содержащему состояние, в которое бинарная цепочка переходит из данного начального состояния.

2 Известные результаты о бинарной цепочке с левоприоритетным правилом разрешения конкуренции

Будем обозначать через v среднюю скорость частиц. Через $[a]$ будем обозначать целую часть числа a .

Из результатов [16] следует следующая теорема для бинарной цепочки с левоприоритетным правилом разрешения конкуренции.

Theorem 1. *Для бинарной цепочки с левоприоритетным правилом разрешения конкуренции верно следующее.*

1. *Спектр средних скоростей системы содержит ровно $[\frac{N}{3}] + 1$ значений. Эти значения вычисляются по формуле*

$$v = 1 - \frac{k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, \left[\frac{N}{3} \right].$$

2. *Имеется единственный цикл, на котором частицы движутся без задержек. Длина этого цикла равна двум. Данному циклу принадлежат два состояния $(0, 0, \dots, 0)$, $(1, 1, \dots, 1)$.*

3. *Если вектор состояния содержит хотя бы один ноль и хотя бы одну единицу и не содержит кластеров единиц длиной больше 1, то это состояние является невозвратным, причем система из этого состояния попадает за один шаг в состояние $(1, 1, \dots, 1)$, являющееся состоянием свободного движения.*

4. *Если вектор состояния содержит ровно по одному кластеру нулей и единиц, причем длина кластера единиц не меньше двух, то это состояние принадлежит циклу, для которого средняя скорость частиц равна $(N - 1)/N$.*

5. *Если вектор состояния содержит ровно k кластеров единиц, причем длина каждого из этих кластеров не меньше двух, то это состояние принадлежит циклу, для которого средняя скорость частиц равна $(N - k)/N$, $k = 2, 3, \dots, [N/3]$. Более $[N/3]$ кластеров единиц длиной не менее 2 в векторе состояния содержаться не может.*

6. Если вектор состояния содержит ровно k кластеров единиц длиной не меньше двух и хотя бы один кластер длиной 1, то это состояние является невозвратным, причем система попадает из этого состояния за один шаг в состояние, принадлежащее циклу, для которого средняя скорость частиц равна $(N - k)/N$, $k = 1, 2, \dots, \lfloor N/3 \rfloor$. Через $[x]$ обозначаем целую часть числа x .

7. Если $N \geq 3$ и каждое состояние из пространства состояний системы выбирается равновероятно, то математическое ожидание средней скорости частиц на реализующемся цикле не зависит от N и равно $7/8$.

3 Число состояний свободного движения и число состояний, из которых система попадает в состояние свободного движения

Будем обозначать через C_n^m число сочетаний m элементов из n :

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

В соответствии с теоремой 1 существует единственный цикл, содержащий состояния свободного движения, т. е. цикл на котором скорость частиц равна 1, причем этот цикл содержит ровно два состояния $(0, 0, \dots, 0)$. Этот цикл реализуется в соответствии с теоремой 1 также в случае, если начальное состояние содержит хотя бы один ноль и хотя бы одну единицу и не содержит кластеров единиц длиной больше 1. Пусть $B^-(N, 0)$ — число таких состояний в пространстве состояний системы; $B(N, 0)$ — число всех начальных состояний, для которых средняя скорость частиц равна 1:

$$B(N, 0) = 2 + B^-(N, 0). \quad (1)$$

Theorem 2. Число невозвратных состояний рассматриваемой бинарной цепочки, из которых система попадает в состояние свободного движения, вычисляется по формуле

$$B^-(N, 0) = \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \frac{N}{s} C_{N-s-1}^{s-1}. \quad (2)$$

Proof. В соответствии с теоремой 1 система попадает из заданного состояния в состояние свободного движения, если вектор этого состояния содержит хотя бы один кластер единиц, но длина каждого содержащегося в векторе кластера единиц равна 1. Пусть $M^-(N, 0, s)$ — множество состояний, векторы которых содержат s кластеров единиц, причем длина каждого из этих кластеров равна 1; $B^-(N, 0, s)$ — число таких состояний, $s = 1, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$. Больше чем $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ кластеров единиц в векторе состояния быть не может.

Пусть $G^-(N, 0, s)$ — подмножество множества $M^-(N, 0, s)$ состоящее из состояний $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) \in M^-(N, 0, s)$ таких, что $x_0 = 1$. Обозначим через $D^-(N, 0, s)$ число элементов множества $G^-(N, 0, s)$. Это число равно числу способов выбрать места для единиц в векторе, которое, в свою очередь, равно числу способов представить число $N - s$ в виде суммы натуральных чисел. Число $N - s$ можно представить C_{N-s-1}^{s-1} способами и, таким образом,

$$D^-(N, 0, s) = C_{N-s-1}^{s-1}, \quad s = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Пусть $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ — вектор состояния, принадлежащего множеству $G^-(N, 0, s)$ и $b(x, d)$ — вектор, получаемый из вектора x циклическим сдвигом координат на d позиций право, т. е.

$$b(x, d) = (x_{N-d}, x_{N-d+1}, \dots, x_{N-1}, x_0, \dots, x_{N-d-1}).$$

Каждое состояние множества $M^-(N, 0, s)$ может быть представлено в виде $b(a, d)$ для k различных пар (x, d) , где x — некоторый элемент множества $G^-(N, 0, s)$, а d — одно из чисел $0, 1, \dots, N - 1$. Вектор любого состояния, принадлежащего множеству $M^-(N, 0, s)$, совпадает с вектором $b(a, d)$ при s различных парах (b, a) . Таким образом, имеем

$$B^-(N, 0, s) = \frac{N}{s} D^-(N, 0, s) \quad s = 1, \dots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor. \quad (4)$$

Из (3), (4) получаем

$$B^-(N, 0, s) = \frac{N}{s} C_{N-s-1}^{s-1}, \quad s = 1, \dots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \quad (5)$$

Так как число s может принимать значения $1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$, имеем

$$B^-(N, 0) = \sum_{s=1}^{\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor} B^-(N, 0, s). \quad (6)$$

Из (5), (6) получаем (2). Теорема 2 доказана. \square

Theorem 3. Число состояний, которые либо принадлежат циклу со скоростью 1, либо из этих состояний система попадает в состояние, принадлежащее циклу со скоростью 1, вычисляется по формуле

$$B(N, 0) = 2 + \sum_{s=1}^{\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor} \frac{N}{s} C_{N-s-1}^{s-1}. \quad (7)$$

Proof. Утверждение теоремы следует из (2), (6).

Обозначим через p_k вероятность того, что при равновероятном выборе каждого состояние выбирается из пространства состояний системы в качестве начального равновероятно, то вероятность того, что установится цикл со скоростью

$$v = 1 - \frac{k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor.$$

□

Theorem 4. Если каждое состояние выбирается из пространства состояний системы в качестве начального равновероятно, то вероятность того, что установится цикл со скоростью 1, или что то же самое, значение p_0 вычисляется по формуле

$$p_0 = B(N, 0)/2^N,$$

где $B(N, 0)$ вычисляется по формуле (7).

Теорема 4 следует из теоремы 3 с учетом того, что число состояний в пространстве состояний системы равно 2^N .

4 Число возвратных и невозвратных состояний, соответствующих различным значениям спектра средних скоростей

В данном разделе получены формулы, которые позволяют вычислить для каждого принадлежащего спектру значения средней скорости суммарное число состояний, принадлежащих циклам с данным значением средней скорости и число невозвратных состояний, из которых система переходит в состояния таких циклов.

Пусть $M(N, k)$ — множество состояний, векторы которых содержат хотя бы один ноль и ровно k кластеров единиц длиной более двух; $M^+(N, k)$, $M^-(N, k)$ — соответственно множество возвратных (принадлежащих циклу) и невозвратных (не принадлежащих циклу) состояний, являющихся элементами множества $M(N, k)$; $B(N, k)$, $B^+(N, k)$, $B^-(N, k)$ — число элементов, соответственно множества $M(N, k, m)$, $M^+(N, k, m)$, $M^-(N, k, m)$, $k = 1, \dots, \lfloor \frac{N}{3} \rfloor$.

Пусть $M(N, k, m, s)$ — подмножество множества $M(N, k)$, состоящее из состояний, вектор которых содержит s кластеров единиц длиной 1, а суммарное число единиц в k кластерах равно m . Вектор такого состояния должен также содержать $k + s$ кластеров нулей и, следовательно, число нулей в векторе не меньше $k + s$. Учитывая, что должно выполняться неравенство $m + k + 2s \leq N$, имеем неравенства

$$2k \leq m \leq N - k, \quad (8)$$

$$0 \leq s \leq \left\lfloor \frac{N - m - k}{2} \right\rfloor, \quad (9)$$

Пусть $B(N, k, m, s)$ число состояний, принадлежащих множеству $M(N, k, m, s)$, где $1 \leq k \leq \lfloor \frac{N}{3} \rfloor$ и m, s удовлетворяют условиям (8), (9).

Theorem 5. Значение $B(N, k, m, s)$ вычисляется по формуле

$$B(N, k, m, s) = \frac{N}{k + s} C_{m-k-1}^{k-1} C_{N-m-s-1}^{k+s-1},$$

где $1 \leq k \leq \lfloor \frac{N}{3} \rfloor$, $2k \leq m \leq N - k$, $0 \leq s \leq \lfloor \frac{N-m-k}{2} \rfloor$.

Proof. Пусть $G(N, k, m, s)$ множество принадлежащих множеству $M(N, k, m, s)$ состояний $(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$, для которых контур 0 находится в состоянии 1, а контур $N-1$ находится в состоянии 0; $D(k, l, m, N)$ состояний, содержащихся в множестве $G(N, k, m, s)$, $1 \leq k \leq \frac{N}{3}$, $2k \leq m \leq N - k$, $0 \leq s \leq \lfloor \frac{N-m-k}{2} \rfloor$. Значение $D(k, l, m, N)$ равно произведению следующих трех множителей. Первый множитель — число способов выбрать в векторе места для кластеров длиной не меньше двух в последовательности кластеров единиц. Это число равно C_{k+s}^k . Второй множитель — число способов распределить m единиц по кластерам единиц длиной не меньше двух. Это число равно числу способов представить число m в виде суммы k целых слагаемых, каждое из которых не меньше двух, которое, в свою очередь, равно числу способов представить число $m - k$ в виде суммы k целых положительных слагаемых. C_{m-k-1}^{k-1} . Третий множитель — число способов распределить $N - m - s$ нулей по $k + s$ кластерам нулей. Это число равно $C_{N-m-s-1}^{k+s-1}$. Таким образом,

$$D(N, k, m, s) = C_{k+s}^k C_{m-k-1}^{k-1} C_{N-m-s-1}^{k+s-1}. \quad (10)$$

Число элементов множества $M(N, k, m, s)$ связано с числом элементов множества $G(N, k, m, s)$ соотношением

$$B(N, k, m, s) = \frac{N}{k+s} D(N, k, m, s), \quad (11)$$

которое доказывается аналогично тому, как доказывается формула (4) в доказательстве теоремы 2. \square

Из (10) и (11) получаем утверждение теоремы.

Theorem 6. Число состояний, принадлежащих циклам со средней скоростью $v = 1 - \frac{k}{N}$, вычисляется по формуле

$$B^+(N, k) = \sum_{m=2k}^{N-k} \frac{N}{k} C_{m-k-1}^{k-1} C_{N-m-1}^{k-1}.$$

Proof. В соответствии с теоремой 1 состояние удовлетворяет условию теоремы в том и только в том случае, если вектор состояния содержит ровно k кластеров единиц длиной не меньше двух и не содержит кластеров единиц длиной 1. Таким образом,

$$B^+(N, k) = \sum_{m=2k}^{N-k} B(N, k, m, 0), \quad k = 1, \dots, \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor.$$

Отсюда, учитывая теоремы 1 и 5, получаем утверждение теоремы 6. \square

Theorem 7. Число состояний, из которых система попадает в состояния, принадлежащих циклам со средней скоростью $v = 1 - \frac{k}{N}$, вычисляется по формуле

$$B^-(N, k) = \sum_{m=2k}^{N-k} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{N-m-k}{2} \rfloor} \frac{N}{k+s} C_{k+s}^k C_{m-k-1}^{k-1} C_{N-m-s-1}^{k+s-1}.$$

Proof. В соответствии с теоремой 1 состояние удовлетворяет условию теоремы в том и только в том случае, если вектор состояния содержит ровно k кластеров единиц длиной не меньше двух и хотя бы один кластер единиц длиной 1. Следовательно,

$$B^-(N, k) = \sum_{m=2k}^{N-k} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{N-m-k}{2} \rfloor} B(N, k, m, 0), \quad k = 1, \dots, \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor.$$

Отсюда, учитывая теоремы 1 и 5, имеем утверждение теоремы 7. \square

Theorem 8. Число начальных состояний, при которых реализуется цикл со средней скоростью частиц $v = 1 - \frac{k}{N}$, вычисляется по формуле

$$B(N, k) = \sum_{m=2k}^{N-k} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{N-m-k}{2} \rfloor} \frac{N}{k+s} C_{k+s}^k C_{m-k-1}^{k-1} C_{N-m-s-1}^{k+s-1}. \quad (12)$$

Теорема 8 следует из теорем 6 и 7.

Theorem 9. Если каждое состояние выбирается из пространства состояний системы в качестве начального равновероятно, то вероятность того, что установится цикл со скоростью $1 - \frac{k}{N}$, или что то же самое, значение p_k вычисляется по формуле

$$p_k = B(N, k)/2^N, \quad k = 1, \dots, \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor,$$

где $B(N, k)$ вычисляется по формуле (12).

Теорема 9 следует из теоремы 8 с учетом того, что число состояний в пространстве состояний системы равно 2^N .

5 Результаты вычислений

Обозначим через a_k отношение $B^+(N, k)$ к $B(N, k)$, т. е. долю возвратных состояний среди состояний со средней скоростью $1 - \frac{k}{N}$, а через p_k по-прежнему обозначаем вероятность того, что при равновероятном выборе состояния из пространства состояний в качестве начального установится движение со средней скоростью $1 - \frac{k}{N}$, $k = 1, \dots, \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor$. Пусть a — отношение суммарного числа возвратных состояний к числу всех элементов пространства состояний.

В таблице 1 приводятся значения p_k , a_k вычисленные для $2 \leq N \leq 11$ по формулам, полученным в разделах 4, 5.

ТАБЛИЦА 1. Значения p_k , a_k , a при $2 \leq N \leq 11$.

п.п.	N	p_0	p_1	p_2	p_3	a_0	a_1	a_2	a_3	a
1	2	1	-	-	-	1/2	-	-	-	1/2
2	3	5/8	3/8	-	-	2/5	1	-	-	5/8
3	4	1/2	1/2	-	-	1/4	1	-	-	5/8
4	5	3/8	5/8	-	-	1/6	3/4	-	-	17/32
5	6	19/64	21/32	3/64	-	2/19	4/7	1	-	29/64
6	7	15/64	21/32	7/64	-	1/15	5/12	1	-	51/128
7	8	3/16	5/8	3/16	-	1/25	3/10	5/6	-	45/128
8	9	77/512	297/512	135/512	3/512	2/77	7/33	2/3	1	5/16
9	10	31/256	135/256	85/256	5/256	1/62	2/27	35/68	1	277/1024
10	11	25/256	121/256	99/256	11/256	1/100	99/968	77/198	7/8	497/2048

6 Заключение

Рассмотрена динамическая система класса сетей Буслаева, представляющая собой бинарную цепочку контуров с левоприоритетным правилом разрешения конкуренции. Правило, по которому работает система, эквивалентно правилу элементарного клеточного автомата ЕСА 063. Получены формулы для вычисления числа состояния, соответствующих каждому значению из спектра средних скоростей. Формулы позволяют вычислить число состояний, принадлежащих циклам, и число невозвратных состояний, из которых система попадает в состояния цикла с фиксированным значением скорости. Используя эти формулы можно также вычислить вероятность того, что средняя скорость примет заданное значение, при условии, что начальное состояние выбирается из пространства состояний системы равномерно.

References

- [1] K. Nagel, M. Schreckenberg, *A cellular automation models for freeway traffic*, Journal de physique I, **2** (1992), 2221–2229.
- [2] M. Schreckenberg, A. Schadschneider, K. Nagel, N. Ito. *Discrete stochastic models for traffic flow*, Physical Review E, **51:4** (1995), 2939.
- [3] М.Л. Бланк. *Exact analysis of dynamical systems arising in models of traffic flow*, Russian Mathematical Surveys, **55:3** (2000), 562–563.
- [4] V. Belitsky, P.A. Ferrari, *Invariant measures and convergence properties for cellular automaton 184 and related processes*, Journal of Statistical Physics, **118** (2005), 589–623.
- [5] M. Kanai, K. Nishinari, T. Tokihiro, *Exact solution and asymptotic behaviour of the asymmetric simple exclusion process on a ring*, Journal of Physics A: Mathematical and General, **39:29** (2006), 9071.
- [6] M.L. Blank, *Metric properties of discrete time exclusion type processes in continuum*, Journal of Statistical Physics, **140:1** (2010), 170–197.

- [7] S. Wolfram, *Statistical mechanics of cellular automata*, Reviews of Modern Physics, **55**:3 (1983), 601.
- [8] O. Biham, A.A. Middleton, D. Levine, *Self-organization and a dynamical transition in traffic-flow models*, Physical Review A, **46**:10 (1992), R6124.
- [9] N.J. Linesh, R.M. D'Souza, *Periodic states, local effects and coexistence in the BML traffic jam model*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, **387**:24 (2008), 6170–6176.
- [10] T. Austin, I. Benjamini, *For what number must self organization occur in the Biham-Middleton-Levine traffic model from any possible starting configuration?*, (2004), arXiv preprint math/0607759.
- [11] H.R. Moradi, A. Zardadi, Z. Heydarbeygi, *Periodic states, local effects and coexistence in the BML traffic jam model*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, **387**:24 (2008), 6170–6176.
- [12] Zhong-Jun Ding, Rui Jiang, Bing-Hong Wang, *Traffic flow in the Biham–Middleton–Levine model with random update rule*, Physical Review, **E83** (2011), 047101.
- [13] M.V. Yashina, A.G. Tatashev, *Loading conditions for self-organization in the BML model with stochastic direction choice*, Mathematical Methods in the Applied Sciences. First published: 26 August 2024
- [14] V.V. Kozlov, A.P. Buslaev, A.G. Tatashev, *On synergy of totally connected flows on chainmails*, Proceedings of the 13th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Sciences and Engineering, CMMSE 2013, Almeria, Spain, 2013 **3**, 861–874 (2014).
- [15] A.S. Bugaev, A.P. Buslaev, V.V. Kozlov, M.V. Yashina. *Distributed problems of monitoring and modern approaches to traffic modeling*. In 2011 14th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC) (pp. 477-481), IEEE, 2011, October.
- [16] V.V. Kozlov, A.P. Buslaev, A.G. Tatashev, *Monotonic walks on a necklace and a coloured dynamic vector*, International Journal of Computer Mathematics, **92**:9 (2015), 1910–1920.
- [17] A. Tatashev, M. Yashina. *Spectrum of elementary cellular automata and closed chains of contours*. Machines, **7**:2 (2019), 1910–1920.
- [18] А.Г. Таташев, М.В. Яшина. *Оптимальное правило разрешения конкуренции для управляемой бинарной цепочки*, Владикавказский математический журнал, **26**:1 (2024), 142–153.
- [19] О.Л. Бандман. *Метод построения клеточно-автоматных моделей процессов формирования устойчивых структур*, **4(1) (2024), 91–99**.

МАРИНА ВИКТОРОВНА ЯШИНА
 МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИ-
 ВЕРСИТЕТ (МАДИ),
 125319, РОССИЯ, МОСКВА,
 ЛЕНИНГРАДСКИЙ ПРОСПЕКТ, 64
 Email address: m.v.yashina@madi.ru

АЛЕКСАНДР ГЕННАДЬЕВИЧ ТАТАШЕВ
 МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИ-
 ВЕРСИТЕТ (МАДИ),
 125319, РОССИЯ, МОСКВА,
 ЛЕНИНГРАДСКИЙ ПРОСПЕКТ, 64
 Email address: a-tatashev@yandex.ru

РОМАН ВАСИЛЬЕВИЧ СТРЕКАЛОВ
МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИ-
ВЕРСИТЕТ (МАДИ),
125319, Россия, Москва,
ЛЕНИНГРАДСКИЙ ПРОСПЕКТ, 64
Email address: romikstr2002@yandex.ru