Отзыв рецензента

Название работы: Примеры лагранжевых подмногообразий в прямом произведении $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n$
Автор: Н. А. Тюрин

В работе приведено построение интересного нового вида лагранжевых подмногообразий в произведении проективных пространств $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n$.

Идея построения состоит в обобщении известного примера лагранжева подмногообразия в $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, получаемого при помощи кватернионной инволюции. На вещественном языке, если параметризовать точку на сфере единичным вектором $\vec{n}$, то соответствующее подмногообразие можно описать как множество $(\vec{n}, -\vec{n})$. В то же время для обобщений на случай старших n удобно другое описание – как множества пар ортогональных векторов в $\mathbb{C}^2$ (взятых с точностью до известных отождествлений).

Основной сложностью является отсутствие упомянутой инволюции в $\mathbb{CP}^n$ при $n \geq 2$. Действительно, в этом случае существует множество векторов, ортогональных данному, в $\mathbb{C}^{n+1}$. Основное наблюдение состоит в том, что в плоскости $\mathrm{Span}(u, \bar{u})$ вектор, ортогональный u, единствен (с точностью до общего множителя) – в работе он обозначен как $\sigma_q(u)$. Это правда верно только при условии, что $\bar{u}$ не пропорционален u, т.е. $u \in \mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{RP}^n$. Тем самым формулой $u \mapsto (u, \sigma_q(u))$ определено отображение $\mathbb{CP}^n \setminus \mathbb{RP}^n \mapsto \mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n$. Результатом статьи являются следующие утверждения:

- Образ данного отображения допускает естественную гладкую компактификацию. Топологически это S^2-расслоение над $\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(2, n+1)$ (в частности, при $n = 1$ это просто сфера S^2, и мы возвращаемся в исходному примеру).
- Данное подмногообразие лагранжево относительно стандартной симплектической формы (суммы двух форм Фубини-Штуди).

Доказательство лагранжевости опирается на предложенное Д.В.Быковым построение лагранжева вложения многообразия полных флагов в произведение проективных пространств. Дело в том, что данное вложение можно интерпретировать как условие попарной ортональности $n+1$ единичных векторов в $\mathbb{C}^{n+1}$. Если теперь потребовать, чтобы $n-1$ из этих векторов были вещественные, то оставшиеся два либо оба вещественные (неинтересный случай), либо оба лежат в $\mathrm{Span}(u, \bar{u})$, что как раз приводит нас к определению инволюции σ_q.

Отметим также ряд опечаток:

- При определении $\sigma_q(x_i)$ на странице 3 в случае $\mathbb{CP}^n$ не хватает одного сопряжения (иначе это не является корректно определенным отображением проективного пространства):

$$\sigma_q(x_i) = \frac{\sum_{j=0}^{n} \bar{x}_j^2}{\sum_{j=0}^{n} |x_j|^2} x_i - \bar{x}_i \tag{1}$$

- В аннотации следует заменить “lagrangian” на “Lagrangian”, следуя принятой традиции.

- В некоторых местах используются разные обозначения l_p и $l(p)$ для одной и той же прямой.

- На странице 1 в “...для проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$ со стандартной к*эе*леровой формой...”

- В определении ω на странице 2 стоит упомянуть, что I – комплексная структура.

  Заодно можно предложить альтернативное, более элементарное доказательство теоремы о лагранжевости. Дело в том, что инволюция σ_q в данном случае – это композиция комплексного сопряжения и $SU(2)$ вращения матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Утверждение следует из $SU(2)$-инвариантности формы Фубини-Штуди.

- На странице 4 в доказательстве Леммы 1 в формуле после слов “Имеется послойное диагональное вложение”, видимо, пропущен tot в $\mathbb{P}(\tau) \times \mathbb{P}(\tau) \to \mathrm{Gr}(1, n)$.

- В конце стр. 5: “Первые две точки ... эрмитово ортогональны по самому определению S^0” – видимо, имеется в виду $S^0 \cap F^{n+1}$.

Впрочем, эти опечатки не снижают научной ценности работы.

Результаты, как и упомянутые в заключении возможности их дальнейшего обобщения, представляют несомненный интерес. Поэтому я рекомендую данную работу к публикации в журнале «Сибирские Электронные Математические Известия».