

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НАСЛЕДСТВЕННЫХ СИСТЕМ  
И КОМАТРОИДОВ В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИЙ  
РАНГА И ОБХВАТАВ.П. ИЛЬЕВ , А.В. МОРШИНИН 

**Abstract:** In this paper, hereditary systems, matroids and comatroids are studied. We propose two new equivalent definitions: a definition of a hereditary system in terms of the upper rank function and a definition of a comatroid in terms of the girth function.

**Keywords:** hereditary system, matroid, comatroid, rank, girth.

## 1 Введение

Пусть  $U$  — непустое конечное множество,  $\mathcal{A} \subseteq 2^U$  — непустое семейство его подмножеств, удовлетворяющих следующей *аксиоме наследственности*:

$$(A1) \quad J \in \mathcal{A}, I \subseteq J \Rightarrow I \in \mathcal{A}.$$

Множества семейства  $\mathcal{A}$  называются *независимыми*, а само семейство  $\mathcal{A}$  в литературе обычно называют *системой независимости* или *наследственным семейством* [2]. Через  $\mathcal{B}$  обозначим семейство всех баз, т. е. максимальных по включению множеств семейства  $\mathcal{A}$ .

---

IL'EV, V.P., MORSHININ A.V., PAPER.

© 2024 Ильев В.П., Моршинин А.В..

Исследование А.В. Моршинина выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-10015, <https://rscf.ru/project/22-71-10015/>.

Поступила 1 января 2024 г., опубликована 31 декабря 2024 г.

Очень многие задачи комбинаторной оптимизации могут быть сформулированы следующим образом:

$$\max\{f(X) : X \in \mathcal{B}\} \text{ или } \min\{f(X) : X \in \mathcal{B}\}, \quad (1)$$

где  $f : 2^U \rightarrow R_+$  — монотонная неотрицательная функция множеств.

Задачи (1) являются обобщениями таких известных задач комбинаторной оптимизации, как, например, задача об остовном дереве максимального или минимального веса, максимизационная и минимизационная задачи о  $p$ -медиане, задача о максимальном независимом множестве вершин в графе и многие другие.

В то же время имеется большое число задач комбинаторной оптимизации, которые можно рассматривать как частные случаи следующих оптимизационных задач:

$$\max\{f(X) : X \in \mathcal{C}\} \text{ или } \min\{f(X) : X \in \mathcal{C}\}, \quad (2)$$

где  $f : 2^U \rightarrow R_+$  — монотонная неотрицательная функция множеств, а  $\mathcal{C}$  — семейство *циклов* (т. е. минимальных по включению множеств) непустого семейства  $\mathcal{D} \subseteq 2^U$  подмножеств  $U$ , обладающего свойством *наследственности "вверх"*:

$$(D1) \quad I \in \mathcal{D}, I \subseteq J \Rightarrow J \in \mathcal{D}.$$

К ним относятся, в частности, задача о покрытии множества и ее частный случай — задача о минимальном вершинном покрытии в графе, задача об остовном  $k$ -связном подграфе минимального веса и другие. Некоторые задачи, такие как уже упомянутые задачи об остовном дереве и о  $p$ -медиане, могут быть сведены как к модели (1), так и к модели (2).

Множества семейства  $\mathcal{D}$  обычно называют *зависимыми*, поэтому семейство  $\mathcal{D}$  было бы естественно называть *системой зависимости* на  $U$ . Заметим однако, что каждая система независимости  $\mathcal{A}$  однозначно определяет систему зависимости  $\mathcal{D} = 2^U \setminus \mathcal{A}$ , и наоборот. Поэтому их можно рассматривать как различные стороны одного и того же универсального объекта, который мы будем называть наследственной системой.

В работе предлагается новое эквивалентное определение наследственной системы в терминах верхнего ранга, а также определение коматроида — наследственной системы, дополнительной к матроиду — в терминах функции обхвата.

## 2 Наследственные системы, матроиды и коматроиды

Определим *наследственную систему*  $\mathcal{S}$  на множестве  $U$  как разбиение семейства  $2^U$  всех подмножеств  $U$  на два непересекающихся семейства  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{D}$ , где  $\mathcal{A}$  — система независимости, а  $\mathcal{D} = 2^U \setminus \mathcal{A}$ . Семейства всех баз и всех циклов системы  $\mathcal{S}$  будем обозначать через  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{C}$ , соответственно. Очевидно, что каждое из семейств  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{D}$  однозначно определяет наследственную систему  $\mathcal{S}$ , поэтому будем записывать  $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ ,  $\mathcal{S} =$

$(U, \mathcal{B})$ ,  $\mathcal{S} = (U, \mathcal{C})$  или  $\mathcal{S} = (U, \mathcal{D})$  в зависимости от того, какая сторона наследственной системы будет нас интересовать.

С каждой наследственной системой  $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$  тесно связана *дополнительная система* или *косистема*  $\mathcal{S}'$ , семейство зависимых множеств которой определяется как  $\mathcal{D}' = \{U \setminus A : A \in \mathcal{A}\}$ . Нетрудно проверить, что семейства независимых множеств, баз и циклов системы  $\mathcal{S}'$  могут быть заданы как  $\mathcal{A}' = \{U \setminus D : D \in \mathcal{D}\}$ ,  $\mathcal{B}' = \{U \setminus C : C \in \mathcal{C}\}$ ,  $\mathcal{C}' = \{U \setminus B : B \in \mathcal{B}\}$ . Ясно, что  $(\mathcal{S}')' = \mathcal{S}$ , так что наследственные системы  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{S}'$  взаимно дополнительные.

В качестве примера дополнительных систем рассмотрим наследственную систему графа и дополнительную к ней. Если  $G = (V, E)$  — обыкновенный граф, то *наследственной системой графа*  $G$  будем называть наследственную систему  $\mathcal{S}_G = (V, \mathcal{A}_G)$ , где  $\mathcal{A}_G$  — семейство всех независимых множеств вершин графа  $G$  (множество вершин графа называется *независимым*, если любые две вершины в нем несмежны). Циклы этой системы взаимно однозначно соответствуют ребрам графа  $G$ . Хорошо известно, что дополнениями независимых множеств в графе являются вершинные покрытия. Поэтому семейство  $\mathcal{D}'_G = \{V \setminus A : A \in \mathcal{A}_G\}$  всех вершинных покрытий в графе  $G$  будет семейством зависимых множеств дополнительной наследственной системы  $\mathcal{S}'_G = (V, \mathcal{D}'_G)$ .

Важным частным случаем понятия наследственной системы является понятие *матроида*, введенное в 1935 г. Уитни [7].

*Матроид* на множестве  $U$  может быть определен как наследственная система  $\mathcal{M} = (U, \mathcal{A})$ , в которой все базы любого множества  $W \subseteq U$  имеют одинаковую мощность (*базой множества*  $W$  называется любое его максимальное по включению независимое подмножество).

Примером является  *$p$ -однородный* матроид  $\mathcal{M}_p = (U, \mathcal{A}_p)$ , где  $\mathcal{A}_p = \{A \subseteq U : |A| \leq p\}$ ,  $p$  — натуральное число,  $p < |U|$ .

*Рангом*  $r(X)$  множества  $X \subseteq U$  в матроиде  $\mathcal{M} = (U, \mathcal{A})$  называется мощность любой базы множества  $X$ . Другими словами

$$r(X) = \max\{|A| : A \subseteq X, A \in \mathcal{A}\} \quad (3)$$

Хорошо известно эквивалентное определение матроида в терминах ранга. Его эквивалентность приведенному ранее определению матроида вытекает из следующей известной теоремы [7].

**Теорема 1.** 1) Пусть  $\mathcal{M} = (U, \mathcal{A})$  — матроид. Тогда функция ранга (3) удовлетворяет условиям: для всех  $X, Y \subseteq U$

- (r1)  $0 \leq r(X) \leq |X|$ ,
- (r2)  $X \subseteq Y \Rightarrow r(X) \leq r(Y)$ ,
- (r3)  $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$ ,

причем имеет место равенство

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq U : r(A) = |A|\}. \quad (4)$$

2) И наоборот, пусть  $U$  – непустое конечное множество,  $r : 2^U \rightarrow \mathbb{Z}_+$  – функция множеств, удовлетворяющая условиям (r1)–(r3). Тогда  $\mathbf{M} = (U, \mathcal{A})$  – матроид, где семейство  $\mathcal{A} \subseteq 2^U$  определено по правилу (4) и для всех  $X \subseteq U$  имеет место равенство (3).

Наследственную систему, дополнительную к матроиду, будем называть *коматроидом*. Коматроиды под именем верхних матроидов рассматривались Ковалевым [4].

Примером коматроида может служить  $p$ -однородный коматроид  $\mathbf{K}_p = (U, \mathcal{D}_p)$ , где  $\mathcal{D}_p = \{D \subseteq U : |D| \geq p\}$ ,  $p$  – натуральное число,  $p < |U|$ . Очевидно, что этот коматроид дополнителен к  $(n - p)$ -однородному матроиду  $\mathbf{M}_{n-p}$ , где  $n = |U|$ . Другой пример – коматроид  $\mathbf{K} = (E, \mathcal{D})$ , где  $\mathcal{D}$  – семейство всех связных остовных подграфов связного графа  $G = (V, E)$ , рассматриваемых как множества ребер. Циклами этого коматроида являются остовные деревья графа  $G$ .

Как и матроиды, коматроиды представляют собой универсальные комбинаторные объекты, обладающие многими чертами, сходными с матроидами. Подобно матроидам, они допускают довольно много различных аксиоматических определений.

Наследственные системы и их частные случаи – матроиды и коматроиды – естественным образом возникают в различных областях математики, таких как линейная алгебра, теория графов, теория трансверселей (см. [5, 6]) и других разделах комбинаторного анализа, например, при изучении свойств комбинаторных геометрий [1].

### 3 Ранговые функции наследственной системы

По аналогии с рангом матроида, определим 2 ранговые функции наследственной системы  $\mathbf{S} = (U, \mathcal{A})$  для всех  $X \subseteq U$ :

$$\begin{aligned} r_l(X) &= \min\{|A| : A \text{ – база множества } X\}, \\ r_u(X) &= \max\{|A| : A \text{ – база множества } X\}. \end{aligned}$$

Число  $r_l(X)$  называется *нижним рангом* множества  $X$ , а число  $r_u(X)$  называется *верхним рангом* множества  $X$ . Легко видеть, что

$$r_u(X) = \max\{|A| : A \subseteq X, A \in \mathcal{A}\}. \quad (5)$$

**Замечание 1.** Функции множеств  $r_l, r_u : 2^U \rightarrow \mathbb{Z}_+$  удовлетворяют условиям: для всех  $X, Y \subseteq U$

$$\begin{aligned} (r'1) \quad & 0 \leq r_l(X) \leq r_u(X) \leq |X|, \\ (r'2) \quad & X \subseteq Y \Rightarrow r_l(X) \leq r_l(Y), r_u(X) \leq r_u(Y). \end{aligned}$$

**Замечание 2.** Если  $\mathbf{S} = (U, \mathcal{A})$  – наследственная система, то

$$A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow r_l(A) = r_u(A) = |A|.$$

Поэтому

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq U : r_u(A) = |A|\}. \quad (6)$$

Мы предлагаем новое эквивалентное определение наследственной системы в терминах функции  $r_u$ . Его эквивалентность определению в терминах независимых множеств устанавливается следующей теоремой.

**Теорема 2.** 1) Пусть  $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$  – наследственная система. Тогда функция верхнего ранга (5) удовлетворяет условиям: для всех  $X, Y \subseteq U$

- ( $r_u1$ )  $0 \leq r_u(X) \leq |X|$ ,
- ( $r_u2$ )  $X \subseteq Y \Rightarrow r_u(X) \leq r_u(Y)$ ,
- ( $r_u3$ )  $r_u(X \cup Y) \leq r_u(X) + r_u(Y)$ ,
- ( $r_u4$ )  $r_u(X) = \max\{|A| : A \subseteq X, r_u(A) = |A|\}$ ,

причем имеет место равенство (6).

2) И наоборот, пусть  $U$  – непустое конечное множество,  $r_u : 2^U \rightarrow \mathbb{Z}_+$  – функция множеств, удовлетворяющая условиям ( $r_u1$ )–( $r_u4$ ). Тогда  $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$  – наследственная система, где семейство  $\mathcal{A} \subseteq 2^U$  определено по правилу (6) и для всех  $X \subseteq U$  имеет место равенство (5).

*Доказательство.* 1) Условия ( $r_u1$ ) и ( $r_u2$ ) верны по определению верхней ранговой функции.

Докажем условие ( $r_u3$ ). Рассмотрим произвольные  $X$  и  $Y$  – подмножества  $U$ . Пусть  $J$  – наибольшая база множества  $X \cup Y$  такая, что  $r_u(X \cup Y) = |J|$ . Представим  $J$  в виде  $J = J_X \cup J_{X \cap Y} \cup J_Y$ , где  $J_X \subseteq X$ ,  $J_Y \subseteq Y$ ,  $J_{X \cap Y} \subseteq X \cap Y$ , причем все 3 множества не пересекаются. Поскольку  $J_X \cup J_{X \cap Y} \subseteq X$  и  $J_Y \subseteq Y$ , то  $r_u(X) \geq |J_X \cup J_{X \cap Y}|$  и  $r_u(Y) \geq |J_Y|$ . Тогда  $r_u(X) + r_u(Y) \geq |J_X \cup J_{X \cap Y}| + |J_Y| = |J| = r_u(X \cup Y)$ .

Докажем условие ( $r_u4$ ). В силу равенства (5) и замечания 2

$$r_u(X) = \max\{|A| : A \subseteq X, A \in \mathcal{A}\} = \max\{|A| : A \subseteq X, r_u(A) = |A|\}.$$

Равенство (6) это замечание 2.

2) Пусть функция множеств  $r_u : 2^U \rightarrow \mathbb{Z}_+$  удовлетворяет условиям ( $r_u1$ )–( $r_u4$ ). Рассмотрим семейство  $\mathcal{A}$ , определенное по правилу (6). Заметим, что из ( $r_u1$ ) следует, что  $r_u(\emptyset) = 0$ , а значит это семейство не пусто. Докажем, что  $\mathcal{A}$  обладает свойством (A1).

Пусть  $J \in \mathcal{A}$ , т.е.  $r_u(J) = |J|$ . Пусть  $I \subseteq J$ . Докажем, что  $r_u(I) = |I|$ . В силу ( $r_u3$ ):  $r_u(I) + r_u(J \setminus I) \geq r_u(I \cup (J \setminus I)) = r_u(J) = |J|$ . С другой стороны, если  $r_u(I) < |I|$ , то по условию ( $r_u1$ ):  $r_u(I) + r_u(J \setminus I) < |I| + |J \setminus I| = |J|$ . Полученное противоречие доказывает, что семейство  $\mathcal{A}$  обладает свойством (A1).

Осталось доказать равенство (5). Из свойства ( $r_u4$ ) следует, что  $r_u(X)$  равняется мощности наибольшего  $A \subseteq X$  такого, что  $r_u(A) = |A|$ . Другими словами,  $r_u(X)$  равняется мощности наибольшего  $A \subseteq X$  такого, что  $A \in \mathcal{A}$ . Это и есть равенство (5).

Теорема 2 доказана.  $\square$

**Замечание 3.** Свойство ( $r_u4$ ) не является избыточным. Несложно построить пример функции, которая обладает свойствами ( $r_u1$ )–( $r_u3$ ), но при этом не выполняется (5). Другими словами, эта функция не

определяет наследственную систему. Таким примером для множества  $U = \{1, 2, 3\}$  может служить следующая функция:

$$\begin{aligned} r_u(\emptyset) &= 0, \\ r_u(\{1\}) &= r_u(\{2\}) = r_u(\{3\}) = 1, \\ r_u(\{1, 2\}) &= r_u(\{1, 3\}) = r_u(\{2, 3\}) = 1, \\ r_u(\{1, 2, 3\}) &= 2. \end{aligned}$$

#### 4 Функция обхвата коматроида

Помимо определения коматроида как дополнительной к матроиду наследственной системы, мы можем определить его как наследственную систему  $\mathbf{K} = (U, \mathcal{D})$ , в которой все циклы любого множества  $W \subseteq U$  имеют одинаковую мощность (циклом множества  $W$  называется любое его минимальное по включению зависимое надмножество).

Также известно [3], что наследственная система  $\mathbf{K} = (U, \mathcal{D})$  является коматроидом тогда и только тогда, когда семейство ее зависимых множеств помимо свойства (D1) обладает также следующим свойством:

$$(D2) \quad I, J \in \mathcal{D}, |J| = |I| + 1 \Rightarrow \exists d \in J \setminus I : J \setminus \{d\} \in \mathcal{D}.$$

Обхватом  $g(X)$  множества  $X \subseteq U$  в коматроиде  $\mathbf{K} = (U, \mathcal{D})$  называется мощность любого цикла множества  $X$ . Другими словами

$$g(X) = \min\{|D| : X \subseteq D, D \in \mathcal{D}\}. \quad (7)$$

Далее будем считать, что  $\mathcal{D}$  непусто, иначе наследственная система  $\mathbf{K} = (U, \mathcal{D})$  – это матроид. Если  $\mathcal{D}$  непусто, то  $U \in \mathcal{D}$  и  $g(U) = |U|$ .

**Замечание 4.** Если  $\mathbf{K} = (U, \mathcal{D})$  – коматроид, то семейство его зависимых множеств определяется по следующему правилу:

$$\mathcal{D} = \{D \subseteq U : g(D) = |D|\}. \quad (8)$$

Следующая теорема дает эквивалентное определение коматроида в терминах обхвата.

**Теорема 3.** 1) Пусть  $\mathbf{K} = (U, \mathcal{D})$  – коматроид. Тогда функция обхвата (7) удовлетворяет условиям: для всех  $X, Y \subseteq U$

$$\begin{aligned} (g1) \quad &g(X) \geq |X| \geq 0, \\ (g2) \quad &X \subseteq Y \Rightarrow g(X) \leq g(Y), \\ (g3) \quad &g(X \cup Y) + g(X \cap Y) \geq g(X) + g(Y), \end{aligned}$$

причем имеет место равенство (8).

2) И наоборот, пусть  $g : 2^U \rightarrow \mathbb{Z}_+$  – функция множеств, удовлетворяющая условиям (g1)–(g3). Тогда  $\mathbf{K} = (U, \mathcal{D})$  – коматроид, где семейство  $\mathcal{D} \subseteq 2^U$  определено по правилу (8) и для всех  $X \subseteq U$  имеет место равенство (7).

*Доказательство.* 1) Условия (g1) и (g2) верны по определению функции обхвата.

Докажем свойство (g3). Рассмотрим произвольные  $X$  и  $Y$  – подмножества  $U$ . Пусть  $J = \{j_1, \dots, j_k\} \in \mathcal{D}$  – некоторый цикл множества  $X \cup Y$ . Удалением элементов из  $J$  получаем сначала цикл множества  $X$ :  $J_1 = \{j_1, \dots, j_{k-t}\}$ , а затем цикл множества  $X \cap Y$ :  $J_2 = \{j_1, \dots, j_{k-t-m}\}$ . Имеем  $k = g(X \cup Y)$ ,  $k - t = g(X)$ ,  $k - t - m = g(X \cap Y)$ . Поскольку  $\{j_1, \dots, j_{k-t-m}, j_{k-t+1}, \dots, j_k\}$  – зависимое множество, содержащее  $Y$  и состоящее из  $k - t - m + t = k - m$  элементов, то  $k - m \geq g(Y)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} g(X \cup Y) + g(X \cap Y) &= k + (k - t - m) = \\ &= (k - t) + (k - m) \geq g(X) + g(Y). \end{aligned}$$

Равенство (8) это замечание 4.

2) Пусть функция  $g : 2^U \rightarrow \mathbb{Z}_+$  удовлетворяет условиям (g1)–(g3). Рассмотрим семейство  $\mathcal{D}$ , определенное по правилу (8). Докажем, что это семейство обладает свойствами (D1) и (D2).

Проверим свойство (D1). Пусть  $I \in \mathcal{D}$ ,  $J \supseteq I$ . Предположим противное, т.е.  $g(J) > |J|$ . Тогда по свойству (g3):  $g(U \setminus (J \setminus I)) + g(J) \leq g(U) + g(I) = |I| + |U|$ . С другой стороны, по свойству (g1):  $g(U \setminus (J \setminus I)) + g(J) > |U \setminus (J \setminus I)| + |J| = |U \setminus J| + |I| + |J| = |U| + |I|$ . Значит  $g(J) = |J|$ , т.е.  $J \in \mathcal{D}$ .

Прежде чем перейти к доказательству свойства (D2), докажем вспомогательное утверждение.

Пусть  $I \subset J \subseteq U$ ,  $g(J) = |J|$  и  $J \setminus I = \{p_1, \dots, p_t\}$ . Если  $g(J \setminus \{p_s\}) = g(J)$  для всех  $s = 1, \dots, t$ , то  $g(I) = |J|$ .

Предположим, что  $g(J \setminus \{p_1, \dots, p_s\}) = |J|$  для некоторого  $s \in \{1, \dots, t-1\}$ . Заметим, что  $(J \setminus \{p_1, \dots, p_s\}) \cap (J \setminus \{p_{s+1}\}) = J \setminus \{p_1, \dots, p_{s+1}\}$ , а также  $(J \setminus \{p_1, \dots, p_s\}) \cup (J \setminus \{p_{s+1}\}) = J$ . Тогда по свойствам (g2) и (g3)

$$\begin{aligned} |J| = g(J) &\geq g(J \setminus \{p_1, \dots, p_{s+1}\}) \geq \\ &g(J \setminus \{p_1, \dots, p_s\}) + g(J \setminus \{p_{s+1}\}) - g(J) = |J| + |J| - |J| = |J|. \end{aligned}$$

Следовательно,  $g(J \setminus \{p_1, \dots, p_{s+1}\}) = |J|$ . Из доказанного, очевидно, вытекает равенство  $g(I) = |J|$ .

Проверим свойство (D2). Пусть  $I, J \in \mathcal{D}$ ,  $|I| = k$ ,  $|J| = k+1$ . Предположим, что  $J \setminus \{p_s\} \notin \mathcal{D}$  для всех  $s \in \{1, \dots, t\}$ . С учетом вспомогательного утверждения  $g(J \cap I) = g(J \setminus (J \setminus I)) = |J| = k+1$ . С другой стороны, в силу (g2):  $g(J \cap I) \leq g(I) = k$ . Полученное противоречие доказывает, что семейство  $\mathcal{D}$  обладает свойством (D2).

Осталось доказать равенство (7). Если  $X \subseteq U$  – зависимое множество, т.е.  $X \in \mathcal{D}$ , то равенство (7) очевидно. Докажем это равенство для всех независимых множеств  $X \subset U$ , т.е. для всех  $X \notin \mathcal{D}$ .

Пусть  $X \subset U$  произвольное независимое множество,  $g(X) > |X|$ . Пусть  $D \subseteq U$  – наименьшее зависимое множество такое, что  $X \subset D$ . Покажем, что  $g(X) = |D|$ . Заметим, что  $g(D) = |D|$ .

Пусть  $D \setminus X = \{p_1, \dots, p_t\}$ . В силу минимальности  $D$  для всех  $s \in \{1, \dots, t\}$  множество  $D \setminus \{p_s\}$  – независимое, т.е.  $g(D \setminus \{p_s\}) > |D \setminus \{p_s\}|$ .

Тогда

$$|D| = g(D) \geq g(D \setminus \{p_s\}) > |D \setminus \{p_s\}| = |D| - 1,$$

т.е.  $g(D \setminus \{p_s\}) = |D|$  для всех  $s \in \{1, \dots, t\}$ . В силу доказанного утверждения  $g(X) = |D|$ .

Теорема 3 доказана. □

## References

- [1] H.H. Cрапо, G.-C. Rota, *On the foundations of combinatorial theory II: combinatorial geometries*, Cambridge Mass.: MIT Press, (1970)
- [2] M. Grötschel, L. Lovász, *Combinatorial optimization*, In *Handbook of Combinatorics*, Graham R.O., Grötschel M., Lovász L., eds., Amsterdam: Elsevier Science B.V., **2** (1995), 1341–1598
- [3] V.P. Il'ev, *Hereditary systems and greedy-type algorithms*, Discrete Appl. Math., **132**(1–3), (2003), 137–148
- [4] M.M. Kovalev, *Matroidy v diskretnoi optimizatsii*, Minsk: Universitetskoe, (1987); 2 ed. M.: URSS, (2003)
- [5] D.J.A. Welsh, *Matroid theory*, London: Academic Press, (1976)
- [6] N. White, ed., *Theory of matroids*, Cambridge: Cambridge Univ. Press., (1986)
- [7] H. Whitney, *On the abstract properties of linear dependence*, Amer. J. Math. **57**(3), (1935), 509–533

VICTOR PETROVICH IL'EV  
 DOSTOEVSKY OMSK STATE UNIVERSITY,  
 MIRA PR., 55A,  
 644077, OMSK, RUSSIA  
*Email address:* [iljev@mail.ru](mailto:iljev@mail.ru)

ALEKSANDR VLADIMIROVICH MORSHININ  
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,  
 PEVTSOVA ST., 13,  
 644099, OMSK, RUSSIA  
*Email address:* [morshinin.alexander@gmail.com](mailto:morshinin.alexander@gmail.com)