S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 519.151
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 05B35

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НАСЛЕДСТВЕННЫХ СИСТЕМ И КОМАТРОИДОВ В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИЙ РАНГА И ОБХВАТА

В.П. Ильев, А.В. Моршинин

Abstract: In this paper, hereditary systems, matroids and comatroids are studied. We propose two new equivalent definitions: a defenition of a hereditary system in terms of the upper rank function and a definition of a comatroid in terms of the girth function.

Keywords: hereditary system, matroid, comatroid, rank, girth.

1 Введение

Пусть U — непустое конечное множество, $\mathcal{A} \subseteq 2^U$ — непустое семейство его подмножеств, удовлетворяющих следующей *аксиоме наследственности*:

$$(A1)\ \ J \in \mathcal{A},\ \ I \subseteq J \Rightarrow I \in \mathcal{A}.$$

Множества семейства $\mathcal{A}$ называются *независимыми*, а само семейство $\mathcal{A}$ в литературе обычно называют *системой независимости* или *наследственным семейством* [2]. Через $\mathcal{B}$ обозначим семейство всех *баз*, т. е. максимальных по включению множеств семейства $\mathcal{A}$.

Il'ev, V.P., Morshinin A.V., Paper.

Исследование А.В. Моршинина выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10015, https://rscf.ru/project/22-71-10015/.

Поступила 1 января 2024 г., опубликована 31 декабря 2024 г.

Очень многие задачи комбинаторной оптимизации могут быть сформулированы следующим образом:

$$\max\{f(X) : X \in \mathcal{B}\} \quad \text{или} \quad \min\{f(X) : X \in \mathcal{B}\}, \tag{1}$$

где $f : 2^U \to R_+$ — монотонная неотрицательная функция множеств, а $\mathcal{B}$ – семейство баз некоторой системы независимости на множестве U.

Задачи (1) являются обобщениями таких известных задач комбинаторной оптимизации, как, например, задача об остовном дереве максимального или минимального веса, максимизационная и минимизационная задачи о p-медиане, задача о максимальном независимом множестве вершин в графе и многие другие.

В то же время имеется большое число задач комбинаторной оптимизации, которые можно рассматривать как частные случаи следующих оптимизационных задач:

$$\max\{f(X) : X \in \mathcal{C}\} \quad \text{или} \quad \min\{f(X) : X \in \mathcal{C}\}, \tag{2}$$

где $f : 2^U \to R_+$ — монотонная неотрицательная функция множеств, а $\mathcal{C}$ — семейство *циклов* (т. е. минимальных по включению множеств) непустого семейства $\mathcal{D} \subseteq 2^U$ подмножеств U, обладающего свойством *наследственности "вверх"*:

$$(D1)\ I \in \mathcal{D},\ I \subseteq J \Rightarrow J \in \mathcal{D}.$$

К ним относятся, в частности, задача о покрытии множества и ее частный случай — задача о минимальном вершинном покрытии в графе, задача об остовном k-связном подграфе минимального веса и другие. Некоторые задачи, такие как уже упомянутые задачи об остовном дереве и о p-медиане, могут быть сведены как к модели (1), так и к модели (2).

Множества семейства $\mathcal{D}$ обычно называют *зависимыми*, поэтому семейство $\mathcal{D}$ было бы естественно называть *системой зависимости* на U. Заметим однако, что каждая система независимости $\mathcal{A}$ однозначно определяет систему зависимости $\mathcal{D} = 2^U \setminus \mathcal{A}$, и наоборот. Поэтому их можно рассматривать как различные стороны одного и того же универсального объекта, который мы будем называть наследственной системой.

В работе предлагается новое эквивалентное определение наследственной системы в терминах верхнего ранга, а также определение коматроида – наследственной системы, дополнительной к матроиду – в терминах функции обхвата.

2 Наследственные системы, матроиды и коматроиды

Определим *наследственную систему* $\boldsymbol{S}$ на множестве U как разбиение семейства 2^U всех подмножеств U на два непересекающихся семейства $\mathcal{A}$ и $\mathcal{D}$, где $\mathcal{A}$ — система независимости, а $\mathcal{D} = 2^U \setminus \mathcal{A}$. Семейства всех баз и всех циклов системы $\boldsymbol{S}$ будем обозначать через $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, соответственно. Очевидно, что каждое из семейств $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ однозначно определяет наследственную систему $\boldsymbol{S}$, поэтому будем записывать $\boldsymbol{S} = (U, \mathcal{A})$, $\boldsymbol{S} =$

$(U,\mathcal{B})$, $\boldsymbol{S} = (U,\mathcal{C})$ или $\boldsymbol{S} = (U,\mathcal{D})$ в зависимости от того, какая сторона наследственной системы будет нас интересовать.

С каждой наследственной системой $\boldsymbol{S} = (U,\mathcal{A})$ тесно связана *дополнительная система* или *косистема* $\boldsymbol{S}'$, семейство зависимых множеств которой определяется как $\mathcal{D}' = \{U \setminus A \ : \ A \in \mathcal{A}\}$. Нетрудно проверить, что семейства независимых множеств, баз и циклов системы $\boldsymbol{S}'$ могут быть заданы как $\mathcal{A}' = \{U \setminus D \ : \ D \in \mathcal{D}\}$, $\mathcal{B}' = \{U \setminus C \ : \ C \in \mathcal{C}\}$, $\mathcal{C}' = \{U \setminus B \ : \ B \in \mathcal{B}\}$. Ясно, что $(\boldsymbol{S}')' = \boldsymbol{S}$, так что наследственные системы $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}'$ взаимно дополнительны. Заметим, что косистема и система зависимости в общем случае являются разными объектами.

В качестве примера дополнительных систем рассмотрим наследственную систему графа и дополнительную к ней. Если $G = (V,E)$ — обыкновенный граф, то *наследственной системой графа* G будем называть наследственную систему $\boldsymbol{S}_G = (V,\mathcal{A}_G)$, где $\mathcal{A}_G$ — семейство всех независимых множеств вершин графа G (множество вершин графа называется *независимым*, если любые две вершины в нем несмежны). Циклы этой системы взаимно однозначно соответствуют ребрам графа G. Хорошо известно, что дополнениями независимых множеств в графе являются вершинные покрытия. Поэтому семейство $\mathcal{D}'_G = \{V \setminus A : A \in \mathcal{A}_G\}$ всех вершинных покрытий в графе G будет семейством зависимых множеств дополнительной наследственной системы $\boldsymbol{S}'_G = (V,\mathcal{D}'_G)$.

Важным частным случаем понятия наследственной системы является понятие *матроида*, введенное в 1935 г. Уитни [7].

Матроид на множестве U может быть определен как наследственная система $\boldsymbol{M} = (U,\mathcal{A})$, в которой все базы любого множества $W \subseteq U$ имеют одинаковую мощность (*базой множества* W называется любое его максимальное по включению независимое подмножество).

Примером является *p-однородный* матроид $\boldsymbol{M}_p = (U,\mathcal{A}_p)$, где $\mathcal{A}_p = \{A \subseteq U : |A| \leqslant p\}$, p — натуральное число, $p < |U|$.

Рангом $r(X)$ множества $X \subseteq U$ в матроиде $\boldsymbol{M} = (U,\mathcal{A})$ называется мощность любой базы множества X. Другими словами

$$r(X) = \max\{|A| : A \subseteq X, A \in \mathcal{A}\} \tag{3}$$

Хорошо известно эквивалентное определение матроида в терминах ранга. Его эквивалентность приведенному ранее определению матроида вытекает из следующей известной теоремы [7].

Теорема 1. *1) Пусть $\boldsymbol{M} = (U,\mathcal{A})$ – матроид. Тогда функция ранга (3) удовлетворяет условиям: для всех $X, Y \subseteq U$*

$(r1)$ $0 \leqslant r(X) \leqslant |X|$,
$(r2)$ $X \subseteq Y \Rightarrow r(X) \leqslant r(Y)$,
$(r3)$ $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leqslant r(X) + r(Y)$,

причем имеет место равенство

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq U : r(A) = |A|\}. \tag{4}$$

2) И наоборот, пусть U – непустое конечное множество, $r : 2^U \to \mathbb{Z}_+$ – функция множеств, удовлетворяющая условиям $(r1)$–$(r3)$. Тогда $\boldsymbol{M} = (U, \mathcal{A})$ — матроид, где семейство $\mathcal{A} \subseteq 2^U$ определено по правилу (4) и для всех $X \subseteq U$ имеет место равенство (3).

Наследственную систему, дополнительную к матроиду, будем называть *коматроидом*. Коматроиды под именем верхних матроидов рассматривались Ковалевым [4].

Примером коматроида может служить *p-однородный* коматроид $\boldsymbol{K}_p = (U, \mathcal{D}_p)$, где $\mathcal{D}_p = \{D \subseteq U : |D| \geqslant p\}$, p — натуральное число, $p < |U|$. Очевидно, что этот коматроид дополнителен к $(n-p)$-однородному матроиду $\boldsymbol{M}_{n-p}$, где $n = |U|$. Другой пример — коматроид $\boldsymbol{K} = (E, \mathcal{D})$, где $\mathcal{D}$ — семейство всех связных остовных подграфов связного графа $G = (V, E)$, рассматриваемых как множества ребер. Циклами этого коматроида являются остовные деревья графа G, а базами дополнительного матроида – максимальные по включению множества ребер, после удаления которых оставшийся граф связен.

Как и матроиды, коматроиды представляют собой универсальные комбинаторные объекты, обладающие многими чертами, сходными с матроидами. Подобно матроидам, они допускают довольно много различных аксиоматических определений.

Наследственные системы и их частные случаи — матроиды и коматроиды — естественным образом возникают в различных областях математики, таких как линейная алгебра, теория графов, теория трансверсалей (см. [5, 6]) и других разделах комбинаторного анализа, например, при изучении свойств комбинаторных геометрий [1].

3 Ранговые функции наследственной системы

По аналогии с рангом матроида, определим 2 ранговые функции наследственной системы $\boldsymbol{S} = (U, \mathcal{A})$ для всех $X \subseteq U$:

$$r_l(X) = \min\{|A| : A - \text{база множества}\, X\},$$
$$r_u(X) = \max\{|A| : A - \text{база множества}\, X\}.$$

Число $r_l(X)$ называется *нижним рангом* множества X, а число $r_u(X)$ называется *верхним рангом* множества X. Легко видеть, что

$$r_u(X) = \max\{|A| : A \subseteq X, A \in \mathcal{A}\}. \tag{5}$$

Заметим, что в матроиде $r_l(X) = r_u(X) = r(X)$ для любого $X \subseteq U$, а в наследственной системе, отличной от матроида – нет.

Замечание 1. *Функции множеств $r_l, r_u : 2^U \to \mathbb{Z}_+$ удовлетворяют условиям: для всех $X, Y \subseteq U$*

$(r'1)$ $0 \leqslant r_l(X) \leqslant r_u(X) \leqslant |X|$,
$(r'2)$ $X \subseteq Y \Rightarrow r_l(X) \leqslant r_l(Y), r_u(X) \leqslant r_u(Y)$.

Замечание 2. *Если $\boldsymbol{S} = (U, \mathcal{A})$ – наследственная система, то*

$$A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow r_l(A) = r_u(A) = |A|.$$

Поэтому

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq U : r_u(A) = |A|\}. \tag{6}$$

Мы предлагаем новое эквивалентное определение наследственной системы в терминах функции r_u. Его эквивалентность определению в терминах независимых множеств устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. *1) Пусть $\boldsymbol{S} = (U, \mathcal{A})$ – наследственная система. Тогда функция верхнего ранга (5) удовлетворяет условиям: для всех $X, Y \subseteq U$*

(r_u1) $0 \leqslant r_u(X) \leqslant |X|$,
(r_u2) $X \subseteq Y \Rightarrow r_u(X) \leqslant r_u(Y)$,
(r_u3) $r_u(X \cup Y) \leqslant r_u(X) + r_u(Y)$,
(r_u4) $r_u(X) = \max\{|A| : A \subseteq X, r_u(A) = |A|\}$,

причем имеет место равенство (6).

2) И наоборот, пусть U – непустое конечное множество, $r_u : 2^U \to \mathbb{Z}_+$ – функция множеств, удовлетворяющая условиям (r_u1)–(r_u4). Тогда $\boldsymbol{S} = (U, \mathcal{A})$ – наследственная система, где семейство $\mathcal{A} \subseteq 2^U$ определено по правилу (6) и для всех $X \subseteq U$ имеет место равенство (5).

Доказательство. 1) Условия (r_u1) и (r_u2) верны по определению верхней ранговой функции.

Докажем условие (r_u3). Рассмотрим произвольные X и Y – подмножества U. Пусть J – наибольшая база множества $X \cup Y$ такая, что $r_u(X \cup Y) = |J|$. Представим J в виде $J = J_X \cup J_{X\cap Y} \cup J_Y$, где $J_X \subseteq X$, $J_Y \subseteq Y$, $J_{X\cap Y} \subseteq X \cap Y$, причем все 3 множества не пересекаются. Поскольку $J_X \cup J_{X\cap Y} \subseteq X$ и $J_Y \subseteq Y$, то $r_u(X) \geqslant |J_X \cup J_{X\cap Y}|$ и $r_u(Y) \geqslant |J_Y|$. Тогда $r_u(X) + r_u(Y) \geqslant |J_X \cup J_{X\cap Y}| + |J_Y| = |J| = r_u(X \cup Y)$.

Докажем условие (r_u4). В силу равенства (5) и замечания 2

$$r_u(X) = \max\{|A| : A \subseteq X, A \in \mathcal{A}\} = \max\{|A| : A \subseteq X, r_u(A) = |A|\}.$$

Равенство (6) это замечание 2.

2) Пусть функция множеств $r_u : 2^U \to \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет условиям (r_u1)–(r_u4). Рассмотрим семейство $\mathcal{A}$, определенное по правилу (6). Заметим, что из (r_u1) следует, что $r_u(\emptyset) = 0$, а значит это семейство не пусто. Докажем, что $\mathcal{A}$ обладает свойством $(A1)$.

Пусть $J \in \mathcal{A}$, т.е. $r_u(J) = |J|$. Пусть $I \subseteq J$. Докажем, что $r_u(I) = |I|$. В силу (r_u3): $r_u(I) + r_u(J \setminus I) \geqslant r_u(I \cup (J \setminus I)) = r_u(J) = |J|$. С другой стороны, если $r_u(I) < |I|$, то по условию (r_u1): $r_u(I) + r_u(J \setminus I) < |I| + |J \setminus I| = |J|$. Полученное противоречие доказывает, что семейство $\mathcal{A}$ обладает свойством $(A1)$.

Осталось доказать равенство (5). Из свойства (r_u4) следует, что $r_u(X)$ равняется мощности наибольшего $A \subseteq X$ такого, что $r_u(A) = A$. Другими словами, $r_u(X)$ равняется мощности наибольшего $A \subseteq X$ такого, что $A \in \mathcal{A}$. Это и есть равенство (5).

Теорема 2 доказана. □

Замечание 3. *Свойство ($r_u 4$) не является избыточным. Несложно построить пример функции, которая обладает свойствами ($r_u 1$)–($r_u 3$), но при этом не выполняется (5). Другими словами, эта функция не определяет наследственную систему. Таким примером для множества $U = \{1, 2, 3\}$ может служить следующая функция:*

$$r_u(\emptyset) = 0,$$
$$r_u(\{1\}) = r_u(\{2\}) = r_u(\{3\}) = 1,$$
$$r_u(\{1, 2\}) = r_u(\{1, 3\}) = r_u(\{2, 3\}) = 1,$$
$$r_u(\{1, 2, 3\}) = 2.$$

Легко видеть, что свойства ($r_u 1$)–($r_u 3$) выполнены, однако $r_u(U) = 2$, в то время как мощность любого независимого подмножества множества U не превосходит 1.

4 Функция обхвата коматроида

Помимо определения коматроида как дополнительной к матроиду наследственной системы, мы можем определить его как наследственную систему $\boldsymbol{K} = (U, \mathcal{D})$, в которой все циклы любого множества $W \subseteq U$ имеют одинаковую мощность (*циклом множества* W называется любое его минимальное по включению зависимое надмножество).

Также известно [3], что наследственная система $\boldsymbol{K} = (U, \mathcal{D})$ является коматроидом тогда и только тогда, когда семейство ее зависимых множеств помимо свойства ($D1$) обладает также следующим свойством:

$$(D2)\ \ I, J \in \mathcal{D}, |J| = |I| + 1 \Rightarrow \exists d \in J \setminus I : J \setminus \{d\} \in \mathcal{D}.$$

Обхватом $g(X)$ множества $X \subseteq U$ в коматроиде $\boldsymbol{K} = (U, \mathcal{D})$ называется мощность любого цикла множества X. Другими словами

$$g(X) = \min\{|D| : X \subseteq D, D \in \mathcal{D}\}. \qquad (7)$$

Роль функции $g(X)$ аналогична роли функции $r(X)$ в матроиде. Термин обхват взят из теории графов, где *обхватом графа* называется длина кратчайшего простого цикла.

Далее будем считать, что $\mathcal{D}$ непусто, иначе наследственная система $\boldsymbol{K} = (U, \mathcal{D})$ – это матроид. Если $\mathcal{D}$ непусто, то $U \in \mathcal{D}$ и $g(U) = |U|$.

Замечание 4. *Если $\boldsymbol{K} = (U, \mathcal{D})$ – коматроид, то семейство его зависимых множество определяется по следующему правилу:*

$$\mathcal{D} = \{D \subseteq U : g(D) = |D|\}. \qquad (8)$$

Аналогичное свойство верно и для любой косистемы. Следующая теорема дает эквивалентное определение коматроида в терминах обхвата.

Теорема 3. *1) Пусть $\boldsymbol{K} = (U, \mathcal{D})$ – коматроид. Тогда функция обхвата (7) удовлетворяет условиям: для всех $X, Y \subseteq U$*

$(g1)$ $g(X) \geqslant |X| \geqslant 0$,
$(g2)$ $X \subseteq Y \Rightarrow g(X) \leqslant g(Y)$,
$(g3)$ $g(X \cup Y) + g(X \cap Y) \geqslant g(X) + g(Y)$,

причем имеет место равенство (8).

2) И наоборот, пусть $g : 2^U \to \mathbb{Z}_+$ *– функция множеств, удовлетворяющая условиям* $(g1)$*–*$(g3)$*. Тогда* $\boldsymbol{K} = (U, \mathcal{D})$ *– коматроид, где семейство* $\mathcal{D} \subseteq 2^U$ *определено по правилу (8) и для всех* $X \subseteq U$ *имеет место равенство (7).*

Доказательство. 1) Условия $(g1)$ и $(g2)$ верны по определению функции обхвата.

Докажем свойство $(g3)$. Рассмотрим произвольные X и Y – подмножества U. Пусть $J = \{j_1, \ldots, j_k\} \in \mathcal{D}$ – некоторый цикл множества $X \cup Y$. Удалением элементов из J получаем сначала цикл множества X: $J_1 = \{j_1, \ldots, j_{k-t}\}$, а затем цикл множества $X \cap Y$: $J_2 = \{j_1, \ldots, j_{k-t-m}\}$ (здесь мы воспользовались свойством $(D2)$). Имеем $k = g(X \cup Y)$, $k - t = g(X)$, $k - t - m = g(X \cap Y)$. Поскольку $\{j_1, \ldots, j_{k-t-m}, j_{k-t+1}, \ldots, j_k\}$ – зависимое множество, содержащее Y и состоящее из $k - t - m + t = k - m$ элементов, то $k - m \geqslant g(Y)$. Следовательно,

$$g(X \cup Y) + g(X \cap Y) = k + (k - t - m) =$$
$$(k - t) + (k - m) \geqslant g(X) + g(Y).$$

Равенство (8) это замечание 4.

2) Пусть функция $g : 2^U \to \mathbb{Z}_+$ удовлетворяет условиям $(g1)$–$(g3)$. Рассмотрим семейство $\mathcal{D}$, определенное по правилу (8). Докажем, что это семейство обладает свойствами $(D1)$ и $(D2)$.

Проверим свойство $(D1)$. Пусть $I \in \mathcal{D}$, $J \supseteq I$. Предположим противное, т.е. $g(J) > |J|$. Тогда по свойству $(g3)$: $g(U \setminus (J \setminus I)) + g(J) \leqslant g(U) + g(I) = |I| + |U|$. С другой стороны, по свойству $(g1)$: $g(U \setminus (J \setminus I)) + g(J) > |U \setminus (J \setminus I)| + |J| = |U \setminus J| + |I| + |J| = |U| + |I|$. Значит $g(J) = |J|$, т.е. $J \in \mathcal{D}$.

Прежде чем перейти к доказательству свойства $(D2)$, докажем вспомогательное утверждение.

Пусть $I \subset J \subseteq U$, $g(J) = |J|$ и $J \setminus I = \{p_1, \ldots, p_t\}$. Если $g(J \setminus \{p_s\}) = g(J)$ для всех $s = 1, \ldots, t$, то $g(I) = |J|$.

Предположим, что $g(J \setminus \{p_1, \ldots, p_s\}) = |J|$ для некоторого $s \in \{1, \ldots, t-1\}$. Заметим, что $(J \setminus \{p_1, \ldots, p_s\}) \cap (J \setminus \{p_{s+1}\}) = J \setminus \{p_1, \ldots, p_{s+1}\}$, а также $(J \setminus \{p_1, \ldots, p_s\}) \cup (J \setminus \{p_{s+1}\}) = J$. Тогда по свойствам $(g2)$ и $(g3)$

$$|J| = g(J) \geqslant g(J \setminus \{p_1, \ldots, p_{s+1}\}) \geqslant$$
$$g(J \setminus \{p_1, \ldots, p_s\}) + g(J \setminus \{p_{s+1}\}) - g(J) = |J| + |J| - |J| = |J|.$$

Следовательно, $g(J \setminus \{p_1, \ldots, p_{s+1}\}) = |J|$. Из доказанного, очевидно, вытекает равенство $g(I) = |J|$.

Проверим свойство $(D2)$. Пусть $I, J \in \mathcal{D}$, $|I| = k$, $|J| = k+1$. Предположим, что $J \setminus \{p_s\} \notin \mathcal{D}$ для всех $s \in \{1, \ldots, t\}$. С учетом вспомогательного утверждения $g(J \cap I) = g(J \setminus (J \setminus I)) = |J| = k + 1$. С другой стороны, в силу $(g2)$: $g(J \cap I) \leqslant g(I) = k$. Полученное противоречие доказывает, что семейство $\mathcal{D}$ обладает свойством $(D2)$.

Осталось доказать равенство (7). Если $X \subseteq U$ – зависимое множество, т.е. $X \in \mathcal{D}$, то равенство (7) очевидно. Докажем это равенство для всех независимых множеств $X \subset U$, т.е. для всех $X \notin \mathcal{D}$.

Пусть $X \subset U$ произвольное независимое множество, $g(X) > |X|$. Пусть $D \subseteq U$ – наименьшее зависимое множество такое, что $X \subset D$. Покажем, что $g(X) = |D|$. Заметим, что $g(D) = |D|$.

Пусть $D \setminus X = \{p_1, \dots, p_t\}$. В силу минимальности D для всех $s \in \{1, \dots, t\}$ множество $D \setminus \{p_s\}$ – независимое, т.е. $g(D \setminus \{p_s\}) > |D \setminus \{p_s\}|$. Тогда

$$|D| = g(D) \geqslant g(D \setminus \{p_s\}) > |D \setminus \{p_s\}| = |D| - 1,$$

т.е. $g(D \setminus \{p_s\}) = |D|$ для всех $s \in \{1, \dots, t\}$. В силу доказанного утверждения $g(X) = |D|$.

Теорема 3 доказана.

$\square$

5 Заключение

Цель нашего исследования состоит в изучении алгебраических свойств универсальных комбинаторных объектов – наследственных систем и их частных случаев коматроидов – наследственных систем, дополнительных к матроидам. Как было отмечено во введении, семейства независимых и зависимых множеств наследственных систем являются множествами допустимых решений большого количества задач комбинаторной оптимизации, значительная часть которых NP-трудны. Изученные свойства наследственных систем могут оказаться полезными при разработке алгоритмов приближенного решения таких задач.

References

[1] H.H. Crapo, G.-C. Rota, *On the foundations of combinatorial theory II: combinatorial geometries*, Cambridge Mass.: MIT Press, (1970)

[2] M. Grötschel, L. Lovász, *Combinatorial optimization*, In *Handbook of Combinatorics*, Graham R.O., Grötschel M., Lovász L., eds., Amsterdam: Elsevier Science B.V., **2** (1995), 1341–1598

[3] V.P. Il'ev, *Hereditary systems and greedy-type algorithms*, Discrete Appl. Math., **132**(1–3), (2003), 137–148

[4] M.M. Kovalev, *Matroidy v diskretnoi optimizatsii*, Minsk: Universitetskoe, (1987); 2nd ed. M.: URSS, (2003)

[5] D.J.A. Welsh, *Matroid theory*, London: Academic Press, (1976)

[6] N. White, ed., *Theory of matroids*, Cambrige: Cambrige Univ. Press., (1986)

[7] H. Whitney, *On the abstract properties of linear dependence*, Amer. J. Math. **57**(3), (1935), 509–533

Victor Petrovich Il'ev
Dostoevsky Omsk State University,
Mira pr., 55A,
644077, Omsk, Russia
Email address: iljev@mail.ru

Aleksandr Vladimirovich Morshinin
Sobolev Institute of Mathematics,
Pevtsova st., 13,
644099, Omsk, Russia
Email address: morshinin.alexander@gmail.com