Примеры лагранжевых подмногообразий в прямом произведении $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n$

Николай Тюрин
ЛТФ ОИЯИ (Дубна)

Аннотация

В работе представлены новые примеры лагранжевых подмногообразий в прямых произведениях $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n$, не являющихся прямыми произведениями. Метод построения обобщает понятие кватернионной вещественной структуры и использует предложенное Д. Быковым лагранжево вложение многообразия полных флагов F^n в прямое произведение $\mathbb{CP}^{n-1} \times ... \times \mathbb{CP}^{n-1}$, где число копий проективных пространств равно n.

In the paper we present new examples of lagrangian submanifolds in the direct products $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n$, which are not the direct products themselves. The construction method generalizes the notion of quaternion real structure and uses lagrangian embedding of the full flag variety F^n into the direct product $\mathbb{CP}^{n-1} \times ... \times \mathbb{CP}^{n-1}$, where the number of projective space copies equals to n, found by D. Bykov.

Одна из главных задач наших исследований — задача классификации лагранжевых подмногообразий в алгебраических многообразиях. Напомним (см. например [1]), что по самому своему определению всякое компактное алгебраическое многообразие над полем $\mathbb{C}$ обладает положительной поляризацией, порождающей кэлерову метрику ходжева типа, то есть исходная комплексная структура может быть дополнена кэлеровой формой с целочисленным классом когомологий. Рассматривая такую форму как симплектическую, естественно вводится понятие лагранжева условия на подмногообразия половинной размерности.

Задача классификации предполагает разные уровни; в настоящей работе мы рассматриваем вопрос о том, какие топологические типы реализуются лагранжевыми подмногообразиями в данном алгебраическом многообразии. Несмотря на высочайшее развитие алгебраической геометрии как предмета современной математики, рассматриваемый нами вопрос полностью решен только в самых базовых случаях: например, для проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$ со стандартной кэелеровой формой метрики Фубини - Штуди список возможных типов включает в себя только двумерный тор T^2 и вещественную проективную плоскость $\mathbb{RP}^2$. Долгое время только два этих стандартных типа приписывались и случаю проективного пространства любой размерности, пока в работе [2] не появился ряд новых примеров. Если же мы рассмотрим тот же вопрос для прямого произведения $\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2$ двух одинаковых копий той же плоскости, то полный ответ на сегодняшний день неизвестен. Известные типы делятся с одной стороны на приводимые, то есть представляемые в виде $S_1 \times S_2$, где каждый из S_i есть лагранжево подмногообразие в соответствующей компоненте прямого произведения, и неприводимые. Первый случай естественно исчерпывается прямыми произведениями вида $T^4, T^2 \times \mathbb{RP}^2, \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$. Второй как минимум не пуст и реализуется, например, антидиагональю $\bar{\Delta}$, определяемой парами вида $p \times \bar{p} \subset \mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2$, которая очевидным образом диффеоморфна самой проективной плоскости. С другой стороны, в случае прямого произведения лагранжево подмногообразие может представлять не только тривиальный класс гомологий в $H_4(\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2, \mathbb{Z})$, но и нетривиальный — как, например, в случае с антидиагональю $\bar{\Delta}$.

Ниже мы строим новый пример неприводимого лагранжева подмногообразия в прямом произведнии $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n$ двух идентичных копий проективного пространства, снабженных прямой суммой одинаковых кэлеровых форм метрики Фубини - Штуди. Идея конструкции возникла при рассмотрении еще более простого, нежели $n = 2$, случая прямого произведения $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$. Как известно, для проективной прямой $\mathbb{CP}^1$ с фиксированными однородными координатами $[x_0 : x_1]$ имеем два типа антиголоморфных инволюций. Стандартная инволюция дается просто сопряжением $\sigma([x_0 : x_1]) = [\bar{x}_0 : \bar{x}_1]$; кватернионная инволюция имеет вид $\sigma_q([x_0 : x_1]) = [-\bar{x}_1 : \bar{x}_0]$. Последняя отличается от первой отсутствием вещественных точек: геометрически σ_q есть антиподальное отражение на двумерной сфере. Если рассмотреть "кватернионную"антидиагональ

$$\bar{\Delta}_q = \{p \times \sigma_q(p)\} \subset \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1,$$

то это гладкое подмногообразие также оказывается лагранжевым.

Проще всего показать это можно следующим образом. Рассмотрим на $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ линейное расслоение $\mathcal{O}(1,1)$, сечения которого соответствуют однородным полиномам би - степени (1,1) от однородных переменных $[x_0 : x_1], [y_0 : y_1]$, зафиксированных на первой и второй копии проективной прямой соответственно. На дополнении к любому обильному дивизору $D \in |\mathcal{O}(1,1)|$ имеется кэлеров потенциал Ψ_D с полюсом вдоль D (детали см. в [1]): если α_D соответствующее голоморфное сечение, то на дополнении $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \backslash D$

$$\Psi_D = -\ln|\alpha_D|, \qquad \omega = \mathrm{d}I\mathrm{d}\Psi_D.$$

Рассмотрим два дивизора из полного линейного ряда $\mathcal{O}(1,1)$, определяемые так

$$D_0 = \{x_0 y_0 + x_1 y_1 = 0\}, \qquad D_q = \{x_0 y_1 - x_1 y_0 = 0\}.$$

Тогда соответствующие кэлеровы потенциалы имеют вид

$$\Psi_{D_0} = -\ln \frac{|x_0 y_0 + x_1 y_1|^2}{(|x_0|^2 + |x_1|^2)(|y_0|^2 + |y_1|^2)}, \quad \Psi_{D_q} = -\ln \frac{|x_0 y_1 - x_1 y_0|^2}{(|x_0|^2 + |x_1|^2)(|y_0|^2 + |y_1|^2)}.$$

Отсюда видно, что антидиагональ $\bar{\Delta}$ есть критическое множество для Ψ_{D_0} с критическим значением, равным абсолютному минимуму этой функции; и гладкое подмногообразие $\bar{\Delta}_q$ обладает тем же свойством относительно кэлерова потенциала Ψ_{D_q}. Следовательно, оба подмногообразия обязаны быть изотропными, но поскольку размерность каждого равна половине объемлющего алгебраического многообразия, то отсюда вытекает утверждение о их лагранжевости (детали см. в [3]).

Вернемся теперь к прямому произведению $\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2$: стандартная инволюция σ имеется, и по ней определяется антидиагональ $\bar{\Delta}$; кватернионной инволюции не существует, поэтому напрямую определить $\bar{\Delta}_q$ не представляется возможным. Однако можно предложить следующий вариант, напоминающий конструкцию $\bar{\Delta}_q$.

А именно, рассмотрим дополнение $X^0 = \mathbb{CP}^2 \backslash \mathbb{RP}^2$. Для произвольной точки $p \in X^0$ имеем единственную вещественную прямую l_p, проходящую через p. В самом деле, точка p — не вещественная, поэтому вещественная прямая, проходящая через нее, обязана проходит и через сопряженную точку $\bar{p}$, следовательно — определена однозначно. На вещественной прямой l_p имеем точку p', антиподальную p на прямой l_p. Эта точка однозначно определена, не вещественна, и очевидным образом та же конструкция, примененная к p', дает исходную точку p. Отсюда имеем инволюцию

$$\sigma_q : X^0 \to X^0,$$

не продолжимую на все $\mathbb{CP}^2$. Однако эта инволюция определяет открытое подмногообразие $\bar{\Delta}^0_q \subset X^0 \times X^0$ условием

$$\bar{\Delta}^0_q = \{p \times \sigma_q(p) \quad | \quad p \in X^0\}.$$

Рассмотрим $\bar{\Delta}^0_q$ как открытое подмногообразие в полном прямом произведении $\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2$. Тогда можно показать, что это открытое подмногообразие: 1) лагранжево в каждой точке; 2) обладает естественной компактификацией до гладкого компактного подмногообразия в $\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2$. Поскольку условие лагранжевости замкнуто, из пункта 1) следует, что эта компактификация доставляет пример гладкого компактного лагранжева подмногообразия в объемлющем прямом произведении.

Такая конструкция может быть реализована и в более общем случае. Главным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. *Прямое произведение $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n$, снабженное прямой суммой двух одинаковых стандартных кэлеровых форм метрики Фубини - Штуди, допускает гладкое лагранжево вложение многообразия $S = \mathrm{tot}(\mathbb{P}(\tau) \to \mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(1,n))$, где τ есть тавтологическое расслоение, ограничиваемое со всего $\mathrm{Gr}(1,n)$ на вещественную часть грассманиана.*

Доказательство следует схеме, представленной выше. Сначала мы покажем, что в прямом произведении $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n$ имеется открытое подмногообразие $\bar{\Delta}^0_q$, определяемое как и выше следующим свойством.

Зафкисируем на проективном пространстве $\mathbb{CP}^n$ подходящую систему однородных координат $[x_0 : ... : x_n]$, согласованную с фиксированной кэлеровой структурой. Пусть $X^0 = \mathbb{CP}^n \backslash \mathbb{RP}^n$ открытая часть, составленная из невещественных точек (стандартная вещественная структура фиксирована выбором однородных координат). Рассмотрим отображение

$$\sigma_q : X^0 \to X^0, \quad \sigma_q(x_i) = \frac{\sum_{j=0}^n x_j^2}{\sum_{j=0}^n |x_j|^2} x_i - \bar{x}_i,$$

корректно определенное только для невещественных точек: если $[x_0 : ... : x_n]$ фазовым поворотом может быть приведено к вещественности всех x_i, то все $\sigma_q(x_i)$ автоматически обнуляются. Геометрически это соответствие расшифровывается так: точка $p \in X^0$ однозначно определяет единственную вещественную прямую $l_p = \langle p, \bar{p} \rangle$, проходящую через p; на вещественной прямой берем точку p', антиподальную p, и обозначаем ее как $\sigma_q(p)$. Очевидно, что однородные координаты точек $p, \sigma_q(p)$ ортогональны относительно стандартной эрмитовой структуры на пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$, проективизация которого дает наше $\mathbb{CP}^n$.

Отсюда видно, что отображение σ_q является инволюцией на X^0.

В самом деле, точка $\sigma_q(p)$ по построению не может быть вещественной, потому $l(p)$ однозначно определена, а значит и антиподальная точка p однозначно восстанавливается по $\sigma_q(p)$. Более того, по построению для любой $p \in X^0$ расстояние $\mathrm{dist}(p, \sigma_q(p))$ фиксировано: эти точки антиподальны на комплексной прямой, поэтому расстояние равно одному и тому же числу — половине длины экватора $l(p)$.

Далее, рассмотрим открытое подмногообразие

$$\bar{\Delta}_q^0 = \{p \times \sigma_q(p) \quad | \quad p \in X^0\} \subset \mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n.$$

Заметим, что по определению открытое подмногообразие $\bar{\Delta}_q^0$ не имеет общих точек с диагональю $\Delta = \{p \times p\} \subset \mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n$. Имеется следующая

Лемма 1. *Открытое подмногообразие $\bar{\Delta}_q^0 \subset \mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n$ естественным образом компактифицируется до гладкого подмногообразия.*

Исключим из прямого произведения $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n$ диагональ Δ и воспользуемся бирегулярным изоморфизмом

$$f : (\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n) \backslash \Delta \equiv \mathrm{tot}(\mathbb{P}(\tau) \times \mathbb{P}(\tau) \to \mathrm{Gr}(1, n)) \backslash D_d,$$

где $\mathrm{Gr}(1, n)$ — грассманиан прямых в $\mathbb{CP}^n$, τ — тавтологическое расслоение, а дивизор D_d определяется следующим образом. Имеется послойно диагональное вложение

$$\delta : \mathrm{tot}(\mathbb{P}(\tau) \to \mathrm{Gr}(1, n)) \hookrightarrow \mathbb{P}(\tau) \times \mathbb{P}(\tau) \to \mathrm{Gr}(1, n),$$

задаваемое как $\delta(p \to [l]) = (p \times p \to [l])$, где $p \in l$ — точка на прямой l; дивизор D_d есть образ этого вложения.

Отображение f абсолютно естественно: две различные точки $p, p' \in \mathbb{CP}^n$ однозначно определяют прямую $\langle p, p' \rangle$ и соответствующий ей элемент в $\mathrm{Gr}(1, n)$; в соответствующем слое $\mathbb{P}(\tau)([\langle p, p' \rangle])$ выделены два элемента, соответствующие p и p', упорядоченные и различные, откуда имеем точку в открытом многообразии $\mathrm{tot}(\mathbb{P}(\tau) \times \mathbb{P}(\tau) \to \mathrm{Gr}(1, n)) \backslash D_d$. В обратную сторону действие f очевидно.

Далее, поскольку $\bar{\Delta}_q^0$ не имеет общих точек с Δ, рассмотрим образ $N^0 = f(\bar{\Delta}_q^0)$. Он может быть естественно описан во внутренних терминах тавтологического расслоения и грассманиана $\mathrm{Gr}(1, n)$. А именно, так как прямые $l(p)$ всегда вещественны, то выделим вещественную часть $\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(1, n) \subset \mathrm{Gr}(1, n)$. Над каждой точкой $[l] \in \mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(1, n)$ в слое $\mathbb{P}(\tau) \equiv l$ имеем атниподальную инволюцию, поэтому в тотальном пространстве $\mathrm{tot}(\mathbb{P}(\tau) \times \mathbb{P}(\tau) \to \mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(1, n))$ имеется гладкое подмногообразие, слой которого изоморфен $\mathbb{P}(\tau)$ и составлен из пар антиподальных точек на l. Исключая все пары вещественных антиподальных точек над каждым слоем, получаем в точности образ $f(\bar{\Delta}_q^0) = N^0$. Но это открытое подмногообразие обладает естественной гладкой компактификацией N, являющейся тотальным пространства расслоения над $\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(1, n)$, со слоем, составленным из пар антиподальных точек

— вне зависимости от того, вещественные они или нет. Прообраз $f^{-1}(N)$ есть гладкое многообразие в $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n$, являющееся компактификацией открытого подмногообразия $\bar{\Delta}_q^0$.

Обозначим такое подмногообразие как $\bar{\Delta}_q$. По построению его топологический тип есть S^2 - расслоение над $\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(1,n)$, изоморное ограничению на вещественный грассманиан проективизации тавтологического расслоения $\tau \to \mathrm{Gr}(1,n)$. Этим завершается доказательство Леммы 1.

Теперь обсудим свойства открытого подмногообразия $\bar{\Delta}_q^0 \subset \mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n$ относительно симплектической структуры, зафиксированной на прямом произведении проективных пространств.

Лемма 2. *Подмногообразие $\bar{\Delta}_q^0$ является лагранжевым.*

Для доказательства Леммы 2 воспользуемся следующей замечательной конструкцией лагранжева вложения многообразия полных флагов в $\mathbb{C}^{n+1}$ в прямое произведение $Y = \mathbb{CP}^n \times ...\mathbb{CP}^n$, составленное из $n+1$ копии одного и того же проективного пространства $\mathbb{CP}^n$ с фиксированной стандартной кэлеровой формой ω_{FS}, предложенное в работе [4] (см. также [5]). Так как полное многообразие флагов в $\mathbb{C}^{n+1}$ представлется как однородное пространство

$$F^{n+1} = \frac{U(n+1)}{U(1) \times ... \times U(1)},$$

где число копий $U(1)$ равно $n+1$, то любой элемент F^{n+1} представляется унитарной матрицей A, каждый столбец которой факторизуется по модулю $U(1)$, — следовательно задает точку в проективном пространстве $\mathbb{CP}^n$. Всего столбцов $n+1$, что и задает вложение $F^{n+1} \hookrightarrow Y$; оказывается, что образ вложение лагранжев в Y (детали см. в [4]).

Поскольку матрица A, составленная из столбцов однородных координат каждого из $\mathbb{CP}^n$, унитарна, то для любой точки $F^{n+1} \subset Y$ любая пара столбцов однородных координат эрмитово ортогональна.

В прямом произведении Y, снабженном кэлеровой формой Ω, являющейся прямой суммой одной и той же формы ω_{FS}, рассмотрим пересечение следующих двух подмногообразий. Рассмотрим открытое подмногообразие $S^0 \subset Y$, определяемое как

$$S^0 = (\mathbb{CP}^n \backslash \mathbb{RP}^n) \times (\mathbb{CP}^n \backslash \mathbb{RP}^n) \times \mathbb{RP}^n \times ... \times \mathbb{RP}^n \subset Y;$$

геометрически это означает, что мы из первых двух компонент прямого произведения Y выбрасываем $\mathbb{RP}^n$, а во всех последующих $n-1$ компоненте наоборот выбираем только вещественные части. Тогда пересечение $S^0 \cap F^{n+1} \subset Y$ обладает следующим замечательным свойством: при забывающем все копоненты прямого произведения $Y = \mathbb{CP}^n \times ... \times \mathbb{CP}^n$, начиная с третьей, отображении

$$\pi : Y \to \mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n$$

имеем $\pi(S^0 \cap F^{n+1}) = \bar{\Delta}_q^0$. Более того, ограничение f на $S^0 \cap F^{n+1}$ устанавливает изоморфизм этого пересечения и образа $\bar{\Delta}_q^0$. В самом деле, каждая точка в пересечении $S^0 \cap F^{n+1}$ представляется набором точек в проективных пространствах $\mathbb{CP}^n$, координаты которых попарно эрмитово ортогональны. Первые две точки из любого набора обязаны быть невещественны и эрмитово ортогональны по самому определению S^0, поэтому в образе обязаны лежать пары $p \times p'$, обладающие тем же свойством. Однако для пары фиксированных эрмитово ортогональных точек $p, p' \in \mathbb{CP}^n \backslash \mathbb{RP}^n$ из образа должно выполняться еще одно условие: в $\mathbb{CP}^n$ обязана существовать вещественная прямая, содержащая обе эти точки. Возьмем компоненты точек из S^0 начиная с третьей и запишем условие эрмитовой ортогональности с p или p'. Всего получим $n-1$ линейное уравнение на координаты p или p', все коэффициенты которых могут быть выбраны вещественными. Поскольку матрица A унитарна, система не может быть вырожденной, откуда получаем необходимость существование вещественной прямой, на которой обязаны лежать и p, и p'. Но это и есть в точности условия, по которым мы строили открытое подмногообразие $\bar{\Delta}_q^0 \subset \mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n$.

Таким образом, $S^0 \cap F^{n+1}$ в точности изоморфно $\bar{\Delta}_q^0$, и проекция π при ограничении на $S^0 \cap F^{n+1}$ доставляет необходимый изоморфизм.

Для доказательства Леммы 2 теперь остается заметить, что $\Omega|_{S^0} = \pi^*(\omega_{FS} \oplus \omega_{FS})$ и что вследствие лагранжевости F^{n+1} пересечние $S^0 \cap F^{n+1}$ обязано быть изотропным. Отсюда следует, что $\bar{\Delta}_q^0$ обязано быть изотропным, по поскольку это подмногообразие половинной размерности, то оно является лагранжевым, что завершает доказательство Леммы 2.

Поскольку условие лагранжевости является замкнутым, то если открытая часть $\bar{\Delta}_q^0$ гладкого подмногообразия $\bar{\Delta}_q \subset \mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n$ лагранжева, то это же верно и для всего подмногообразия. Это завершает доказательство нашей основной **Теоремы**.

Пример. Для упомянутого в начале работы случая $\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2$ наша теорема удостоверяет в том, что в этом прямом произведении имеется лагранжево вложение многообразия, представляемого S^2 - расслоением над вещественной проективной плоскостью $\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(1,2) = \mathbb{RP}^2$. Это расслоение топологически нетривиально: в данном случае $\mathbb{P}(\tau) \to \mathrm{Gr}(1,2)$ есть $\mathbb{P}(T\mathbb{CP}^2) \to \mathbb{CP}^2$, таким образом наше лагранжево подмногообразие имеет вид

$$\mathrm{tot}(\mathbb{P}(T\mathbb{RP}^2 \otimes \mathbb{C}) \to \mathbb{RP}^2).$$

Очевидна его неприводимость; также нетрудно установить его гомологическую нетривиальность в $H_4(\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2, \mathbb{Z})$: по построению подмногообразие $\bar{\Delta}_q$ пересекается с подмногообразием $p \times \mathbb{CP}^2$ ровно в одной точке $p' = \sigma_q(p)$ для общей точки p, поскольку невещественность является общим условием в данном случае. Поскольку $p \times \mathbb{CP}^2$ как и $\mathbb{CP}^2 \times p$ представляют образующие $H_4(\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2, \mathbb{Z})$, отсюда видна гомологическая нетривиальность.

В доказательстве **Теоремы** мы воспользовались гладким подмногообразием $N \subset \mathrm{tot}(\mathbb{P}(\tau) \times \mathbb{P}(\tau) \to \mathrm{Gr}(1,n)$, не обсуждая его свойств. Но естественным вопросом является следующий — а само оно лагранжево? Для корректности вопрос должен быть конкретизирован тем, какая симплектическая форма рассматривается на последнем многообразии. Естественным является выбор следующей формы. Рассмотрим естественное вложение

$$\Psi : \mathrm{tot}(\mathbb{P}(\tau) \times \mathbb{P}(\tau) \to \mathrm{Gr}(1,n)) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(1,n) \times \mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^n$$

(см. [1]). Тогда выбор стандартной формы на второй и третьей компоненте вместе со стандартной формой на $\mathrm{Gr}(1,n)$, индуцируемой вложением Плюккера, определяет естественную форму Ω_{Pl} на всем прямом произведении и, следовательно, форму $\Psi^*\Omega_{Pl}$ на исходном тотальном пространстве.

Тогда имеется

Следствие. *Подмногообразие* $N \subset \mathrm{tot}(\mathbb{P}(\tau)\times\mathbb{P}(\tau) \to \mathrm{Gr}(1,n))$ *является лагранжевым относительно формы* $\Psi^*\Omega_{Pl}$.

В самом деле, в прямом произведении $\mathrm{Gr}(1,n)\times\mathbb{CP}^n\times\mathbb{CP}^n$ имеется частично приводимое лагранжево подмногообразие $\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(1,n)\times\bar{\Delta}_q$, что было доказано нами в нашей основной **Теореме**. Отсюда следует, что его пересечение с любым комплексным подмногообразием является изотропным. Это верно в том числе и для комплексного подмногообразия $\Psi(\mathrm{tot}(\mathbb{P}(\tau)\times\mathbb{P}(\tau) \to \mathrm{Gr}(1,n)))$. Но нетрудно видеть, что такое пересечение есть в точности $\Psi(N)$, откуда немедленно следует лагранжевость N относительно формы $\Psi^*\Omega_{Pl}$, что и требовалось доказать.

В заключение очертим круг дальнейших задач, которые естественно вытекают из наших рассмотрений. Прежде всего поскольку мы существенно использовали конструкцию Быкова из [4], то естественно задать вопрос о том, что является возможным обобщением этой конструкции. Доказанное нами **Следствие** отчасти является таковым, но в большей степени оно подсказывает возможное направление. А именно, рассмотрим комплексный грассманиан $\mathrm{Gr}(r,n)$. Тавтологическое расслоение $\tau \to \mathrm{Gr}(r,n)$ имеет ранг $r+1$, поэтому тотальное пространство прямой суммы $r+1$ копии $\mathbb{P}(\tau)$ над каждой точкой $p \in \mathrm{Gr}(r,n)$ имеет лагранжево подмногообразие — полное многообразие флагов в $\tau(p)$, которое естественно обозначить как $F^{r+1}(p)$. Если теперь на базе выделить вещественную часть $\mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(r,n)$, то тотальное пространство расслоения $F \to \mathrm{Gr}_{\mathbb{R}}(r,n)$ со слоем $F^{r+1}(p), p \in Gr_{\mathbb{R}}(r,n)$, составляет подмногообразие половинной размерности в объемлющем алгебраическом многообразии. Является ли оно лагранжевым? Случай $r=n$ совпадает с оригинальным результатом Д. Быкова; как мы установили в **Следствии** это верно и для $r=1$. Остается ли это верным и для произвольного $r<n$? Если да, то на наш взгляд это было бы естественным обобщением лагранжева вложения полного многообразия флагов, построенного в [4].

Литература:

[1] P. Griffits, J. Harris, "Principles of algebraic geometry NY Wiley, 1978;

[2] А.Е. Миронов, "О новых примерах гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{CP}^n$ Мат. сборник т. 195, номер 1 (2004), стр. 89-102;

[3] K. Cieliebak, Ya. Eliashberg, *From Stein to Weinstein and back - symplectic geometry of affine complex geometry*, Colloq. Publ., 59, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012;

[4] D. Bykov, *Haldane limits via Lagrangian embeddings*, Nuclear Phys. B, 855 (2012), pp. 100 - 127

[5] D. Bykov, A. Kuzovchikov, *The classical and quantum particle on a flag manifold*, Classical and Quantum Gravity, 41: 20 (2024).

References:

[1] P. Griffits, J. Harris, "Principles of algebraic geometry NY Wiley, 1978;

[2] A.E. Mironov, "New examples of Hamilton - minimal Lagrangian manifolds in $\mathbb{C}^n$ and $\mathbb{CP}^n$ Sb. Math., 195: 1 (2004), pp 85-96;

[3] K. Cieliebak, Ya. Eliashberg, *From Stein to Weinstein and back - symplectic geometry of affine complex geometry*, Colloq. Publ., 59, Amer. Math. Soc.,

Providence, RI, 2012;
[4] D. Bykov, *Haldane limits via Lagrangian embeddings*, Nuclear Phys. B, 855 (2012), pp. 100 - 127
[5] D. Bykov, A. Kuzovchikov, *The classical and quantum particle on a flag manifold*, Classical and Quantum Gravity, 41: 20 (2024).