УДК 514.77
MSC 53A05, 01A70

О ЮРИИ ФЕДОРОВИЧЕ БОРИСОВЕ И ЕГО ПУБЛИКАЦИЯХ

В. Н. БЕРЕСТОВСКИЙ

Abstract. In the paper is given a survey of publications by Yu.F. Borisov. Also we pressent some information and results on two-dimensional manifolds of bounded curvature in the sense of A.D. Alexandrov, metric foundations of Riemannian geometry, and Busemann spaces, connected by the subject with publications and problems of Borisov. At the end, we cite some reminiscences of A.D. Alexandrov, Yu.F. Borisov, N.V. Efimov, Yu.G. Reshetnyak.

Key words: isometric embedding, immersion, relativistic kinematics, surface with parallel translation of vectors, two-dimensional manifold of bounded curvature

1. Введение

15 июня 2025 года исполнится 100 лет со дня рождения в Ленинграде Юрия Федоровича Борисова (1925–2007). Он характеризован в некрологе [94], [95] как “замечательный русский геометр, доктор физико-математический наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН”. Там же говорится о том, что основные научные достижения Юрия Федоровича относятся к кругу идей, введенных в геометрию его великим учителем — академиком Александром Даниловичем Александровым. Особо отметим важные результаты Ю.Ф. Борисова в теории двумерных многообразий ограниченной кривизны, поверхностей с параллельным переносов векторов, $C^{1,\alpha}$-изометрических погружений и вложений поверхностей и аксиоматическом построении теории относительности (хроногеометрии).

Кроме того, он редактировал сборник и публиковал статьи, посвященные методологическим и философским проблемам математики [62], [63].

Ю.Ф. Борисов окончил математико-механический факультет Ленинградского университета в 1948 году, защитил кандидатскую диссертацию [47] в 1950 г. и докторскую [48] в 1962 г. В 1964 г. Юрий Федорович переехал в Новосибирск и с тех пор и до последних дней работал в Институте математики и преподавал в НГУ, где был одим из лучших лекторов механико-математического факультета. Приведем как пример его курс лекций [61] и опубликованные позже записи некоторых лекций [42], [43] спецкурса 1968 г. по римановой геометрии.

Восемь аспирантов Юрия Федоровича Борисова защитили кандидатские диссертации: Русиешвили Г.И. (1957), Дуткевич Ю.Г. (1964), Франгулов С.А. (1971), Берестовский В.Н. (1979), Усов В.В. (1980), Исанов Т.Г. (1980), Шефель Г.С. (1986), Подоксенов М.Н. (1989).

The work was carried out within the framework of the State Contract to the IM SB RAS, project FWNF-2022-0006.

Основу этой статьи составил текст моего доклада 7 сентября 2015 г. в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, посвященного 90-летию со дня рождения Юрия Федоровича Борисова. Я смог сказать тогда лишь о некоторых основных результатах Юрия Федоровича и поставленных им задачах. В докладе я выразил надежду, что мой доклад будет дополнен воспоминаниями коллег и учеников о "трудах и днях" Юрия Федоровича.

В том числе тогда и после я старался собрать возможно более полный список его публикаций, опустив его публикации с более чем одним соавтором, связанные с юбилеями и некрологами известных математиков. Большую помощь в этом мне оказала в 2024 г. зав. библиотекой ИМ им. С.Л. Соболева СО РАН Ирина Николаевна Соколова. Некоторые дополнительные источники и нужную информацию я извлек из книг и журналов моей личной библиотеки. Но я вспомнил недавно, что в каком-то выписанном моим братом Александром (позже инженером-энергетиком) журнале "Знание-сила" в далекие 1970 гг. я читал в доме моих родителей статью Ю.Ф. Борисова о $C^{1,\alpha}$-поверхностях. Но я не помнил больше ничего об этой статье. Лишь благодаря помощи сотрудников ГПНТБ СО РАН, в том числе библиографа 1 кат. Анны Андреевны Туголуковой и библиотекаря Нины Сергеевны Кривцовой, я узнал выходные данные этой статьи и получил саму статью [64]. Статья вышла точно в месяц, когда я получил диплом об окончании механико-математического факультета НГУ. Эта научно-популярная статья прояснила мне многое о Ю.Ф.

Помимо публикаций Ю.Ф. Борисова, в статье упоминаются, приводятся или обсуждаются тематически связанные с его исследованиями понятия, результаты, статьи, книги, воспоминания геометров и обзорный доклад А.Д. Александрова [4] на Международном математическом конгрессе 1958 г. в Эдинбурге.

Источники в списке литературы расположены в основном в алфавитном и хронологическом порядке. Кроме того, порядок ссылок на Ю.Ф. Борисова следующий: 1) статьи в математических журналах [21] – [46], 2) авторефераты диссертаций [47], [48], 3) тезисы и труды конференций, симпозиумов, съездов, международного математического конгресса 1966 года в Москве [49]–[57], 4) задачи [58], 5) два текста в книге А.Д. Александрова "Выпуклые многогранники" [59], [60], 6) лекции [61], 7) редактирование и статья в методологическом сборнике [62], [63], 8) статьи в журнале и газетах [64]–[68], 9) воспоминания [69].

Заметим, что "гладкий" в текстах Ю.Ф.Борисова означает принадлежность классу C^1, а сейчас, например, "гладкое многообразие" или "риманово пространство" обычно означают C^∞-многообразие и риманово пространство класса C^∞.

Ввиду специального характера статьи я решил, что для основного текста статьи лучше применить русский язык.

Предполагалась статья объемом не более 30 страниц, но получилось 32. Потом решил, что это замечательно, так как 32 в двоичной записи — это же 100000, да еще сто (100 в десятичной системе) источников в списке литературы.

2. Публикации Ю.Ф. Борисова о двумерных МОК с краем

Работы Ю.Ф.Борисова [21]–[23], [30], его кандидатская диссертация [47], тезисы [54] и лекция [56] посвящены *полным двумерным многообразиям ограниченной кривизны (МОК) с краем*, включая и полные МОК без края.

Эквивалентные определения МОК даны в начале раздела 9.

Заметим, что [21] и [22] — первые статьи о МОК после статей А.Д.Александрова. При этом заметка [21] представлена академиком В.И. Смирновым 9 ноября 1948, в год публикации первых двух статей [1], [2] А.Д. Александрова о МОК.

В заметке [21] рассматриваются некоторые теоремы о кратчайших на МОК с краем, а также приложение этих теорем для обобщения на рассматриваемые многообразия с краем некоторых результатов С.Э. Кон-Фоссена [74], полученных для двумерных многообразий с римановой метрикой.

В теореме 1 из п. 1 "Угол" для двух кратчайших, исходящих из общей точки, доказывается существование угла между ними и двух "углов секторов".

В п. 2 формулируются теоремы 2 и 3 о повороте кратчайшей. Первая из них:

Теорема 1. *Всякая кратчайшая, имеющая полуокрестность, ограниченную геодезической ломаной, имеет со стороны этой полуокрестности конечный неположительный поворот.*

П. 3 включает теорему 4 о существовании кратчайших, имеющих с краем многообразия лишь одну общую точку. Для этой теоремы необходимо условие ограниченности кривизны "внутренности" многообразия. Такие кратчайшие играют существенную роль в построениях из статьи [21].

В теоремах 5 и 6 соответственно из п. 4 устанавливается связь кривизны с поворотом для геодезического многоугольника и с помощью общей теоремы А.Д.Александрова об углах треугольника в компактном метрическом пространстве с внутренней метрикой дается сравнение углов геодезического треугольника в многообразии с углами плоского треугольника со сторонами той же длины.

Теоремы 3 и 6 позволяют установить в теореме 7 из п. 5 "вариацию длины $l(s)$ кратчайшей" при смещении ее концов вдоль края многообразия в связи с углами, которые кратчайшая образует с краем; согласно поправке в [22], "правую производную" $l'(s)$ в теореме 7 нужно взять с противоположным знаком.

Приводимые в п. 6 теоремы 8–13 представляют собой перенесение теорем Кон-Фоссена на рассматриваемые многообразия с краем. Их доказательства основаны на теореме 7 и проводятся в основном так же, как у С.Э. Кон-Фоссена. Теоремы 8, 9, 10, 11 аналогичны соответственно теоремам 1, 2, 3, 4 из [74].

Теоремы 12 и 13 не имеют прямой аналогии с теоремами из [74].

В теореме 12 рассматриваются МОК с краем, получающиеся пополнением выпуклых областей в МОК при условии, что область гомеоморфна бесконечному куску плоскости и всякое содержащееся в ней множество имеет неотрицательную кривизну. Если такое МОК не гомеоморфно плоскости, то оно может быть лишь следующее: 1) гомеоморфно полуплоскости; 2) изометрично области на поверхности бесконечного цилиндра, ограниченной простой замнутой кривой; 3) изометрично плоской полосе между двумя параллельными прямыми.

В теореме 13 утверждается существование специальной геодезической петли, охватывающей произвольное ограниченное множество M, в полном МОК $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{M}$ гомеоморфно плоскости и его кривизна $\omega(\mathfrak{M}) \leq \pi$.

Статья [22] включает теоремы о "разрезывании и склеивании" МОК с краем.

В теоремах 1, 2 п. 1 при некоторых условиях устанавливается эквиваленность существований угла между кривыми L_1 и L_2 в точке $O \in L_1, L_2$ и (равного ему) предела углов между кратчайшими $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, $X \in L_1$, $Y \in L_2$ при $X, Y \to O$.

В п. 2 определяется *односторонний угол между кривыми* L_1, L_2 *со стороны ограниченного ими сектора*, если выполнено одно из двух условий. Приводятся

Теорема 2. *(3) Если существует угол сектора, ограниченного кривыми* L_1, L_2, *то односторонний угол между* L_1, L_2 *существует и равен углу этого сектора.*

Теорема 3. *(4) Если кривая имеет поворот ограниченной вариации, то она в каждой точке имеет направление, т.е. образует нулевой угол с самой собой.*

В п. 3 замкнутое подмножество E в МОК с краем F называется *куском многообразия* F, если определяемая индуцированной внутренней метрикой ρ_E на E топология на E совпадает с индуцированной из F топологией на E.

Теорема 4. *(5) Для всякой спрямляемой кривой* L *в МОК, имеющей полуокрестность* U_L, *существует последовательность геодезических ломаных* $R_n \subset U_L$, $R_n \to L$, *длины которых сходятся к длине* L.

Теорема 5. *(6) Пусть кривые* L_1, L_2, *входящие в границу куска* E *многообразия* F, *ограничивают сектор* $U \subset E \subset F$ *и пусть между* L_1, L_2 *существует односторонний угол со стороны* U, *равный* α. *Тогда односторонний угол между* L_1, L_2 *в куске* E *существует и равен* α.

Основываясь на последней теореме, легко получить необходимое условие изометричности многообразия с краем куску в МОК (теорема 7); опустим её.

Теорема 6. *(8) Пусть кривая* L, *входящая в границу куска* E *многообразия* F, *имеет поворот* φ *со стороны полуокрестности, содержащейся в* E. *Тогда поворот кривой* L, *измеренный в* E, *существует и равен* φ.

В п. 4 рассматривается *склеивание МОК из нескольких многообразий с краем.* В теореме 9 приведены необходимые и достаточные условия для этого. Из теоремы 9 легко выводится следующая теорема 10 о склеивании.

Теорема 7. *(10) Если каждое из многообразий с краем ограничено кривой с поворотом ограниченной вариации, то для их склеиваемости (в МОК) необходимо и достаточно, чтобы длины отождествляемых дуг были равны.*

Теорема 11 — видоизменение теоремы 9 для склеивания МОК с метрикой положительной кривизны. Из теоремы 11 легко вытекает теорема 12, дающая необходимые условия для того, чтобы многообразие с краем было изометрично замкнутой области на бесконечной выпуклой поверхности.

Для статьи [23] ограничимся цитированием ее первого абзаца без кавычек.

Рассматриваются геометрические свойства полуокрестности кривой в МОК. Основной результат состоит в том, что “в бесконечно малом” геометрия полуокрестности кривой такая же, как для плоской кривой, у которой поворот задается той же самой функцией длины. В частности, это относится к выражениям для вариации длины и площади. В применении к изопериметрической задаче это дает результат, вполне аналогичный известному для регулярных поверхностей. Представляется интересным тот факт, что в случае, когда ни одна кривая с поворотом ограниченной вариации не может иметь отрицательной кривизны, нерегулярность метрики вообще не влияет на результат, а именно, замкнутая кривая, ограничивающая при заданной длине наибольшую площадь, имеет в точности постоянную геодезическую кривизну (в общем случае это не имеет места, что обнаруживается на примере). Доказательства основаны на введении в полуокрестности кривой некоторого аналога полугеодезических координат.

В статье [30] изучаются свойства достаточно узкой полуокрестности простой дуги с ограниченной вариацией поворота на двумерном МОК. Основным результатом, анонсированным в заметке [23], является установление формулы для вариации длины дуги в такой полуокрестности (теорема 4 пар. 3).

Теорема 8. *(1). Пусть L — простая дуга с ограниченной вариацией поворота, U_L — ее полуокрестность, ограниченная дугами L_A, L_B, исходящими из концов A, B дуги L и образующими с L углы α, β, $0 < \alpha < \frac{\theta(A)}{2}$, $0 < \beta < \frac{\theta(B)}{2}$. Существует такое $\delta > 0$, что для любого $n \leq \delta$ часть эквидистанты $L(n)$ дуги L, содержащаяся в U_L, есть простая дуга с концами на L_A, L_B, имеющая поворот ограниченной вариации.*

Здесь $\theta(A)$, $\theta(B)$ — полные углы вокруг точек A, B.

Предполагается, что $\theta(X) > 0$ во всех точках $X \in \overline{L}$.

Теорема 9. *(2). Пусть L — дуга с ограниченной вариацией поворота, L' — достаточно близкая к L эквидистанта, ограничивающая совместно с L и кратчайшими l_A, l_B, исходящими из концов A, B дуги L, гомеоморфную кругу область G. Пусть, далее, α, β — углы между L и кратчайшими l_A, l_B со стороны G; $\tilde{\alpha} = \max\{\alpha - \frac{\pi}{2}, 0\}$, $\tilde{\beta} = \max\{\beta - \frac{\pi}{2}, 0\}$; $\sigma(L)$, $\sigma(L')$ — вариации поворотов L, L' со стороны G. Тогда при условиях $0 < \alpha < \pi - \frac{\theta(A)}{2}$, $0 < \beta < \frac{\theta(B)}{2}$ справедлива оценка*

$$\sigma(L') \leq \sigma(L) + \Omega(G) + \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}.$$

Теорема 10. *(3). Пусть $n > 0$ достаточно мало и относительно эквидистанты $L(n)$ справедливо утверждение теоремы (1). Если $G(n)$— гомеоморфная кругу область, ограниченная дугами L, $\widehat{A(n)B(n)} \subset L(n)$, $\widehat{AA(n)} \subset L_A$, $\widehat{BB(n)} \subset L_B$, то через каждую точку $M \in G(n)$ проходит эквидистанта $L(n_1)$, $n_1 < n$, для которой также справедливо утверждение теоремы (1).*

В пар. 2 вводятся так называемые *эквидистантные координаты* (n, t), вводимые в полуокрестности дуги L, где n — расстояние от точки до L. Координата t, $0 \leq t \leq 1$, вводится более произвольным и достаточно сложным образом.

Пусть $\tau(\widehat{XY})$ — поворот дуги $\widehat{XY} \subset L$ со стороны области $G(n_1)$, в которой введены координаты (n, t), $\tau(X)$ — поворот L в точке $X \in L$ со стороны $G(n_1)$. Обозначая через N_t точку дуги L с параметром t, определим функцию $g(t)$:

$$g(t) = -\tau(\widehat{AN_t}) + \sum_{\tau(P_i)>0} \tau(P_i) - \sum_{\tau(P_i)>0} 2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\tau(P_i)}{2}\right).$$

Здесь $\widehat{AN_t} \subset L$; $P_i \in \widehat{AN_t}$; суммирование ведется по всем точкам $P_i \in \widehat{AN_t}$, для которых $\tau(P_i) > 0$ (множество всех таких точек не более чем счетно). По определению, $g(0) = 0$. Очевидно, функция $g(t)$, $0 \le t \le 1$, имеет ограниченную вариацию. Введем еще функцию $f(\theta)$, определенную при $\theta > 0$ равенством

$$f(\theta) = \begin{cases} -\mathrm{ctg}\,\theta, & \theta \le \pi/2; \\ \pi/2 - \theta, & \theta > \pi/2. \end{cases}$$

Теорема 11. *(4). Пусть функция $n = n(t)$, $0 \le t \le 1$, неотрицательна, удовлетворяет условию Липшица и $\max n(t) \le n_1$. Если K_λ — дуга в $G(n_1)$, заданная в эквидистантных координатах уравнением $n = \lambda n(t)$, $0 \le \lambda < 1$, то при всех достаточно малых λ дуга K_λ имеет конечную длину $s(\lambda)$ и справедлива формула*

$$\frac{ds}{d\lambda}|_{\lambda=0} = \int_0^1 n(t)dg(t) + n(0)f(\alpha) + n(1)f(\beta),$$

где α, β имеют тот же смысл, что и в теореме (1).

В заключение статьи [30] формулируется теорема (5); мы её опустим.

3. Поверхности с параллельным переносом векторов

Название этого раздела — копия названия отдельного, посвященного результатам Ю.Ф. Борисова, 7-го раздела из очень ёмкого обзорного доклада А.Д. Александрова [4] на Международном математическом конгрессе 1958 г. в Эдинбурге.

В общей части доклада говорится: Несколько отличный (от многообразий ограниченной кривизны и поверхностей ограниченной внешней кривизны) и в некоторых случаях даже более общий подход к теории поверхностей может быть основан на понятии пааллельного переноса, которое связано с понятием кривизны вследствие известной теоремы Гаусса – Боннэ. Параллельный перенос вектора вдоль кривой может быть определен как внутренним, так и внешним образом посредством построения Леви-Чивиты. При следовании этому направлению идей объектом теории являются метрические многообразия и поверхности, на которых для достаточно обширного множества кривых определен параллельный перенос вектора. Такие поверхности изучены Ю.Ф. Борисовым.

В пар. 7.1 доклада описываются два внешних (данных далее) определения параллельного переноса вектора вдоль линии L с концами A, B на поверхности $F \in C^1$, фактически формулируется теорема 13 и, как её следствие, несовпадение в общем случае результатов двух конструкций параллельных переносов.

В пар. 7.2 говорится о том, что Ю.Ф. Борисов доказывает далее (в [25], III, при соблюдении для поверхностей условий из [25], II), что параллельный перенос имеет внутренний смысл. Его внутреннее определение может быть дано для этих поверхностей следующим образом: *вектор $\overline{a}$ переносится параллельно по геодезической, т.е. локально кратчайшей линии, если длина вектора и угол между вектором и линией остаются неизменными.* Внутренний параллельный перенос определен для любой спрямляемой кривой при помощи паалельного переноса вдоль вписанных геодезических ломаных с естественным переходом к пределу и эквивалентен внешнему параллельному переносу.

Результаты, полученные Ю.Ф.Борисовым, являются далеко не простыми, так как вначале нужно дать внутреннее, не зависящее от системы координат, чисто метрическое определение вектора (основанное на понятии направления) на поверхности и угла между вектором и кратчайшей.

В работах [24] –[26], [31] Ю.Ф.Борисов изучал нерегулярные C^1-поверхности в $\mathbb{R}^3$, возможно не удовлетворяющие условию ограниченности внешней кривизны, и гельдеровы кривые в римановых пространствах, допускающие введение параллельного переноса. Часть результатов изложена в тезисах [49], [50].

Известно, что геодезическая на поверхности $F \in C^2$ есть кривая, у которой главная нормаль в каждой точке совпадает с нормалью к F. Аналитическое выражение этого свойства дает дифференциальное уравнение геодезических. Если же только $F \in C^1$, уравнение геодезических теряет смысл. Однако высказанное внешне-геометрическое свойство геодезических в некотором смысле сохраняется и для $F \in C^1$, если *под геодезической понимать локально кратчайшую.* В [24] геодезические на $F \subset \mathbb{R}^3$ строятся как *пределы нормальных ломаных.*

Ломаная $M_0M_2 \dots M_{n+1}$, где $M_i \in F$, $i = 1, \dots n+1$; называется нормальной, если для каждого $i = 1, \dots, n$ плоскость $P_i = M_{i-1}M_iM_{i+1}$ ортогональна касательной плоскости к F в точке M_i. Доказана следующая теорема.

Теорема 12. *Пусть F — произвольная гладкая поверхность, M_1, M_2 — ее точки, содержащиеся в области $U_{M_1} \subset V \subset F$, где V — множество, гомеоморфное замкнутому кругу, причем U_{M_1} содержит замкнутый геодезический круг V_{M_1} с центром в точке M_1 и радиусом $\rho_F(M_1, M_2)$ (ρ_F — внутренняя метрика поверхности F). Тогда точки M_1, M_2 соединимы кратчайшей, являющейся пределом нормальных ломаных с теми же концами.*

В [25], I, рассматривается кривая L с концами A, B на поверхности $F \in C^1$. Пусть $M_0 = A$, $M_1, \dots$, $M_n = B$ – ее последовательные точки, P_i— касательные плоскости в M_i, $i = 0, \dots, n$. Если проекция вектора $\overline{a}_i \in P_i$ на P_{i-1} равна $\overline{a}_{i-1}$, то вектор $\overline{a}_n = \overline{a}(\tilde{A})$ называется результатом параллельного переноса вектора $\overline{a}_0$ вдоль системы точек $\tilde{A} = \{M_i\}$. Предел векторов $\overline{a}(\tilde{A})$ при условии, что точки систем $\tilde{A}$ бесконечно сгущаются, называется результатом параллельного переноса вектора $\overline{a}_0$ вдоль кривой L.

Другая конструкция параллельного переноса вектора вдоль линии L с концами A, B на поверхности F полчается в результате предельного перехода при использовании сгущающихся последовательностей точек $A = X_0, \dots, X_n = B$ посредством вращения плоскости P_i вокруг линии $P_i \cap P_{i+1}$ до совмещения с плоскостью P_{i+1} и переноса тем самым вектора a_i из P_i в P_{i+1}.

Следующая теорема суммирует основные результаты из [25], I.

Теорема 13. *Чтобы параллельный перенос вдоль кривой L в первом смысле был определен для любого вектора и сохранял длины векторов, необходимы и достаточны следующие условия: 1) сферическое изображение L должно иметь нулевую квадратичную длину; 2) на сфере должна иметь нулевую ориентированную площадь замкнутая кривая, состоящая из проходимых в противоположных направлениях двух экземпляров сферического изображения кривой L; 3) условия 1) и 2) независимы; 4) условие 1) эквивалентно любому из двух условий: a) длина параллельно переносимого в первом смысле вектора сохраняется независимо от сходимости направлений, b) результаты параллельных переносов в первом и втором смысле совпадают; 5) чтобы параллельный перенос вдоль кривой L во втором смысле был определен для любого вектора и сохранял длины векторов, необходимо и достаточно условие 2).*

Замечание 1. *В статье* [100] *В.В. Усова строится выпуклая поверхность с геодезической, сферическое изображение которой неспрямляемо. Эта геодезическая имеет своей "особенностью" такую точку, что всякий открытый отрезок геодезической, содержащий эту точку, имеет неспрямляемое сферическое изображение; сферическое изображение этой точки лежит внутри сферического изображения геодезической. Эта поверхность опровергает гипотезу из монографии* [86] *А.В. Погорелова о локальной спрямляемости сферического изображения открытой геодезической дуги на выпуклой поверхности. Результат статьи* [100] *был получен еще в дипломной рабете ее автора (НГУ, 1971).*

В [25], II, исследуются гладкие поверхности с условием, что процесс параллельного переноса векторов, введенный в предыдущей статье [25], I, сходится равномерно на любом множестве кривых ограниченной длины, расположенных в компактной области. Это условие эквивалентно следующему: отношение $\frac{\theta^2(M,N)}{\rho_F(M,N)}$, где $\theta(M,N)$ – угол между нормалями к поверхности F в точках M,N, ρ_F – внутренняя метрика поверхности F, равномерно сходится к нулю, когда $\rho_F(M,N)\to 0$, $M,N\in G$, где G – компактная область.

В [25], III, исследуются гладкие поверхности, введенные в [25], II. Доказывается, что параллельный перенос векторов, определенный в [25], I, принадлежит внутренней геометрии поверхности. Исследуется геодезическая кривизна и поворот (интеграл от геодезической кривизны) кривой. Также доказываются следующие теоремы: 1) теорема Гаусса–Бонне; 2) для заданной аддитивной функции интервалов существует кривая с поворотом, равным этой функции.

Доказано, что каждая геодезическая на такой поверхности — гладкая кривая и касательный вектор переносится параллельно вдоль такой кривой.

В [25], IV, доказана следующая теорема.

Теорема 14. *Пусть F — гладкая поверхность с положительно определенной метрической формой*

$$ds^2 = g_{11}du_1^2 + 2g_{12}du_1du_2 + g_{22}du_2^2, (u_1,u_2)\in D; g_{ij}(u_1,u_2)\in C^1, i,j=1,2.$$

Пусть $r(u_1,u_2)$ — радиус-вектор точки (u_1,u_2),

$$\Delta_{u_1} r_{u_i} = r_{u_i}(u_1+\Delta u_1, u_2) - r_{u_i}(u_1,u_2),$$

$$\Delta_{u_2} r_{u_i} = r_{u_i}(u_1, u_2 + \Delta u_2) - r_{u_i}(u_1, u_2),$$

$\theta(M, N)$ — угол между нормалями к поверхности в точках M и N, ρ_F — внутренняя метрика поверхности F. Тогда эквивалентны следующие условия.

Условие A: $r(u_1, u_2) \in C^1$, $r_{u_1} \times r_{u_2} \neq 0$, $\frac{\Delta_{u_j} r_{u_i}}{\Delta u_j} r_{u_k}$ равномерно сходится к

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right), i, j, k = 1, 2;$$

когда $\Delta u_j \to 0$, $(u_1, u_2) \in Q \subset D$, где Q — компактное множество.

Условие B: отношение $\frac{\theta^2(M,N)}{\rho_F(M,N)}$ равномерно стремится к нулю, когда $\rho_F(M, N) \to 0$, $M, N \in Q \subset D$, где Q — компактное множество.

В [26], II, указаны необходимые поправки в формулировках утверждений и доказательствах в статьях [25], [26], I. Это учтено, в частности в теореме 13.

4. $C^{1,\alpha}$-изометрические погружения

Справедлива следующая замечательная по своей общности

Теорема 15. *(А.В. Погорелов, [86]). Замкнутая выпуклая поверхность в $\mathbb{R}^3$ однозначно определена в классе выпуклых поверхностей.*

Однако возникает другой вопрос:

Вопрос 1. [69]. *Можно ли замкнутую гладкую выпуклую поверхность, например сферу, изогнуть без нарушения гладкости?*

Дж. Нэш [81] предположил и наметил доказательство в 1954 г., а Кёйпер [79] полностью доказал в 1955 г. следующее утверждение.

Теорема 16. *Каждое n-мерное компактное риманово многообразие M^n может быть C^1-гладко и изометрически погружено в $\mathbb{R}^{2n-1}$ и вложено в $\mathbb{R}^{2n}$.*

В интересующем нас случае $n = 2$ эта теорема гарантирует существование изметрического C^1-погружения в $\mathbb{R}^3$ и изометрического C^1-вложения в $\mathbb{R}^4$. Кроме того, любую гладкую поверхность в $\mathbb{R}^3$ можно в классе её изометрических C^1-погружений непрерывно продеформировать в поверхность, лежащую в сколь угодно малом шаре [71]. Как следствие, C^1-гладкая поверхность с аналитической внутренней метрикой положительной кривизны может не быть выпуклой. Это приводит к тому, что внешняя геометрия таких изометрических погружений поверхности не связана с её внутренней метрикой.

Так, по теореме Кёйпера, *единичная сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ допускает изометрическое C^1-погружение в сколь угодно малый шар в $\mathbb{R}^{n+1}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.* Этот результат Кёйпера опровергает старую гипотезу, согласно которой каждое изометрическое C^1-погружение $f : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ при $n \geq 2$ *конгруэнтно* единичной сфере. (Если f является C^2-гладким, то оно конгруэнтно единичной сфере в силу классической теоремы жёсткости) [76].

Эти утверждения не являются интуитивно ясными и противоречат наглядным представлениям. В своё время они оказались для многих неожиданными и послужили стимулом для тонких исследований и введения таких новых внешне-геометрических свойств поверхностей, что внутренняя и внешняя геометрия поверхностей с этими свойствами согласованы.

Так, для поверхностей ограниченной внешней кривизны в смысле А.В. Погорелова [85], [86] существуют достаточно сильные связи между внутренней и внешней геометриями этих поверхностей, как следует из раздела 9.

Естественно возникают вопросы, существуют ли числа $\alpha \in (0,1)$ такие, что поверхности класса $C^{1,\alpha}$ в $\mathbb{R}^3$ имеют ограниченную внешнюю кривизну или для которых верны аналоги теорем Нэша и Кёйпера. Решению этих вопросов посвящены докторская диссертация [48] и многие исследования Ю.Ф. Борисова.

В [25], I и [25], II, с учетом [26], II доказано: чтобы определяемый посредством естественной внешней конструкции параллельный перенос касательных векторов вдоль спрямляемых кривых на поверхности $F \in C^1$ имел внутренне-геометрический смысл, необходимо $F \in C^{1,1/2}$, и достаточно $F \in C^{1,\alpha}$, $\alpha > 1/2$.

Это позволяет в последнем случае определить кривизну для широкого класса множеств на поверхности и установить её связь со сферическим изображением поверхности. На основании этого была выдвинута следующая гипотеза.

Гипотеза 1. *Если $F \in C^1$ и (F, ρ_F) — многообразие ограниченной знакопостоянной кривизны, то из условия $F \in C^{1,\alpha}$ ограниченность внешней кривизны следует при $\alpha > 1/2$ и не следует при $\alpha \le 1/2$ даже в случае аналитичности ρ_F и положительности гауссовой кривизны.*

Замечание 2. *В примечании внизу стр. 153 в* [99] *сказано, что линейный элемент поверхности $F \in C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, в изотермических координатах имеет гладкость $C^{0,2\alpha-\varepsilon}$ при $\alpha < 1/2$ и $C^{1,2\alpha-\varepsilon}$ при $\alpha > 1/2$ для любого $\varepsilon > 0$.*

Начнем описание статьи [26] с цитирования ее начала.

Рассматриваются гладкие поверхности, подчиненные такому условию: если ρ — внутренняя метрика поверхности, то $\frac{\theta(M,N)}{[\rho(M,N)]^{2/3}} \to 0$ при $\rho(M,N) \to 0$ равномерно относительно выбора точек $M, N \in G$, где G — любая область с компактным замыканием. Класс таких поверхностей обозначается $C_0^{1,2/3}$. Если в окрестности каждой точки поверхность F задается в подходящих декартовых координатах уравнением $z = f(x,y)$, где f имеет первые частные производные, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем $\alpha > 2/3$, то, очевидно, $F \in C_0^{1,2/3}$. Иначе говоря, $C^{1,\alpha}$ при $\alpha > 2/3$.

Цель статьи — показать, что в классе $C_0^{1,2/3}$ определенные ограничения на внутреннюю метрику обеспечивают "хорошие" внешне-геометрические свойства поверхности (вплоть до аналитичности). Известно, (см. [79],[81]), что произвольные гладкие поверхности этим свойством не обладают.

Всякая поверхность $F \in C_0^{1,2/3}$ принадлежит классу, определенному в [25], II, который будут обозначаться $C_0^{1,1/2}$, и поэтому для нее справедливы результаты из [25], II и [25], III, в том числе теорема Гаусса–Боннэ ([25], III, пар. 2).

Резюме [26]: Если поверхность $F \in C^{1,\alpha}$, $\alpha > 2/3$, — многообразие положительной, нулевой или отрицательной внутренней кривизны, то сферическое изображение F есть преобразование ограниченной вариации в смысле Банаха;

1) если
$$g_{11}du_1^2 + 2g_{12}du_1du_2 + g_{22}du_2^2, g_{ij} \in C^k, k > 4,$$
— форма положительной кривизны, и $r(u,v) \in C^{1,\alpha}$, $\alpha > 2/3$,— решение системы дифференциальных уравнений $r_u^2 = g_{11}, r_u r_v = g_{12}, r_v^2 = g_{22}$, то $r(u,v) \in C^{k-1}$;

2) две изометричных поверхности $F_1, F_2 \in C^{1,\alpha}$, $\alpha > 2/3$, положительной внутренней кривизны конгруэнтны.

На основании цитированных результатов из [26], первое утверждение гипотезы удалось доказать при замене условия $\alpha > 1/2$ условием $\alpha > 2/3$ (замененным равенством $\alpha = 2/3$ в неопубликованной работе С.З. Шефеля). Этот результат не удалось улучшить и первое утверждение гипотезы 1 остается открытым.

В [29], V^n — n-мерное вещественно аналитическое риманово пространство.

По определению, $C^{l,\alpha}$-изометрическое погружение пространства V^n в евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ обладает регулярностью $C^{l,\alpha}$, если ни в одной точке оно не является $C^{l,\alpha'}$-изометрическим для $\alpha' > \alpha$. Множество всех погружений, обладающих регулярностью $C^{l,\alpha}$, называется классом погружений $C^{l,\alpha}$. Множество всех аналитических погружений называется классом A. Класс погружений будем называть универсальным для пространств размерности n, если всякое пространство V^n допускает локальное погружение данного класса в R^{n+1}. Из дифференциальной геометрии известно, что класс A является универсальным для пространств размерности 2, но не является таковым для пространств высших размерностей. Существуют ли для пространств размерности ≥ 2 универсальные классы и каковы они? Этот вопрос имеет двоякий смысл.

Если $n = 2$, то речь идет о том, можно ли поверхностям заранее предписывать определенную степень регулярности независимо от свойств их внутренней метрики. Такая возможность необходимо связана с нарушением любой связи между внутренней и внешней геометрией поверхности.

При $n > 2$ речь идет еще и о возможности за счет ослабления регулярности погружения обеспечить локальную погружаемость в R^{n+1}.

Первый из имеющихся результатов по существу следует из работ [79], [81]:

Теорема 17. *Класс погружений $C^{1,0}$ – универсальный для пространств любой размерности.*

Из цитированного выше результата в [26] вытекает

Теорема 18. *При любом $l > 1$ и произвольном α, а также при $l = 1$ и $\alpha > 2/3$ класс погружений $C^{l,\alpha}$ не является универсальным для пространств V^2.*

Следующая теорема дает оценку противоположного характера.

Теорема 19. *При любом $\alpha < 1/(n^2 + n + 1)$ класс погружений $C^{1,\alpha}$ является универсальным для пространств V^n.*

При $n = 2$ ограничение для α имеет вид $\alpha < 1/7$. Справедлива ли теорема 19 для размерностей $n > 2$, не известно. Выдвигается гипотеза

Гипотеза 2. *Для пространств любой размерности классы погружений $C^{1,\alpha}$ при $\alpha \leq 1/2$ являются универсальными; других универсальных классов (кроме класса A для пространств V^2) не существует.*

Мы опустим формулировку теоремы 4 из [29].

Теорема 20. [32] *Поверхность ограниченной внешней и положительной гауссовой (в обобщенном смысле) кривизны локально выпукла (каждая ее точка имеет окрестность, являющуюся выпуклой поверхностью).*

Объединение теорем 8 и 9 из [98] дает следующее усиление этой теоремы.

Теорема 21. *Пусть F – $C^{1,\alpha}$-гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$, $\alpha > 2/3$. Если по своей внутренней геометрии F является двумерным многообразием неотрицательной, неположительной или нулевой кривизны, то ее образ при аффинном преобразовании имеет внутреннюю метрику того же класса. При этом F есть, соответственно, нормальная поверхность неотрицательной кривизны, седловая поверхность или нормальная развертывающаяся поверхность (см.* [98]*).*

В большой работе [45] на основании "деформационной теоремы" (теорема 1), доказательство которой занимает подавляющую часть статьи и содержит довольно сложные вычисления, доказываются следующие результаты. В теореме 2 доказано, что в классе $C^{1,\alpha}$ при $\alpha < 1/13$ возможно непрерывное изгибание аналитической поверхности положительной гауссовой кривизны с потерей локальной выпуклости, а тем самым и ограниченности внешней кривизны. Этот результат дополнен теоремой 3 об аналогичном изгибании плоскости в поверхности, не содержащие прямых. В конце параграфа 1 указан способ усиления теоремы 1 при сохранении схемы доказательства, позволяющий заменить в теореме 2 условие $\alpha < 1/13$ условием $\alpha < 1/7$. Замечу, что последний результат Ю.Ф. Борисов анонсировал в теореме 19 при $n = 2$; при $n > 2$ она не доказана.

Замечание 3. *Вопрос о том, верны ли гипотезы 1 (в частности, верно ли её первое или второе утверждение) и 2 остается открытым до сих пор.*

5. Другие публикации Ю.Ф. Борисова по геометрии

В работе [28] доказана следующая замечательная теорема.

Теорема 22. *Пусть плоская область G звездно-выпукла относительно точек области $G_0 \subset G$, (т.е. пересечение всякого луча, исходящего из такой точки, с G связно). Пусть, далее, заданы два непрерывных отображения f_1 и f_2 области G в $\mathbb{R}^3$, обладающих тем свойством, что для всякой спрямляемой кривой $K \subset G$ ее образы $f_1(K)$, $f_2(K)$ имеют длину, равную длине K. Тогда существует непрерывная вектор-функция $\varphi(X;t)$, $X \in G$, $t \in [0,1]$ такая, что*

1) $\varphi(X,0) = f_1(X)$, $X \in G$;

2) $\varphi(X,1) = f_2(X)$, $X \in G$;

3) При любом $t_0 \in [0,1]$, $\varphi(\cdot,t_0)$ переводит всякую спрямляемую кривую $K \subset G$ в кривую той же длины.

В работах [39] и [40] найдены необходимые и достаточные условия существования и единственности с точностью до конгруэнтности параметризованной длиной дуги кривой в (псевдо)евклидовом пространстве конечной или бесконечной размерности с данными кривизнами (и сигнатурой) при снятии априорных ограничений (в том числе предположения о непрерывности кривизн). Ограничимся случаем конечномерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Определение 1. *Непрерывно дифференцируемый путь $\gamma(t)$, $t \in I$, в $\mathbb{R}^n$ называется стандартным, если $|\gamma'(t)| \equiv 1$.*

Множество классов эквивалентности свободных векторов в $\mathbb{R}^n$ обозначим $V(\mathbb{R}^n)$. Для функций $\overline{r}, \overline{e}_i : I \to V(\mathbb{R}^n)$, где $(\overline{e}_1, \dots \overline{e}_m)$ — ортонормальная система, функция $\overline{r}^{\perp}_{(\overline{e}_1,\dots\overline{e}_m)}$ определяется равенством

$$\overline{r}^{\perp}_{(\overline{e}_1,\dots\overline{e}_m)} = \overline{r} - \sum_{j=1}^{m} (\overline{r} \cdot \overline{e}_j)\overline{e}_j. \tag{1}$$

Определение 2. *Функции $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ называются кривизнами порядков $1, \dots, n-1$ стандартного пути $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, если существует ортонормальная система дифференцируемых функций $\overline{e}_i \to V(R^n)$, $i = 1, \dots, n-1$, со свойствами: 1) $\overline{e}_1 = \gamma'$; 2) $\kappa_m = |\overline{\kappa_m}|$ при $m = 1, \dots, n-1$, где $\overline{\kappa}_m = \overline{r}'^{\perp}_{(\overline{e}_1,\dots\overline{e}_m)}$, а при $m < n-1$, кроме того, $\kappa_m > 0$ всюду на I и $\overline{e}_{m+1} = \overline{\kappa}_m / \kappa_m$.*

Беря при $\kappa_{n-1} = 0$ в качестве $\overline{e}_n(t)$ любой из двух векторов, образующих с $(\overline{e}_1(t), \dots \overline{e}_{n-1}(t))$ ортонормальный базис в $V(\mathbb{R}^n)$, а при $\kappa_{n-1}(t) \neq 0$ полагая $\overline{e}_n(t) = \overline{\kappa_{n-1}} / \kappa_{n-1}(t)$, получим n-векторник Френе пути γ.

Теорема 23. *(основная)* [39]. *Пусть $n \geq 2$ — целое число, $I \subset \mathbb{R}$ — промежуток, $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n-1$, — некоторые функции. Справедливы следующие утверждения.*

1. Пусть функции φ_i удовлетворяют следующим условиям:

(a) всюду на I, $\varphi_{n-1} \geq 0$ и $\varphi_i > 0$ при $i < n-1$;

(b) каждая из функций φ_i имеет первообразную.

Тогда существует стандартный путь $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ с кривизнами $\kappa_i = \varphi_i$, $i = 1, \dots, n-1$, обладающий n-векторником Френе.

2. Для существования стандарного пути $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ с кривизнами $\kappa_i = \varphi_i$, $i = 1, \dots, n-1$, определяемого своими кривизнами с точностью до конгруэнтности, необходимо и достаточно выполнение условий (a), (b), следующего условия:

(c) множество $\{t \in I : \varphi_{n-1}(t) > 0\}$ связно.

Теорема 24. [40]. *Стандартный путь γ в $\mathbb{R}^n$, имеющий кривизны $\kappa_1, \dots \kappa_{m-1}$, $m \leq n$, лежит в некоторой $(m-1)$-мерной плоскости P^{m-1} пространства $\mathbb{R}^n$ в том и только том случае, когда $\kappa_{m-1} \equiv 0$. Плоскость P^{m-1} определена путем γ однозначно.*

В интересной большой статье [41] Юрий Фёдорович определяет векторную кривизну n-мерной C^2-регулярной поверхности F^n в гильбертовом пространстве для произвольной её точки X_0. Доказывается обобщение классической теоремы Гаусса для 2-мерной C^3-регулярной поверхности в $\mathbb{R}^3$, приводящее к выражению секционных кривизн риманова пространства $\tilde{F}^n$, соответствующего C^3-регулярной поверхности F^n, через характеристики её векторных кривизн.

К сожалению, здесь нет возможности привести достаточно короткие и точные формулировки определений и результатов этой статьи.

6. О классической и релятивистской кинематике

Здесь излагаются некоторые понятия и результаты из [27], [34]—[36], [46].

"Классическая кинематика" — галилеева кинематика, "релятивистская кинематика" — кинематика специальной теории относительности.

Выбор названия этого раздела следует названиям поздних статей [35],[46] и в большей степени тексту [57]; приведём сейчас некоторые выдержки оттуда.

1. Пространственно-временная структура множества событий в теории относительности ("релятивистская кинематика") определена преобразованиями Лоренца, описывающими её автоморфизмы в специальных системах пространственно-временных координат. В статье [9] А.Д. Александрова и В.В. Овчинниковой доказано, что преобразования пространства-времени Минковского, сохраняющие семейство телесных световых "конусов будущего", являются с точностью до подобия преобразованиями Лоренца. Это позволило трактовать теорему о конусах как совпадение пространственно-временной структуры множества событий с его причинно-следственной структурой. Развитие этой идеи привело к серии работ по теории, названной "хроногеометрией".

2. Обобщения теоремы о конусах разнообразны. В работе [27] доказана теорема о преобразованиях произвольного псевдоевклидова пространства, сохраняющих изотропность векторов, и сделана попытка объяснить четырехмерность пространства-времени. Большая серия дальнейших работ А.Д. Александрова и его учеников посвящена ослаблению условий, наложенных на конусы в исходной теореме из [9]. Основной задачей хроногеометрии, поставленной А.Д. Александровым и пока нерешенной, является полное выяснение связи максимально однородных упорядоченных пространств с релятивистской кинематикой.

3. *Параллельно с хроногеометрией в 70-х гг. Ю.Ф. Борисовым построена полная система аксиом релятивистской кинематики*, описывающая в надлежащей форме следующие факты.

1) Всякое относительное пространство — трехмерное евклидово, а соответствующее время наделено структурой направленной прямой.

2) Две инерциальные системы отсчета неразличимы по их положению в множестве таких систем ("принцип относительности")

3) Структура кинематики допускает возможность экспериментального обнаружения. (Это, в отличие от 1) и 2), неверно для галилеевой кинематики, В.Б.).

В [27] получены следующие результаты.

Теорема 25. *Всякое преобразование (псевдоевклидова пространства) $\mathbb{R}^n_k$, сохраняющее изотропность векторов, является аффинным.*

Замечание 4. *Из пояснений в* [27] *следует, что на самом деле более точная словесная формулировка доказанной там теоремы следующая: Всякая биекция (псевдоевклидова пространства) $\mathbb{R}^n_k$, которая вместе с обратной к ней биекцией* *сохраняет изотропность векторов, является аффинным преобразованием. Естественно подразумеваемое формулировкой теоремы 25 более сильное утверждение доказано в статье С.Н.Астракова* [12]. *Несмотря на простоту формулировок, доказательства в* [27] *и* [12] *весьма непросты в сравнении с* [9].

Дано аксиоматическое определение преобразования Лоренца. Пусть G — совокупность всех преобразований пространства $\mathbb{R}^n_k$, сохраняющих изотропность векторов. Рассмотрим следующую систему аксиом.

Аксиома 1. *Если вектор* $\overline{AB}$ *пространственно-подобный и* $g \in G$, *то вектор* $\overline{A'B'}$, *где* $A' = g(A)$, $B' = g(B)$, *тоже пространственно-подобный.*

Аксиома 2. *Для любого* $k' \neq k$, $\mathbb{R}^n_{k'}$ *не удовлетворяет аксиоме 1.*

Аксиома 3. *При* $n' > n$ *аксиомы 1 и 2 несовместны.*

Теорема 26. *Аксиомы 1–3 выполняются в том и только в том случае, когда* $n = 4$, $k = 1$. *При этом* G *есть группа преобразований Лоренца (изменение знака у* x_4 *не исключается), дополненных преобразованиями подобия с произвольным коэффициентом.*

Изложим результаты статьи [34].

Пусть M — множество элементов-"событий". В M выделено семейство D подмножеств, называемых "инерциальными движениями". Кроме того, задано семейство K взаимно однозначных отображений на арифметическое пространство $\mathbb{R}^4$, называемых "инерциальными системами отсчета", связанных с семейством D следующими условиями:

1) Если $S \in K$ и множество I таково, что $S(I)$ — множество в $\mathbb{R}^4$, задаваемое системой уравнений $x_i = a_i$, $i = 1, 2, 3$ где a_i — постоянные, то $I \in D$.

2) Если $I \in D$ и $S \in K$, то $S(I)$ — множество в $\mathbb{R}^4$, задаваемое системой уравнений $x_i = a_i + v_i x_4$, $i = 1, 2, 3$, где a_i, v_i — постоянные.

Если $S, S' \in K$, то по определению $f_{SS'} = S \circ S'^{-1}$.

Пусть $S, S' \in K$. Будем говорить, что S' *покоится относительно* S, если всякое множество I, задаваемое в системе S' уравнениями из п. 1), задается уравнениями такого же вида и в системе S. Иначе будем говорить, что S' *движется относительно* S.

Аффинное преобразование $\mathbb{R}^4$ с матрицей в $SO(3) \oplus 1$ называется *тривиальным.*

Аксиома 4. *Существуют такие* S, S', *что* S' *движется относительно* S.

Аксиома 5. *a) Если* $S \in K$, φ — *тривиальное преобразование, то существует такое* $S' \in K$, *что* $f_{SS'} = \varphi$.

b) Если $S, S' \in K$ *и* S' *покоится относительно* S, *то* $f_{SS'}$ — *тривиальное преобразование.*

Аксиома 6. *Если* $I \in D$, $S \in K$, φ — *тривиальное преобразование, то существует такое* $\tilde{I} \in D$, *что* $S(\tilde{I}) = \varphi(S(I))$.

Аксиома 7. *Если* $S_1, S_1', S_2 \in K$, *то существует* $S_2' \in K$: $f_{S_2 S_2'} = f_{S_1 S_1'}$.

Предложение 1. *Для любого $S \in K$ множество всех преобразований вида $f_{SS'}$, где $S' \in K$, образует группу относительно композиции преобразований.*

Теорема 27. *Если семейство D и семейство K удовлетворяют аксиомам 4–7, то имеются лишь две исключающие друг друга возможности:*

1) для любого $S \in K$ множество всех преобразований вида $f_{SS'}$, где $S' \in K$, совпадает с группой всех преобразований Галилея;

2) существует единственное число $c > 0$ такое, что для любого $S \in K$ множество всех преобразований вида $f_{SS'}$, где $S' \in K$, совпадает с группой всех c-лоренцевых преобразований.

Каждая из этих возможностей реализуется на некоторой модели системы аксиом 4–7, при этом вторая возможность реализуется при любом $c > 0$.

Отметим, что в выделенной выше курсивом части текста [57] 2003 г. Ю.Ф. Борисов не упоминает свои работы [35], [36] 1986, 1987 гг. Там же он говорит о полной системе аксиом релятивистской кинематики в [34].

Я понимаю это как позволение Юрия Федоровича мне ограничиться краткими цитатами из его общих описаний содержания статей [35], [36], [46].

В статье [35] излагается подход к кинематике, намеченный в работе [34].

Начальные представления классической кинематики об “относительном пространстве”, определяемом инерциальным телом отсчета, о соответствующем ему “местном времени” и их структурах — евклидовой геометрии и “хронометрии” — формализуются посредством понятия кинематики в множестве событий. В терминах кинематики формулируются закон инерции (постулат I) и кинематический инвариант принципа относительности Галилея (постулат II). Выполнение постулата III является необходимым условием экспериментальной обнаружимости кинематики. Теорема 14 устанавливает, что постулаты I–III непротиворечивы и определяют релятивистскую кинематику.

Ввиду теоремы 7 и определения 5 (из [35]), *рассматриваемые здесь постулаты I, II составляют полную систему постулатов, общих для классической и релятивистской кинематик в том смысле, что общие свойства обеих кинематик исчерпываются следствиями этих постулатов.*

В пар. 1 статьи [36] говорится: введенный в [35] постулат I выражает определенную связь между пространственной структурой τ_K и временем B_K в множестве событий с кинематикой K. В кинематике K, удовлетворяющей постулатам I и II из [35], связь между τ_K и B_K оказывается весьма жесткой, а именно: время B_K определено пространственной структурой множества событий τ_K однозначно с точностью до возможного изменения ориентации местного времени B_T для всех относительных пространств $T \in \tau_K$.

Дано доказательство этого утверждения (теоремы) и указаны следствия этой теоремы, имеющие отношение к критике конвенциалистской трактовки одновременности событий и равенства промежутков времени.

Аннотация и краткое введение к [46] содержит следующие высказывания.

Рассматриваются логические основания релятивистской кинематики, связанные с ослаблением базисных гипотез.

Главный результат статьи, указанный в ее заглавии, выводится из теоремы, доказанной в [35], в свою очередь основанной на результатах из [34]. Этому предшествует переделка системы постулатов из [35], учитывающая замечания физиков, ознакомившихся с этой работой. Главное усовершенствование системы постулатов — исключение из их числа кинематического закона инерции (постулат I из [35]), оказавшегося следствием принятых здесь постулатов Евклида и Галилея. Первый полностью отвечает названию, второй является “урезанным” принципом Галилея, справедливым и в релятивистской кинематике (он заменяет постулат II из [35], не отвечавший своему названию).

То обстоятельство, что принятые здесь постулаты не касаются ни электродинамики, ни оптики, вызывает вопрос, обсуждаемый в пар. 6.

7. Публикации Ю.Ф. Борисова о метрических основаниях римановой геометрии

Юрий Федорович всегда интересовался задачей о метрических основаниях римановой геометрии, что видно уже из названия его тезисов [51].

Уже после публикации основных результатов В.Н.Берестовского и И.Г.Николаева он ставит вскоре задачи 3–6 в [58], делает позже доклады на всесоюзных конференциях [51] и [53] в Новосибирске и Кишиневе и публикует две статьи [37], [38]. Используя отличный от других авторов подход, Ю.Ф. вводит разные версии условий инфинитезимальной и дифференциальной евклидовости различных порядков для метрических пространств в терминах существования в окрестности каждой точки отображения со специальными свойствами в евклидово пространство, гарантирующими риманов характер метрики пространств.

Приведем только цитаты из [37], [38], которые Ю.Ф. называет “заметками”.

1°. *Существует ли пространство с “неописуемым” метрическим тензором?*

Пусть заданы метрические пространства (M_i, ρ_i), $i = 1, 2$; $U_i \subset M_i$, $i = 1, 2$; отображение $f : U_1 \to U_2$ и функция $\varepsilon_f : U_1 \times U_1 \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\rho_2(f(X), f(Y)) = (1 + \varepsilon_f(X, Y))\rho_1(X, Y), \quad \varepsilon_f(X, X) = 0.$$

Определение 3. *Отображение f называется изометрическим в точке $A \in U_1$, если $\sup |\varepsilon_f| < 1$ и $\lim_{X,Y\to A} \varepsilon_f(X, Y) = 0$.*

Определение 4. *Метрическое пространство M называется n-мерным инфинитезимально-евклидовым, если для любой точки $A \in M$ существует отображение f её окрестности на окрестность точки $f(A)$ в $\mathbb{R}^n$, изометрическое в точке A.*

Определение 5. *Гладкое n-мерное метрическое многообразие M^n называется дифференциально-евклидовым, если для любой точки $A \in M^n$ существует C^1-диффеоморфизм f ее открытой окрестности на открытую окрестность точки $f(A)$ в $\mathbb{R}^n$, изометрический в точке A.*

Доказано, что дифференциально-евклидовы многообразия с внутренней метрикой — не что иное, как связные C^0-римановы многообразия, рассматриваемые как гладкие многообразия с римановой метрикой. Поэтому важен такой вопрос:

Вопрос 2. *Всякое ли инфинитезимально-евклидово метрическое пространство допускает введение дифференциальной структуры (локальной или глобальной), превращающей его (соответственно локально или глобально) в дифференциально-евклидово многообразие?*

Далее вводится понятие *n-мерного пространства с полем метрического тензора*, эквивалентное, по словам Ю.Ф., понятию n-мерного инфинитезимально-евклидова пространства и ставится соответствующий эквивалент I_1 вопроса 2. Мы опустим эти определение и вопрос.

2°. *Определены ли длины произвольных путей в римановом пространстве его метрическим тензором?*

Следующий вопрос — некоторая вариация и синтез вопроса II в [37] и некоторой части задачи № 6 из [58] для $M = \mathbb{R}^2$.

Вопрос 3. *Совпадает ли с римановой метрикой ρ произвольная внутренняя метрика d на связном C^1-римановом многообразии M, в которой все пути класса C^1 имеют обычную длину? Тот же вопрос при условии, что обычную длину имеет всякий геодезический отрезок в M.*

В статье [38] приводятся условия в терминах порядков изометричности отображения в точке выше α, декартовости карты в точке выше α, декартовости карты в точке устойчиво выше α, дифференциальной евклидовости выше α, дифференциальной евклидовости устойчиво выше α на многообразия и теорема 2 об эквивалентности этих условий римановой структуре класса C^0 или C^1.

Придется опустить недостаточно короткие формулировки из [38]. Насколько мне известно, Юрий Федорович не публиковал ответов на поставленные вопросы или доказательств выдвинутых гипотез из публикаций [37], [38].

8. Некоторые другие публикации Ю.Ф. Борисова

Мы еще не обсуждали статьи [31], [33], [42]–[44] в математических журналах.

Название статьи [44] говорит достаточно о её содержании.

Заметим, что [31], [42], [43] касаются одной из любимых тем Ю.Ф. — параллельного переноса, но в отличие от раздела 3, в этих статьях рассматриваются классические гладкие римановы многообразия произвольной размерности.

В [31] определяется параллельный перенос касательных векторов вдоль дуг $L \in C^{0,\alpha}$ при $\alpha > 1/2$ и в теореме 1 доказывается его сходимость при любом начальном векторе, совпадение с обычным параллельным переносом на кусочно-гладких L и некоторые другие свойства.

Ограничимся цитированием только п. 1 статьи [33].

Пусть $f(x)$, $x \in [a,b]$, $\varphi(z)$, $z \in [0,\infty)$, — вещественные функции, $\varphi(z) \geq 0$ на $[0,\infty)$; $\psi(f;\alpha,\beta)$ — значение некоторого фиксированного неотрицательного функционала ψ на функции $f(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$, $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Для любой системы точек $P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ положим

$$S(f,\varphi,\psi;P) = \sum_{i=1}^{n} \psi(f;x_{i-1},x_i)\varphi(\psi(f;x_{i-1},x_i)).$$

Пусть $\gamma(P) = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$, $V(f,\varphi,\psi;\varepsilon) = \inf_{\gamma(P)=\varepsilon} S(f,\varphi,\psi;P)$. Существует неотрицательный (возможно, бесконечный) предел

$$V(f,\varphi,\psi) = \lim_{\varepsilon\to 0} V(f,\varphi,\psi,\varepsilon).$$

Теорема 28. *Пусть f непрерывна, $\psi(f;\alpha,\beta)$ — расстояние между точками $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$, измеренное в замкнутой области*

$$E = \{(x,y) : \alpha \le x \le \beta, y \ge f(x)\},$$

и $\lim_{z\to 0}\varphi(z) = 0$. Тогда $V(f,\varphi,\psi) = 0$.

Здесь под точкой (x,y) понимается точка евклидовой плоскости с прямоугольными координатами x,y, а под расстоянием, измеренным в E, — нижняя грань длин дуг, соединяющих рассматриваемые точки и проходящих в E.

Из этой теоремы вытекают аналогичные утверждения для случаев, когда $\psi(f;\alpha,\beta)$ — расстояние между точками $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$ на плоскости или $\psi(f;\alpha,\beta) = [f(\beta)-f(\alpha)]$ ("квазисапямляемость графика" и "квазиограниченность вариации" произвольной непрерывной функции).

Верна ли теорема, когда $\psi(f;\alpha,\beta)$ — диаметр графика функции $f(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$, не известно. Выяснение этого существенно связано с проблемой регулярности $C^{1,\alpha}$-погружений (при $\alpha > 1/2$) двумерных римановых пространств в трехмерное евклидово (достаточно ограничиться случаем, когда $\varphi(z) = z^\beta$, $\beta > 0$).

Статьи [42], [43] — отредактированные записи А.К. Гуца некоторых лекций из с/к Ю.Ф. Борисова "Риманова геометрия" (весна 1967 г., мехмат НГУ) [77].

Они связаны с обычными понятиями обычной римановой геометрии.

Здесь мы лишь повторим известное и до Борисова аналитическое и простое доказательство *тождества Бианки*, и кратко обсудим основные идеи данного им оригинального доказательства этого тождества из [42].

В геодезических в данной точке x_0 (например, в нормальных с центром в точке x_0) координатах $x = (x^1,\dots,x^n)$ риманова пространства (M^n, g) символы Кристоффеля $\Gamma^i_{jk}(x_0)$ равны нулю. Поэтому ковариантные производные тензора кривизны R в этих координатах равны

$$\nabla_m R^i_{kl,n} = \frac{\partial^2\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m\partial x^n} - \frac{\partial^2\Gamma^i_{km}}{\partial x^l\partial x^n}.$$

Аналогично

$$\nabla_k R^i_{lm,n} = \frac{\partial^2\Gamma^i_{lm}}{\partial x^k\partial x^n} - \frac{\partial^2\Gamma^i_{lk}}{\partial x^m\partial x^n}, \quad \nabla_l R^i_{mk,n} = \frac{\partial^2\Gamma^i_{mk}}{\partial x^l\partial x^n} - \frac{\partial^2\Gamma^i_{ml}}{\partial x^k\partial x^n}.$$

Суммируя эти три выражения и учитывая, что тензор кручения T равен нулю, т.е. $\Gamma^i_{mk} = \Gamma^i_{km}$, получаем тождество Бианки

$$\nabla_m R^i_{kl,n} + \nabla_k R^i_{lm,n} + \nabla_l R^i_{mk,n} = 0.$$

Доказательство простое, но не ясен геометрический смысл тождества.

Идея проясняющего доказательства Ю.Ф. Борисова состоит в рассмотрении кубов с вершиной в точке x_0 и с ребрами, направленными вдоль троек различных координатных линий. Внешние векторы к граням кубов определяют ориентации граней, а ориентации граней определяют направления обхода граней по их ребрам. Для каждой пары противоположных граней строится непрерывная замкнутая кривая L_j, $j = 1, 2, 3$; из ребер куба с началом и концом в точке x_0, включающая обходы в соответствующих направлениях этих двух граней и проходы в двух противоположных направлениях соединяющего их ребра (см. Рис 1 в [42]). Затем вдоль кривой $L = L_1L_2L_3$ производятся параллельные переносы векторов и рассматриваются пределы переносов при стягивании кубов в точку x_0. После соответствующих вычислений получается тождество Бианки, так как переносы при обходе граней оцениваются значениями тензора кривизны.

Тезисы [50] доклада Ю.Ф. на Международном конгрессе математиков 1966 г. в Москве интересны сами по себе. История требует дословного воспроизведения.

“Результаты Дж. Нэша и Н. Кёйпера о C^1-изометрических погружениях римановых пространств в евклидово показали, что никакие условия, наложенные на метрику погружаемых пространств, не обеспечивают регулярность этих погружений. Вместе с тем известно, что регулярность $C^{1,1}$-изометрических погружений двумерных римановых пространств в E^3 обеспечивается регулярностью метрики и положительностью кривизны. Исследование параллелизма Леви–Чивита на гладких поверхностях привело к гипотезе, что этот результат верен для $C^{1,\alpha}$-погружений при $\alpha > 1/2$ и неверен при $\alpha \leq 1/2$. Погружения последнего типа называются “кёйперовскими”. Установлено, что кёйперовские $C^{1,\alpha}$-погружения n-мерных пространств существуют при $\alpha < \frac{1}{n^2+n+1}$, а при $n = 2$ отсутствуют, если $\alpha > 2/3$.”

9. Двумерные многообразия ограниченной кривизны

Двумерные многообразия ограниченной кривизны (МОК) введены в заметке [1] А.Д.Александрова. Двумерное многообразие с внутренней метрикой называется многообразием ограниченной кривизны, если у каждой его точки существует окрестность U, в которой сумма вычисленных по верхним углам избытков любой конечной системы попарно неналегающих простых, составленных из кратчайших треугольников не превосходит некоторого числа $C(U) < +\infty$. Эквивалентное условие: локально метрика равномерно аппроксимируется метриками многогранников или римановых многообразий, у которых положительные части кривизны ограничены в совокупности [8].

Юрий Григорьевич Решетняк доказал, что двумерное многообразие с внутренней метрикой имеет ограниченную кривизну тогда и только тогда, когда для каждой его точки в некоторой её окрестности можно ввести *изотермическую систему координат* (u, v) с линейным элементом $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$, где $\lambda(u, v)$ — разность двух субгармонических функций [88], [89], [90], [91].

Другое аналитическое описание МОК дано в статье [14] И.Я.Бакельмана.

(Дадим цитаты из с. 177 в [15].) Для этого были использованы метрики вида

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\tau(u, v)dudv + dv^2, \tag{2}$$

заданные в области D декартовой плоскости u, v. Метрики вида (2) в случае гладкой (т.е. непрерывно дифференцируемой) функции $\tau(u, v)$ называются чебышевскими. Основной результат таков: *для того, чтобы метрика (2) задавала в области D МОК, необходимо и достаточно, чтобы $\tau(u, v)$ была функцией* *ограниченной вариации и* $var_D\tau < \pi/4$. Если в МОК W нет точек X, в которых кривизна $\Omega(X) \geq \pi/4$, то это многообразие можно покрыть счетным числом открытых многогольников так, что каждая компактная область из W будет покрыта конечным числом таких многоугольников и в каждом многоугольнике можно ввести координаты и задать чебышевскую метрику (2).

Заметим, что все правильные многогранники в $\mathbb{R}^3$ являются МОК, но условию $\Omega(X) < \pi/4$ удовлетворяют лишь вершины правильного додекаэдра.

Примерами 2-многообразий ограниченной кривизны являются введённые и детально изученные А.В. Погореловым поверхности $F \in C^1$ в $\mathbb{R}^3$ *ограниченной внешней кривизны*, для которых суммы площадей сферических изображений (с учетом кратности и ориентации) попарно не пересекающихся компактных множеств локально ограничены [85], [86]. Для поверхностей ограниченной внешней кривизны справедлива *теорема Гаусса* о равенстве интегральной кривизны произвольной области площади ее сферического изображения, т.е. существуют достаточно сильные связи между внутренней и внешней геометриями этих поверхностей. Каждая поверхность класса C^2 имеет ограниченную внешнюю кривизну.

По теореме А.В. Погорелова, полная поверхность с ограниченной неотрицательной внешней кривизной есть либо замкнутая выпуклая поверхность, либо бесконечная выпуклая поверхность [86].

В работе [13] И.Я. Бакельмана понятие поверхности с ограниченной внешней кривизной было перенесено на негладкие поверхности, являющиеся МОК.

Там вводятся поверхности F, удовлетворяющие следующим условиям:

1) В каждой точке X поверхности F контингенция поверхности представляет собой конус $K_F(X)$. Он называется *касательным конусом поверхности в данной точке.* Пусть далее, последовательность точек $X_1, X_2, \dots$ поверхности F сходится к точке $X_0 \in F$ и $P_1, P_2, \dots$ — сходящаяся последовательность касательных плоскостей к конусам $K_F(X_1), K_F(X_2), \dots$. Тогда предельная плоскость P_0 есть касательная плоскость к конусу $K_F(X_0)$.

2) Каждая точка X поверхности F имеет окрестностьU, которая в надлежаще выбранных декартовых координатах x, y, z представлена уравнением $z = f(x, y)$, причем касательный конус в точках из U не имеет касательных плоскостей, перпендикулярных к плоскости x, y.

Из анонса [70] Ю.Д. Бураго следует, что геометрию всякого МОК можно рассматривать как внутреннюю геометрию некоторой поверхности в $\mathbb{R}^3$.

Пусть в двумерном многообразии M заданы внутренняя метрика ρ и последовательность многогранных метрик ρ_n. Метрики ρ_n *пропорционально сходятся к* ρ, если $\frac{\rho_n(X,Y)}{\rho(X,Y)} \to 1$ при $n \to \infty$ равномерно относительно X, Y.

Ю.Г. Решетняк доказал, что если метрика ρ имеет в каждой точке касательный конус (в смысле внутренней метрики), то ρ аппроксимируется пропорционально сходящимися многогранными метриками [89].

Обозначим через Φ класс несамопересекающихся поверхностей в $\mathbb{R}^3$, у которых в каждой точке существует касательная плоскость. (Эти поверхности, вообще говоря, не являются гладкими). Утверждается, что верны

Теорема. *Пусть метрика ρ, заданная на двумерном многообразии M, допускает аппроксимацию пропорционально сходящимися многогранными метриками ρ_n. Тогда существует поверхность $F \in \Phi$ с внутренней метрикой ρ.*

Следствие 1. *Пусть в каждой точке двумерного ориентируемого многообразия M с внутренней метрикой ρ существует касательный конус. Тогда существует поверхность $F \in \Phi$ с внутренней метрикой ρ.*

Следствие 2. *Всякое ориентируемое МОК, не имеющее точек с кривизной 2π, с границей в виде кривой с ограниченной вариацией поворота или лишенное границы, изометрично некоторой поверхности $F \in \Phi$.*

10. Решение задачи Борисова о метрических основаниях римановой геометрии

Статья В.Н. Берестовского [16] (поступила в редакцию СМЖ 11.03.1974 г.), см. также [10], [91], была первым шагом в решении задачи Ю.Ф. Борисова о метрических основаниях римановой геометрии, поставленной в 1970 году для моей дипломной работы. В качестве таких оснований в работе было принято простое соединений аксиом геодезического пространства американского математика Герберта Буземана из его книги [72] и некоторого условия на углы достаточно малых треугольников из кратчайших на с. 210 из книги Э. Картана [73], сформулированного в статье в виде аксиомы А) (см. п. 11.3 в [10]).

При данных условиях в статье 1975 г. доказано, что каждое такое метрическое пространство изометрично некоторому метрически полному риманову многообразию некоторой конечной размерности $n \geq 1$ класса C^0. Более точно, n-мерному многообразию с атласом класса C^1 из карт, каждая из которых определяется локально расстояниями до некоторых n-ок точек; при этом компоненты метрического тензора относительно карт этого атласа непрерывны.

В заключении к статье высказано предположение, что на самом деле введенные в работе координаты (в статье они *не называются дистанционными*) задают атлас класса $C^{1,1}$, а компоненты метрического тензора в этих координатах липшицевы. Кроме того, там со ссылкой на [8] сказано, что аксиому А) можно заменить на сформулированную аксиому В) или аксиому С).

Из этого ясно, что тогда автор ни сном, ни духом не ведал о *пространствах А.Д. Александрова двусторонне или односторонне ограниченной кривизны.*

Уже после публикации этой статьи, но до моей защиты в 1979 году, после моего доклада о ней, и возможно, о каких-то других моих результатах, на семинаре кафедры геометрии и топологии Александр Данилович сказал мне, что фактически приведённые в моей статье условия эквивалентны тому, что рассматриваются (метрически полные) конечномерные многообразия с внутренней метрикой (локально) ограниченной сверху и снизу кривизны (в его смысле).

Более просто эти пространства можно характеризовать как метрически полные локально компактные пространства с внутренней метрикой, локальными условиями продолжаемости кратчайших и ограниченности сверху и снизу кривизны по Александрову, [3], [10], [91]. Как следствие, от аксиом Буземана остаются только условия полноты и локальной продолжаемости кратчайших. Можно опустить и условие метрической полноты без ущерба для исследований.

Каждое такое пространство далее обозначается M.

В [83] И.Г. Николаев вводит геометрическую конструкцию параллельного переноса касательных векторов в M вдоль дифференцируемых и даже спрямляемых кривых, обладающего обычными свойствами, и на основе этого доказывает, что компоненты метрического тензора относительно дистационных координат липшицевы. Отсюда следует, что почти во всех точках дифференцируемой кривой существуют и ограничены первые обобщенные производные [97] компонент метрического тензора в дистанционных координатах. Это позволяет аналитически ввести параллельный перенос вдоль дифференцирумых кривых и установить его совпадение с ранее определенным параллельным переносом.

Далее в [84] автор вводит в M ковариантное дифференцирование векторных полей с липшицевыми компонентами относительно базисных векторных полей дистанционных координат, скобки Ли таких векторных полей и устанавливает, что скобки имеют имеют обычный геометрический смысл. Это позволяет определить соответствующий тензор кручения и доказать, что он равен нулю. И.Х. Сабитов и С.З. Шефель в [96] рассматривали гармонические координаты при изучении вопросов, связанных с гладкостью метрики римановых пространств. Применением теорем о гладкости обобщенных решений эллиптических уравнений [80] на компоненты метрического тензора в гармонических координатах, выведенных с помощью [96], и работы [96] И.Г. Николаев получает в [84] окончательный результат о гладкости M: *Пространство M допускает атлас класса $C^{3,\alpha}$, $0 < 0 < 1$, из гармонических координат. Компоненты метрического тензора в каждой системе таких координат являются непрерывными функциями соболевского класса W_q^2* [97]*, где q может быть любым числом, не меньшим* 1. *Вследствие теорем вложения* [80]*, компоненты метрического тензора в гармонических координатах принадлежат $C^{1,\alpha}$*, $0 < 0 < 1$.

Часто писали, что И.Г. Николаев и В.Н. Берестовский нашли *решение проблемы А.Д. Александрова о синтетическом определении римановых пространств.*

Слышал один раз, что и дистанционные координаты ввел Александров. На самом деле это не так. Напомню, что эту проблему другими словами поставил мне Ю.Ф. Борисов в 1970 году; выражение “синтетическое бескоординатное описание римановой геометрии” на с. 4 в [10] применил я.

Двумерные поверхности двусторонне ограниченной кривизны по Александрову называются ещё *поверхностями ограниченной удельной кривизны.* В 1948 г. А.В. Погорелов анонсирует в статье “Однозначная определенность выпуклых поверхностей” теорему об однозначной определенности замкнутых выпуклых поверхностей ограниченной удельной (неотрицательной) кривизны, а в статье 1949 года под тем же названием (ссылка 59, [86]) публикует подробное изложение доказательства этой теоремы на 100 страницах в Трудах института Стеклова. Эта работа была докторской диссертацией А.В. Погорелова, она же удостоена Государственной премии. (Воспоминания Н.В. Ефимова, с. 116 в [20]).

В [87] А.В. Погорелов доказывает анонсы трех журналов ДАН СССР 1990 г.

Следующая теорема 1 главы 4 из [87] — усиление основной теоремы 5 в [16]:

G-пространство Буземана [72], *в котором пересекающиеся кратчайшие образуют определенный угол, непрерывно зависящий от кратчайших, является римановым пространством с непрерывным метрическим тензором относительно C^1-атласа из систем дистанционных координат.*

Доказательство в [87] аналогично доказательству основной теоремы 5 в [16].

Трудно представить, как проходили бы исследования после доказательства в 1975 году теоремы в данной здесь формулировке вместо теоремы 5 из [16].

В главе 2 из [87] даются минимальные условия регулярности метрической функции финслерова пространства, чтобы оно было пространством Буземана.

Доказано, что финслерово пространство со строго выпуклой метрической функцией класса $C^{1,1}$ есть G-пространство, и эту степень регулярности нельзя ослабить. Именно, для любого $0 < \alpha < 1$ существуют финслеровы пространства с метрической функцией класса $C^{1,\alpha}$, не являющиеся G-пространствами.

В главе 3 из [87] решается обратная задача: каким минимальным условиям должна подчиняться метрика G-пространства, чтобы оно было финслеровым?

Доказано: если в G-пространстве Буземана пересекающиеся кратчайшие имеют определенный наклон друг к другу, непрерывно зависящий от кратчайших, то G-пространство финслерово с непрерывной метрической функцией.

[18]*: Каждое G-пространство Буземана локально ограниченной снизу кривизны по Александрову является римановым $C^{0,1/2}$-многообразием (компоненты метрического тензора являются $C^{0,1/2}$-функциями относительно дистанционных координат; любые две карты с дистанционными координатами $C^{1,1/2}$-согласованы).*

[19]*: Каждое G-пространство Буземана локально ограниченной сверху кривизны по Александрову является римановым C^0-многообразием (с непрерывными относительно дистанционных координат компонентами метрического тензора; любые две карты с дистанционными координатами C^1-согласованы).*

Ввиду сформулированных выше результатов, стоит привести известные сведения о топологической структуре G-пространства Буземана M в общем случае. Другими словами, о “Буземанщине”, как выражался Юрий Федорович.

Не известно, конечномерно ли всякое пространство M.

[17]*: Пространство M конечномерно, если содержит непустую открытую область U, удовлетворяющую одному из двух условий:*

1) всякий шар, содержащийся в U, выпуклый;

2) U локально имеет кривизну $\geq K$ по Александрову.

Как следствие, пространство M (локально) неположительной кривизны по Буземану (в котором локально длина средней линии каждого треугольника из кратчайших не больше половины соответствующей его стороны) конечномерно.

Каждое пространство M топологически однородно.

Более точно, для любых двух точек $x, y \in M$ существует такая изотопия $f : M \times [0,1] \to M$, что отображение $f(\cdot, 0)$ тождественно и $f(x,1) = y$.

Не известно, каждое ли n-мерное пространство M $(n \geq 5)$ – многообразие.

Да при n=1, 2 (Буземан, 1955), n=3 (Б. Кракус, 1968), n=4 (П. Тёрстон, 1996).

В настоящее время известно единообразное доказательство для этих случаев.

Павел Дмитриевич Андреев (1960–2019) доказал замечательную теорему:

[11]*: Каждое пространство M неположительной кривизны по Буземану является топологическим многообразием, универсальное накрытие которого гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ при некотором натуральном n.*

Следующий результат вместе с другими я анонсировал на стр. 42 в тезисах сообщений IX Всесоюзной геометрической конференции 1988 г. в Кишиневе.

Каждое связное локально компактное однородное пространство M с внутренней метрикой кривизны $\leq K$ по Александрову изометрично конечномерному однородному риманову многообразию секционной кривизны $\leq K$.

К моему большому сожалению, в отличие от всех известных мне тогда геометров, мне не удалось побывать на этой конференции в Кишиневе. И теперь, судя по всему, мне никогда не придется посетить этот город.

11. Воспоминания

Воспоминания Ю.Ф. Борисова в [69] дополняются воспоминаниями о нем или упоминаниями его в статьях (внучки) А.Н. Борисовой, А.К. Гуца, В.А. Залгаллера, С.С. Кутателадзе, Ю.Г. Решетняка, М.А. Розова, Е.Ф. Фурмакова из [78]; Ю.Г. Решетняка и А.Л. Вернера из [20]; Ю.Г. Решетняка в [92] и [93]; С.С. Кутателадзе в "примечании при корректуре" в конце [46]; А.К. Гуца в [77].

Ю.Ф. начинает свои воспоминания в [69] с первой, "судьбоносной встречи с А.Д.", "молодым мужчиной с рыжими усами" в конце марта или 1-го апреля 1945 г., в результате которой он стал студентом матмеха ЛГУ накануне весенней сессии. Далее Ю.Ф. пишет: "интуиция, опирающаяся на твердость целлулоидного шарика с тонкой стенкой, подсказывала отрицательный ответ (на вопрос 1). ... Однако все попытки доказать даже некоторую вспомогательную гипотезу проваливались. И тут произошло неожиданное. Будучи в Швейцарии на юбилее теории относительности, А.Д. рассказал известному математику Хопфу о безуспешности наших усилий, а тот посоветовал обратиться к работе Нэша ([81]) о C^1-вложениях римановых пространств в евклидово. В конце этой работы было замечание, из которого легко следовала, в частности, изгибаемость сферы с сохранением гладкости. Расценив сложившуюся ситуацию как чрезвычайную, А.Д. попросил Ю.А.Волкова привезти мне статью Нэша (дело было летом, и я, ни о чем не подозревая, жил на даче). Прочтя статью, я в тот же день понял, что вспомогательная гипотеза о гладкости кратчайших на гладкой поверхности с "хорошей" метрикой тоже неверна, и освободился от напрасных стараний. Похоже, что рука судьбы продолжала действовать тем же способом, что и в 1945 г."

Из письма А.Д. Александрова от 11.11.1959 г., с. 217 в [78]: "Борисов рассказывает в семинаре свою работ о нерегулярных изгибах регулярных поверхностей и подавляет всех сложностью своих рассуждений и выкладок. Прекрасная работа! Я очень рад за Борисова, за нашу геометрию, за себя тоже."

Научно-популярная статья [64] — рассказ о "теореме, которая кажется верной, но вот уже десяток лет никак не доказывается". Она оформлена в виде интервью: вопросов, которые задавали Ю.Ф., и его ответов на них, написана живым языком как 130-летняя детективная история о (не)изгибаемости "овалоидов" на примере сферы. Любой пересказ даст весьма неполное представление о ней.

Поэтому ограничимся в основном перечислением того, о чём в ней сказано.

Рассказ начинается с того, что очень просто согнуть (без растяжений и сжатий) тонкую целлулоидную пластинку, но трудно изменить форму шарика для пинг-понга (модели сферы). Но при этом вопрос об изгибании поверхностей чисто геометрический и не имеет отношения к упругим свойствам материалов.

Гипотезу о неизгибаемости сферы (без нарушения гладкости, т.е. без изломов) высказал еще Миндинг в 1838 г., доказал Либман в 1899 г., Кон-Фоссен (ученик Гильберта) доказал в 1927 году неизгибаемость любой замкнутой выпуклой поверхности ("овалоида"), если только она искривлена достаточно плавно. В 1951 г. А.В. Погорелов доказал неизгибаемость любых овалоидов.

И вдруг в работах Нэша и Кёйпера 1954 и 1955 гг. была доказана возможность превратить сферу без изменения длин кривых, без изломов и самопересечений в сколь угодно малый комочек. (Противоречие в математике?) Какой чувствительный удар нанесен геометрической интуиции!

После дальнейших исследований стало ясно, что хотя сферу можно изогнуть, но "степень гладкости" при этом уменьшается. Ю.Ф. не даёт чёткого определения этого понятия, только говорит, что оно определяется числом α, $0 \leq \alpha \leq 1$.

В 1959 г. Ю.Ф. доказал, что для изогнутой сферы $\alpha \leq 2/3$. Надо найти критическое значение α^* степени гладкости, т.е. степени "вынужденной порчи" сферы при изгибании. Установлено, что $1/13 \leq \alpha^* \leq 2/3$. "Больше пока ничего не известно. Есть только гипотеза, что $\alpha^* = 1/2$. Доводы в её пользу серьезные, но ни доказать, ни опровергнуть эту гипотезу не удаётся ... больше десяти лет."

В 1954 г. Юрий Григорьевич Решетняк защитил кандидатскую диссертацию "О длине и повороте кривой и о площади поверхности". Вот часть его воспоминаний об этом на с. 41-42 в [78]: "За время аспирантуры у меня набралось много материала по теории кривых и по теории площади, из которого и была составлена диссертация на 200 страниц. Но сделать это аккуратно, как требовалось, я не успевал. ... В спешке я допустил некорректность в определении кривой. Все это вызвало недовольство моего официального оппонента Сергея Михайловича Лозинского. Мне помог второй оппонент диссертации Юрий Федорович Борисов, который дал подробный обзор содержания диссертации. Надо сказать, что Александр Данилович на мою защиту прийти не мог, но представил в ученый совет свой отзыв, в котором он отметил мою работу об изотермических координатах. Возникшая после моего доклада, выступлений оппонентов и зачтения отзыва А.Д. (с учетом активного выступления Андрея Андреева Маркова в отношении моих неаккуратностей в диссертации) дискуссия принесла мне несколько голосов "воздержался" и один "против".", [92], [93].

Вот еще одно воспоминание Ю.Г. на с. 114 в [20] : “Я неоднократно бывал в Харькове ... . Первая моя поездка состоялась в 1962 году: я был оппонентом докторской диссертации Юрия Федоровича Борисова. В соответствии со странным правилом ВАК, действовавшим в то время, защита Борисова не могла состояться в Ленинграде, где тогда жил Юрий Федорович.”

Лекции по аналитической геометрии нашему курсу читал Игорь Александрович Шведов, а по дифференциальной геометрии Александр Данилович Александров. Экзамен по диф.геометрии я сдал Виктору Андреевичу Топоногову. Помню, что экзамен по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений, который нам читал Владислав Васильевич Пухначёв, сдал Сергею Львовичу Соболеву, ненадолго, возможно случайно, зашедшему на экзамен.

Считаю, что понятие о математической строгости получил на лекциях Глеба Павловича Акилова по математическому и функциональному анализу.

Я впервые увидел Ю.Ф.Борисова на втором курсе на лекции по диф.геометрии, когда он заменял Александра Даниловича Александрова. После экзаменов по окончании 2-го курса, решил на пляже Обского моря, что буду специализироваться на кафедре геометрии и топологии, которую возглавлял А.Д. Александров. Но познакомился с кафедрой геометрии и топологии и выбрал научного руководителя не сразу. Наверное это произошло на 4-м курсе. Люблю самостоятельность и свободу действий. Именно поэтому выбрал Ю.Ф.Борисова. Я ему не досаждал. На 4-м курсе лишь раз обсуждал с ним некоторые детали предложенной им темы курсовой работы, а затем уже рассказывал на заседании кафедры о полученных результатах.

Нужно было дать оценку скорости сходимости длин вписанных в регулярную кривую класса C^2 в евклидовом пространстве ломаных к длине кривой при условии, что максимальная длина звеньев ломаных стремится к нулю. Сейчас думаю, что доказанные в курсовой работе результаты заслуживали публикации, но работа утеряна и видимо об этом не стоит сожалеть.

Студентом сдавал экзамены по римановой геометрии Ю.Ф. Борисову вместе с В.В. Усовым по книге П.К. Рашевского “Риманова геометрия и тензорный анализ”, (или аспирантом) Юрию Григорьевичу Решетняку, читавшему спецкурс по интегральной геометрии с элементами групп Ли, и Наилю Хайрулловичу Ибрагимову по спецкурсу, включавшему группы и алгебры Ли.

Во время первого поступления в аспирантуру в 1971 году, уже после сдачи вступительных экзаменов по математике и английскому языку не сдал экзамен по истории КПСС, отказался сам отвечать, так как не знал хорошо второй вопрос из экзаменационного билета. Не буду рассказывать о реакции А.Д. при первой нашей встрече после этого экзамена. Благодаря его поддержке, я год был стажером в НГУ и через год поступил в аспирантуру при НГУ.

В бытность стажером и аспирантом основное внимание уделял изучению книг “Риманова геометрия в целом” Д. Громола, В. Клингенберга и В. Мейера и “Непрерывные группы” Л.С. Понтрягина. Первая научила меня бескоординатному подходу к римановой геометрии, вторая вместе с решениями 5-й проблемы Гильберта сыграла важную роль при подготовке докторской диссертации.

При сдаче экзамена по математике в аспиратуре доказывал какую-то теорему из римановой геометрии В.А. Топоногову и теорему Г. Вейля (теорема 110 из книги Понтрягина) Льву Николаевичу Ивановскому. Позже теорему Вейля я (возможно, кто-то еще) доказал, используя методы римановой геометрии.

Предложенная Ю.Ф. Борисовым постановка задачи для моей дипломной работы "дать характеризацию римановых многообразий в терминах геометрических свойств их внутренней метрики" определила все мои основные дальнейшие геометрические исследования. Этой темы хватило не только для дипломной работы "К условию существования тензора кривизны", но и кандидатской диссертации "К метрическим основаниям римановой геометрии" и во многом для докторской диссертации "Однородные пространства с внутренней метрикой", защищенной в Институте математики Сибирского Отделения Академии Наук СССР в 1990 г. Названия дипломной работы, кандидатской диссертации и "дистанционные" для введенных в ней координат предложил А.Д.Александров.

Названия моей кандидатской и тезисов [51] Ю.Ф. Борисова одинаковы!

В 1991 г. Институт математики стал называться как Институт математики СО РАН, позднее Постановлением Президиума РАН № 217 с 29 ноября 1994 года переименован в Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН.

Ю.Ф. много раз упоминал в разговорах статью [75] и рассказывал о своих исследованиях $C^{1,\alpha}$-изометрических погружений, шутил, что видимо смог доказать первую половину гипотезы 1 лишь при замене неравенства $\alpha > 1/2$ более сильным $\alpha > 2/3$ ($\alpha = 2/3$ у С.З. Шефеля) потому, что во многих случаях для принятия положительного решения требуется $\geq 2/3$ поданных голосов.

Он любил стихи и поэмы Н.А. Некрасова и не раз цитировал их мне наизусть.

References

[1] A.D. Alexandrov, *Foundations of intrinsic geometry of surfaces*, Doklady AN SSSR, 60:9 (1948), 1483–1486.

[2] A.D. Alexandrov, *Curves in manifolds of bounded curvature*, Doklady AN SSSR, 63:4 (1948), 349–352.

[3] A.D. Alexandrov, *One theorem on triangles in a metric space and some its applications*, Tr. MIAN SSSR, 38 (1951), 5–23.

[4] A.D. Alexandrov, *Contemporary developement of the surface theory*, in book: International Mathematical Congress in Edinburgh 1958 (Survey talks), Fiz.-mat. lit., Moscow, 1962, 7–26.

[5] A.D. Alexandrov, Yu.F. Borisov, *Riemannian geometry*, BSE, M., 1955, Vol. 3, 520–523. BSE, 3d ed., M.,1975, Vol. 22, 116–119.

[6] A.D. Alexandrov, Yu.F. Borisov, *On chronogeometry*, Fundamentalnye issledovaniya (Fiz.-mat. i tekhn. nauki), Novosibirsk, 1977, 20–22.

[7] A.D. Alexandrov, Yu.F. Borisov, *Riemannian geometry*, Mat. encycloped. slovar. M.,1988, 528–531.

[8] A.D. Alexandrov, V.A. Zalgaller, *Intrinsic Geometry of Surfaces*, Providence: Amer. Math. Soc., 1967. 327 p. (Transl. Math. Monogr. Vol. 15).

[9] A.D. Alexandrov, V.V. Ovchinnikova, *Remarks to the foundations of Relativity theory*, Vestn. LGU, Ser. matematiki, fiziki i khimii, 11:4 (1953), 95–110.

[10] A.D. Alexandrov, V.N. Berestovskii, I.G. Nikolaev, *Generalized Riemannian spaces*, Russian Math. Surveys, 41:3(1986), 1-54. DOI:https://doi.org/10.1070/RM1986v041n03ABEH003311

[11] P.D. Andreev, *Proof of the Busemann conjecture for G-spaces of nonpositive curvature*, St. Petersburg Math. J., 26:2 (2015), 193–206. DOI:https://doi.org/10.1090/S1061-0022-2015-01336-8

[12] S.N. Astrakov S.N., *On mappings of pseudoeuclidean spaces, preserving the isotropy of vectors*, Siber. Math. J., 31:1 (1990), 10–20. DOI:https://doi.org/10.1007/BF00971144

[13] I.Ya. Bakelman, *Nonregular surfaces of bounded extrinsic curvature*, Doklady AN SSSR, 119:4 (1958), 631–632.

[14] I.Ya. Bakelman, *Chebyshev nets in manifolds of bounded curvature*, Tr. MIAN CCCR, 76, Nauka, M.–L. 1965, 124–129.

[15] I.Ya. Bakelman, A.L. Verner, B.E. Kantor, *Introduction to the global differential geometry*, M.: Nauka, 1973.

[16] V.N. Berestovskii, *Introduction of a Riemannian structure in certain metric spaces*, Siber. Math. J., 16:4(1975), 499-507. DOI:https://doi.org/10.1007/BF00967122

[17] V.N. Berestovskii, *On the problem of a Busemann G-space to be finite-dimensional*, Siber. Math. J., 18:1(1977), 159-161. DOI:https://doi.org/10.1007/BF00966962

[18] V.N. Berestovskii, *Manifolds with intrinsic metric of A.D. Alexandrov curvature, bounded from one side*, Mat. fiz. Analiz. Geom. 1:1 (1994), 41–59.

[19] V.N. Berestovskii, *Busemann spaces of Alexandrov curvature bounded above*, St. Petersburg Math. J., 14:5(2003), 713-723.

[20] A.A. Borisenko, (Ed.), *Олексій Васильович Погорелов*, NAN Ukrainy, Fiziko-tekhnichnyi institut nizkikh temperatur ім. Б.I.Verkina. – Kiev: Akademperiodika, 2018. – 132 pp. doi:https://doi.org/10.15407/akademperiodyka.373.132

[21] Yu.F. Borisov, *Curves on complete two-dimwnsional manifolds with boundary*, Doklady AN SSSR, 64:1 (1949), 9–12.

[22] Yu.F. Borisov, *Manifolds of bounded curvature with boundary*, Doklady AN SSSR, 74:5 (1950), 877–880.

[23] Yu.F. Borisov, *Geometry of semineighborhood of curve in two-dimensional manifold of bounded curvature*, Doklady AN SSSR, 103:4 (1955), 537–539. 3-i Vsesoyuznyi mat. s'ezd.: Trudy, Moscow, 1 (1956), 142–143.

[24] Yu.F. Borisov, *On one extrinsic geometric property of geodesics on smooth surfaces*, Vestn. LGU, Ser. matematiki, fiziki i khimii, 19:4 (1956), 35–40.

[25] Yu.F. Borisov, *Parallel translantion on the smooth surface*, Vestn. LGU, Ser. matematiki, fiziki i khimii, — I. — 7:2 (1958), 160–171. II. — 19:4 (1958), 45–54; III. — 1:1 (1959), 34–50; IV. — 13:3 (1959), 83–92.

[26] Yu.F. Borisov, *On the connection of space form of smooth surfaces with their intrinsic geometry*, Vestn. LGU, Ser. matematiki, fiziki i khimii, I, 13:3 (1959), 20–26; II. *Corrections: To the question on parallel translation on the smooth surface and on the connection of space form of smooth surfaces with their intrinsic geometry*, 19:4 (1960), 127–129.

[27] Yu.F. Borisov, *On transformations of pseudoeuclidean space, preserving the isotropy of vectors*, Izv. vuzov. Matematika. 1960, No. 6, 31–39.

[28] Yu.F. Borisov, *Continuous bending of nonregular surfaces, isometric to a piece of the plane*, Izv. vuzov. Matematika. 1961, No. 2, 3–9.

[29] Yu.F. Borisov, $C^{1,\alpha}$*-isometric immersions of Riemannian spaces*, Doklady AN SSSR, 163:1 (1965), 11–13.

[30] Yu.F. Borisov, *Semineighborhood and variation of the length of a curve on the surface*, Tr. MIAN CCCR, 76, Nauka, M.–L. 1965, 26–48.

[31] Yu.F. Borisov, *Parallel translation on the Hölder curves in a Riemannian space*, Doklady AN SSSR, 197:5 (1971), 995–998.

[32] Yu.F. Borisov, S.Z. Shefel, *Surfaces of bounded extrinsic and positive curvature*, Doklady AN SSSR, 200:2 (1971), 259–261.

[33] Yu.F. Borisov, *On one property of continuous function*, Doklady AN SSSR, 201:6 (1971), 1271–1274.

[34] Yu.F. Borisov, *On axiomatic definition of the Galilei and the Lorentz group*, Siber. Math. J., 19:6 (1978), 870–882. DOI:https://doi.org/10.1007/BF00972791

[35] Yu.F. Borisov, *To foundations of relativistic kinematics*, Siber. Math. J., 27:3 (1986), 312–327. DOI:https://doi.org/10.1007/BF00969266

[36] Yu.F. Borisov, *Unambiguous (up to the orientation) definability of the time by the space structure of the event set*, Siber. Math. J., 28:4 (1987), 562–568. DOI:https://doi.org/10.1007/BF00973843

[37] Yu.F. Borisov, *Two questions on metric foundations of the Riemannian geometry*, Doklady RAN, 336:2 (1994), 154–156.

[38] Yu.F. Borisov, *Differential properties of manifolds with intrinsic metric*, Doklady RAN, 341:3 (1995), 299–300.

[39] Yu.F. Borisov, *Removable of a priori restrictions in theorem on complete system of invariants for a curve in* E^n_l, Siber. Math. J., 38:3 (1997), 411–427. DOI:https://doi.org/10.1007/BF02683830

[40] Yu.F. Borisov, *To the theorem on the natural equations of a curve*, Siber. Math. J., 40:4 (1999), 617–621. DOI:https://doi.org/10.1007/BF02675664

[41] Yu.F. Borisov, *Vector curvature of the surface in the Hilbert space and the Gauss theorem*, Siber. Math. J., 41:6 (2000), 1042–1060. DOI:https://doi.org/10.1023/A:1004812018372

[42] Yu.F. Borisov, *Geometric proof of the Bianchi identity*, Matem. struktury i modelirovanie, 6 (2000)/ Pod red. A.K. Gutsa, 21–28.

[43] Yu.F. Borisov, *The linear connection as an equivalence class of isomorphisms of tangent spaces*, Matem. sruktury i modelirovanie, 8 (2001), / Pod red. A.K. Gutsa, 5–9.

[44] Yu.F. Borisov, *Contribution of A.D. Alexandrov and his school into applied mathematics (to 90th anniversary)*, Sib. jurn. industr. matematiki, 5:3 (2002), 3–4.

[45] Yu.F. Borisov, *Nonregular surfaces of* $C^{1,\beta}$*-class with analytic metric*, Siber. Math. J., 45:1 (2004), 19–52. DOI:https://doi.org/10.1023/B:SIMJ.0000013011.51242.23

[46] Yu.F. Borisov, *Deduction of relativistic kinematics from classical mechanics and bounded exactness of conceivable experiments*, Sib. jurn. industr. matematiki, 11:1 (2008), 23–36.

[47] Yu.F. Borisov, *Manifolds of bounded curvature with the boundary*, Avtoref. kand. diss. L.: 1950.

[48] Yu.F. Borisov, *On connection of extrinsic and intrinsic geometry of smooth surfaces*, Avtoref. doct. diss. Kharkov: 1962.

[49] Yu.F. Borisov, *Parallel translation of vector and curves on nonregular smooth surfaces*, Vsesoyuznyi mat. s'ezd. 3-i: Trudy, Moscow, June-July1956. Moscow, V. 1, 141–142.

[50] Yu.F. Borisov, *The Levi–Civita parallelism and the problem of immersion of Riemannian manifold*, ICM, Moscow, 1966: Geometry, Section 9, Abstracts, 23–24.

[51] Yu.F. Borisov, *To metric foundations of Riemannian geometry*, Vsesoyuz. conf.-shk. po geometrii "v tselom": Tez. dokl., Novosibirsk, 28–30 sent. 1987. Novosibirsk, S. 18.

[52] Yu.F. Borisov, *Connection of space and time in the Euclidean kinematics*, Vsesoyuz. conf.-shk. po geometrii "v tselom": Tez. dokl., Novosibirsk, 28–30 sent. 1987. Novosibirsk, S. 19.

[53] Yu.F. Borisov, *Characterization of* C^1*-Riemannian spaces in the class of* C^2*-smooth manifolds with intrinsic metric*, Vsesoyuz. geom. conf. 9-ya: Tez. soobscch., Kishinev, 20–22 sent, 1988. Kishinev, S. 48.

[54] Yu.F. Borisov, *Two-dimensional manifolds of bounded curvature*, Mezd. conf.-schk. po geom. i an., posv. pamyati A.D. Alexandrova: Tez. dokl., Novosibirsk, 2002. Novosibirsk, S. 8–10.

[55] Yu.F. Borisov, *On chronogeometry*, Mezd. conf.-schk. po geom. i an., posv. pamyati A.D. Alexandrova: Tez. dokl., Novosibirsk, 2002. Novosibirsk, S. 10–11.

[56] Yu.F. Borisov, *Two-dimensional manifolds of bounded curvature*, Tr. po geom. i analizu: Mezd. conf.-schk. po geom. i an., posv. pamyati A.D. Alexandrova: Tez. dokl., Novosibirsk, 2002. Novosibirsk, 2003. S. 69–71.

[57] Yu.F. Borisov, *On chronogeometry* // Tr. po geom. i analizu: Mezd. conf.-schk. po geom. i an., posv. pamyati A.D. Alexandrova: Tez. dokl., Novosibirsk, 2002. Novosibirsk, 2003. S. 72–73.

[58] Yu.F. Borisov, *Problems 3–6*, Rabochii material (dlya oznakomleniya spetsialistov v oblasti geometrii. Institut matematiki SO AN SSSR, Novosibirsk: 1984.
[59] Yu.F. Borisov, *The Jordan theorem*, in: A.D. Alexandrov, Izbrannye trudy, Tom 2. Vypuklye mnogogranniki, Novosibirsk, ''Nauka", 2007, 68–71.
[60] Yu.F. Borisov, *Theorem on the domain invariance*, in: A.D. Alexandrov, Izbrannye trudy, Tom 2. Vypuklye mnogogranniki, Novosibirsk, ''Nauka", 2007, 145–150.
[61] Yu.F. Borisov, *Lectures on mathematical analysis with elements of differential geometry*, Chast' 1, Novosibirsk: NGU, 1972. 274 s.
[62] Yu.F. Borisov, ed., *Methodological problems of mathematics*: Sbornik, Novosibirsk: Nauka, 1979. 302 s.
[63] Yu.F. Borisov, *Mechanical determinism and the structure of the number line*, Metodologicheskie problemy matematiki: Sbornik, Novosibirsk: Nauka, 1979, 39–47.
[64] Yu.F. Borisov, *The theorem which is not yet proved*, Znanie – sila, 1971, № 6, 40–41.
[65] Yu.F. Borisov, Yu.G. Reshetnyak, *To vertices of mathematics (to 60th anniversary of A.D. Alexandrov)*, Za nauku v Sibiri, 1972, 9 avg., № 31.
[66] Yu.F. Borisov, *Important direction – chronogeometry*, Za nauku v Sibiri, 1978, 12 yanv., № 3.
[67] Yu.F. Borisov, Yu.G. Reshetnyak, *The aim is a peak (to 70th anniversary of A.D. Alexandrov)*, Nauka v Sibiri, 1982, 29 iyulya.
[68] Yu.F. Borisov, *In the fourth dimension: to 75th anniversary of A.D. Alexandrov*, Nauka v Sibiri, 1987, 30 yulya.
[69] Yu.F. Borisov, *Reminiscences on A.D. Alexandrov*, in: [78], 97–106.
[70] Yu.D. Burago, *Realization of two-dimensional metrized manifolds by a surface in E^3*, Doklady AN SSSR, 135:6 (1960), 1301–1302.
[71] Yu.D. Burago, *Geometry of surfaces in Euclidean spaces*, Itogi nauki i tekhniki. Sovremennye problemy matematiki. Fundamentalnye napravleniya. Tom 48. M.: VINITI, 1989, 5 –97.
[72] H. Busemann, *The geometry of geodesics*, Academic Press Inc., New York, N.Y., 1955.
[73] E. Cartan, *Geometry of Riemannian spaces*, Math. Sci. Press, Brookline, Mass., 1983.
[74] St.E. Cohn-Vossen, *Totalkrümmung und geodätische Linien auf einfachzusammenhängenden offenen vollständigen Flächenstücken*, Matem. sb., 43:2 (1936), 139–164.
[75] M.L. Gromov, V.A. Rochlin, *Embeddings and immersions in Riemannian geometry*, Russian Math. Surveys, 25:5 (1970), 1–57. DOI:https://doi.org/10.1070/RM1970v025n05ABEH003801
[76] M. Gromov, *Partial Differential Relations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1986.
[77] A.K. Guts, *Geometers and topologists of Novosibirsk University in 1960 years*, Matem. structury i modelirovanie, 2024, № 3(71), 106–125.
[78] G.M. Idlis, O.A. Ladyzhenskaya (Eds.), *Academician Alexander Danilovich Alexandrov*, M.: Nauka, 2002.
[79] N.H. Kuiper, *On C^1-isometric embeddings*, I. Proc. Koninkl. Nederl. Ak. Wet., A-58, 1955, 545–546.
[80] O.A. Ladyzhenskaya, Uraltseva N.N., *Linear and quasilinear equations of elliptic type*, M.: Nauka, 1964.
[81] John Nash, *C^1-isometric embeddings*, Ann. Math., 60:3 (1954), 383– 396.
[82] John Nash, *The embedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. Math., 63:1 (1956), 20–63.
[83] I.G. Nikolaev, *On parallel translation of vectors in spaces with curvature that is bilaterally bounded in the sense of A.D. Alexandrov*, Siber. Math. J., 24:1 (1983), 106–119. DOI:https://doi.org/10.1007/BF00968803
[84] I.G. Nikolaev, *Smoothness of the metric of spaces with curvature that is bilaterally bounded in the sense of A.D. Alexandrov*, Siber. Math. J., 24:2 (1983), 247–263. DOI:https://doi.org/10.1007/BF00968740
[85] A.V. Pogorelov, *Surfaces of bounded extrinsic curbature*, Izd-vo Kharkovskogo un-ta, 1956.

[86] A.V. Pogorelov, *Extrinsic geometry of convex surfaces*, Izd-vo “Nauka”, Fizmatlit, Moscow, 1969.

[87] A.V. Pogorelov, *Busemann regular G-spaces*, Rev. in Math. and Math. Phys. 1998. 10. Part 4. 102 p.

[88] Yu.G. Reshetnyak, *Isothermal coordinates in manifolds of bounded curvature*, Doklady AN SSSR, 94:4 (1954), 631–633.

[89] Yu.G. Reshetnyak, *Investigations of manifolds with bounded curvature by means of isothermal coordinates*, Izv. Sib. otd-niya AN SSSR, 1959, № 10, 15–28.

[90] Yu.G. Reshetnyak, *Isothermal coordinates in manifolds of bounded curvature*, I, II, Sib. mat. zhurn., 1:1 (1960), 88–116; 1:2 (1960), 248–276.

[91] Yu.G. Reshetnyak, (Ed.), Geometry IV, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Volume 70, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York,..., 1993.

[92] Yu.G. Reshetnyak, *Yurii Fedorovich Borisov (To 80th anniversary)*, Sib. Electron. Mat. Izv., 2 (2005), A.1–A.4.

[93] Yu.G. Reshetnyak, *How I has become to study two-dimensional manifolds of bounded curvature*, Sib. Electron. Mat. Izv., 21:1 (2024), 259–265. DOI:https://doi.org/doi.org/10.33048/semi.2024.21.018

[94] Yu.G. Reshetnyak, S.K. Vodopianov, V.I. Kuzminov, S.S. Kutateladze, I.A. Taimanov, *Yurii Fedorovich Borisov (1925–2007)*, Sib. Electron. Mat. Izv., 4 (2007), A.28–A.30.

[95] Yu.G. Reshetnyak, S.K. Vodopianov, V.I. Kuzminov, S.S. Kutateladze, I.A. Taimanov, *Yurii Fedorovich Borisov (1925–2007)*, Nauka v Sibiri, № 43 (2628), 8 noyabrya 2007.

[96] I.Kh. Sabitov, S.Z. Shefel, *On connections between the orders of smoothness of a surface and its metric*, Siber. Math. J., 17:4 (1976), 687–694. DOI:https://doi.org/10.1007/BF00971679

[97] S.L. Sobolev, *Some applications of the functional analysis in the mathematical physics*, 3-e izd. M.: Nauka, Fizmatlit, 1988.

[98] S.Z. Shefel, *C^1-smooth isometric immersions*, Siber. Math. J., 15:6 (1974), 972–987. DOI:https://doi.org/10.1007/BF00966565

[99] S.Z. Shefel, *The smoothness of conformal mapping of Riemannian spaces*, Siber. Math. J., 23:1 (1982), 119–124. DOI:https://doi.org/10.1007/BF00971428

[100] V.V. Usov, *On the length of spherical image of geodesic on convex surface*, Siber. Math. J., 17:1 (1976), 185–188. DOI:https://doi.org/10.1007/BF00969306

V.N. Berestovskii, Sobolev Institute of Mathematics of the SB RAS,
4 Koptyug Av., Novosibirsk, 630090, Russia

Email address: `vberestov@inbox.ru`