S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 519.17, 512.54
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 20H20, 05C69

КЛИКОВОЕ ЧИСЛО ГРАФА КОММУТИРОВАНИЯ TI-ПОДГРУПП В ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЕ

А.А. КУДИНОВ, Н.Д. ЗЮЛЯРКИНА

Abstract. In the paper we study the commuting graph of a cyclic TI-subgroup A of order 4 in a group G with the structure $G = F^*(G)A$ where $F^*(G)$ is a quasisimple linear group over field of odd characteristic. The clique number of this graph is found.

Keywords: finite linear group, quotient group, TI-subgroup, commuting graph.

1. Введение

Многие задачи теории конечных групп связаны с описанием классов групп, содержащих подгруппы с рядом определенных свойств. В частности, большой интерес представляют TI-подгруппы.

Пусть G – группа, $A \leq G$. Тогда A называется *TI-подгруппой*, если $A \cap A^g = 1$ для любого $g \in G \setminus N_G(A)$.

Результаты о TI-подгруппах полезны при описании групп так называемого компонентного типа, а также при исследовании групп с условиями на классы сопряженных инволюций.

Конечные группы с TI-подгруппой A, являющейся 2-группой, изучались в работах [1–9], и в настоящий момент наименее исследованными остались случаи, когда подгруппа A либо циклическая, либо элементарная абелева (см. работу [6], теорема 3.1). Заметим, что если A – циклическая 2-группа порядка большего, чем 2, то она будет содержать единственную подгруппу порядка 4, которая также является TI-подгруппой. Следовательно, достаточно изучить ситуацию, когда A имеет порядок 4.

Kudinov, A.A., Zyulyarkina, N.D., Clique number of the commuting graph of TI-subgroups in linear groups.

Поступила 1 января 2022 г., опубликована 31 декабря 2022 г.

Для изучения свойств группы с ней можно связать определенный комбинаторный объект и по свойствам этого объекта судить о свойствах связанной группы. Одним из таких объектов является граф коммутирования.

Для некоторой конечной группы G и семейства подмножеств Y из G, определим *граф коммутирования*, обозначаемый $\Gamma(G, Y)$, как граф со множеством вершин Y, в котором любые две различные вершины $x, y \in Y$ смежны тогда и только тогда, когда x и y поэлементно коммутируют. Через A^G будем обозначать множество всех подгрупп группы G, сопряженных A. Нами будет изучаться граф коммутирования $\Gamma(G, A^G)$.

Одной из важных характеристик графа является кликовое число. Из полученных М. Ашбахером результатов [10] следует, что кликовое число графа коммутирования циклических TI-подгрупп порядка 4 связано со слабым замыканием этой TI-подгруппы в силовской 2-подгруппе группы G. В частности, им был изучен случай, когда TI-подгруппа является слабо замкнутой в силовской 2-подгруппе из G (это эквивалентно случаю, когда кликовое число графа коммутирования равно единице). Поэтому сведения о кликовом числе графа коммутирования TI-подгрупп представляют большой интерес.

В данной статье изучаются свойства графа коммутирования циклической TI-подгруппы в линейных группах над полем нечетной характеристики.

Из работы [2] известно, что циклическая TI-подгруппа порядка 4 нормализует любую компоненту группы G, если таковые имеются. Поэтому при изучении конечных групп, содержащих компоненты, полезно иметь информацию о группах вида $F^*(G)A$, где $F^*(G)$ – это обобщенная группа Фиттинга группы G, являющаяся квазипростой группой, A – циклическая TI-подгруппа порядка 4.

Известно, что классические группы можно представить как группы автоморфизмов векторных пространств.

Пусть V – векторное пространство размерности n над полем F_q, где q нечетно. Пусть $H = GL_n(q)$. Как показано в разделе 3A [9], каждой инволюции $u \in G$ соответствуют два подпространства V_u^+ и V_u^- из V:

$$V_i^+ = C_v(u) = \{v \in V | u(v) = v\}, V_i^- = [V, u] = \{v \in V | u(v) = -v\}.$$

Тогда имеет место разложение $V = V_u^+ \oplus V_u^-$, и инволюция u в группе автоморфизмов векторного пространства V называется *инволюцией типа* m, если подпространство V_u^- имеет размерность m. Согласно работе [9], любые две инволюции типа m будут сопряжены с помощью элемента из $SL_n(q)$.

Пусть теперь H – группа $GL_n(q)$ и $u \in H$. Тогда u называется *полуинволюцией*, если $u^2 = \gamma E$ для $\gamma \in F_q^*$, где E – единичная матрица. Если γ не является квадратом, то u называется *полуинволюцией типа 0.* Согласно [9], любые две полуинволюции u_1 и u_2 типа 0 такие, что $u_1^2 = u_2^2$, тоже сопряжены с помощью элемента из $SL_n(q)$.

В дальнейшем до конца работы будем считать, что A является циклической подгруппой порядка 4 в группе $G = XA$, где $X = F^*(G)$ – квазипростая линейная группа над полем нечетной характеристики, а a_0 – это инволюция из $A =< a >$.

Через X^* обозначим множество таких расширений группы X, что для любой группы $\widetilde{X}$ из X^* любой элемент из $\widetilde{X} \setminus X$ индуцирует на X внешний внутреннедиагональный автоморфизм.

Пусть u – элемент из $GL_n(q)$, b – элемент из G . Если u содержится в $SL_n(q)Z(GL_n(q))$, то будем говорить, что b соответствует элементу u, если b – это элемент X (являющийся смежным классом линейной группы по центральной подгруппе), содержащий элемент $uz \in SL_n(q)$, где $z \in Z(GL_n(q))$. Если $u \notin SL_n(q)Z(GL_n(q))$, то выражение "$b$ соответствует элементу u"означает, что b – это автоморфизм, который индуцирует u на X.

Основным результатом данной работы является следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $G = XA$, где $X = F(G)$, A – циклическая TI-подгруппа порядка 4. Если X – это частное $SL_n(q)$ по центральной подгруппе порядка d и q нечетно, то тогда будут справедливы следующие утверждения:*

(1) $G \in X^*$, $q-1 \equiv 0 \pmod 4$, a_0 соответствует инволюции типа m из $GL_n(q)$, $n \neq 2m$ или d нечетно. Тогда любая максимальная клика из $\Gamma(G, A^G)$ имеет порядок C_n^m;

(2) $G \in X^*$, $q-1 \equiv 0 \pmod 4$, a_0 соответствует инволюции типа m из $GL_n(q)$, $n = 2m$ и d четно. Тогда любая максимальная клика из $\Gamma(G, A^G)$ имеет порядок $C_n^m/2$;

(3) $G \in X^*$, $q+1 \equiv 0 \pmod 4$, a_0 соответствует инволюции типа 0 из $GL_n(q)$. Тогда $n = 2m$, d четно и любая максимальная клика из $\Gamma(G, A^G)$ имеет порядок 2^{m-1}.

(4) $G \notin X^*$ и $\Gamma(G, A^G)$ является кокликой.

2. Предварительные результаты

Если T – TI-подгруппа четного порядка конечной группы G, то T называется подгруппой *корневого типа*, если индекс $|T : N_T(T^g)|$ нечетен для любого элемента $g \in G$, для которого число $|N_T(T^g)|$ четно.

Если A является подгруппой корневого типа, то это означает,что условие $[a_0, a_0^g] = 1$ влечет выполнение равенства $[A, A^g] = 1$ для любого элемента $g \in G$. Из этого следует, что что граф коммутирования циклической TI-подгруппы A порядка 4 корневого типа изоморфен графу коммутирования инволюции $\Gamma(G, a_0^G)$.

Опишем критерий того, что циклическая подгруппа порядка 4 группы G является TI-подгруппой.

Предложение 1. *Пусть $B =< b >$ -подгруппа порядка 4 группы G. Данная подгруппа будет TI-подгруппой G тогда и только тогда, когда она нормальна в $C_G(b^2)$.*

Доказательство. Очевидно, что B будет TI-подгруппой тогда и только тогда, когда любой элемент $g \in G$, для которого подгруппа B имеет неединичное пересечение с B^g, содержится в $N_G(B)$. Подгруппа B содержит единственную инволюцию b^2. Поэтому условие $B \cap B^g \neq 1$ равносильно тому, что $g \in C_G(b^2)$. Поэтому B является TI-подгруппой G тогда и только тогда, когда $C_G(b^2)$ будет содержаться в $N_G(B)$.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. *Кликой* называется полный граф, а *кокликой* – граф, не имеющий ребер. *Максимальной кликой* графа Γ называется его подграф, являющийся кликой, которую нельзя расширить добавлением дополнительных вершин. *Наибольшей кликой* является клика с наибольшим количеством вершин. *Кликовым числом* графа Γ является количество вершин в его наибольшей клике. В дальнейшем кликовое число будем обозначать как $\alpha(\Gamma)$.

Лемма 1. *Пусть G – конечная группа, A – циклическая TI-подгруппа порядка 4 группы G. Тогда все максимальные клики графа коммутирования $\Gamma(G, A^G)$ имеют одинаковое количество вершин.*

Доказательство. Согласно работе [10] (лемма 2.5), вершины графа коммутирования $\Gamma(G, A^G)$, образующие максимальную клику, являются множеством $A^G \cap S$, где S – силовская 2-подгруппа группы G. Ввиду сопряженности силовских 2-подгрупп в группе G, мы получим, что множества вершин графа коммутирования, образующих две максимальные клики, тоже сопряжены. Следовательно, они содержат одинаковое количество элементов. Лемма доказана.

Из данной леммы следует, что для нахождения $\alpha(\Gamma)$ достаточно найти хотя бы одну максимальную клику.

Циклические TI-подгруппы порядка 4 в группах вида XA, где X – линейная группа над полем нечетной характеристики, описывает следующая теорема [4]:

Теорема 2. *Пусть $G = XA$, где $X = F(G)$, A – циклическая TI-подгруппа порядка 4. Если X – это накрывающая группа для $L_n(q)$, $n \geq 2$, то либо X – накрывающая группа для $L_2(9)$, $G = X$ и $|Z(X)| = 3$, либо X – частное $SL_n(q)$, $n \geq 2$, по центральной подгруппе порядка d и имеет место один из следующих случаев:*

для нечетного n:

(1) $X \simeq L_3(3)$ или $X \simeq L_3(7)$, $G = X < \tau >$, где τ – графовый автоморфизм линейной группы, a_0 соответствует инволюции типа 2 из X;

(2) $G = X$, $q - 1 \equiv 0 \pmod 4$, a_0 соответствует инволюции четного типа из $SL_n(q)$.

для четного n:

(3) $X = L_2(9)$, элемент a индуцирует на X внутренне-полевой автоморфизм, a_0 соответствует инволюции типа 1 из $SL_2(9)$.

(4) $G = X$, $n > 4$, $q - 1 \equiv 0 \pmod 4$, a_0 соответствует инволюции типа m, $m \equiv 0 \pmod 4$, из $SL_n(q)$;

(5) $G = X$, $q - 1 \equiv 0 \pmod 4$, $n \geq 4$, a_0 соответствует инволюции типа m, $m \equiv 2(4)$, из $SL_n(q)$, $(q-1, n) \neq (q-1, 2n)$ и либо d делится на $(q-1, n/2)$, если $n \equiv 0 \pmod 4$, либо $d \equiv 0 \pmod 4$, если $n \equiv 2 \pmod 4$;

(6) $G = X$, $q - 1 \equiv 0 \pmod 4$, $n \geq 2$, $(q-1, 2n) \neq (q-1, 4n)$, d делится на $(q-1, n)_2$, a_0 соответствует инволюции нечетного типа из $GL_n(q)$;

(7) $G = X$, $q+1 \equiv 0 \pmod 4$, d четно, $q+1 \equiv 0 \pmod 8$ или $n \equiv 0 \pmod 8$, элементу a_0 соответствует полуинволюция типа 0 из $SL_n(q)$;

(8) $|G : X| = 2$, $G \in X^*$, $q - 1 \equiv 0 \pmod 4$, $(q-1, 2n) = (q-1, n)$, элементу a_0 соответствует инволюция типа m, $m \equiv 2 \pmod 4$, из $SL_n(q)$;

(9) $|G : X| = 2$, $G \in X^*$, $q-1 \equiv 0 \pmod 4$, $(q-1, 2n) = (q-1, n)$, $(q-1, 4n) = (q-1, 2n)$, d делится на $(q-1, n)_2$, элементу a_0 соответствует инволюция нечетного типа из $GL_n(q)$;

(10) $|G : X| = 2$, $G \in X^*$, $q + 1 \equiv 4 \pmod 8$, $n \equiv 2 \pmod 4$, элементу a_0 соответствует полуинволюция типа 0 из $SL_n(q)$;

(11) $|G : X| = 4$, $G \in X^*$, $q-1 \equiv 0 \pmod 4$, $(q-1, 2n) = (q-1, n)$, элементу a_0 соответствует инволюция нечетного типа из $GL_n(q)$.

В дальнейшем диагональную матрицу вида $\begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \eta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \eta_n \end{pmatrix}$ будем обозначать как $[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]$.

Следующие примеры, основанные на доказательстве теоремы 2, показывают, как устроены циклические TI-подгруппы порядка 4 в рассматриваемой группе $G \in X^*$ в случаях $q+1 \equiv 0 \pmod 4$ и $q-1 \equiv 0 \pmod 4$.

`Пример 1` Пусть $q-1 \equiv 0(4)$. Обозначим через ρ элемент поля F_q для которого $\rho^2 = -1$. Из предыдущей теоремы получаем, что в этом случае a_0 соответствует инволюции u типа m из $GL_n(q)$. В некотором базисе матрица u имеет вид $[1, \dots, 1, -1, \dots, -1]$, где ровно m элементов равны -1, а элементу a соответствует либо матрица $w = [1, \dots, 1, \rho, \dots, \rho]$, либо $w' = [-1, \dots, -1, \rho, \dots, \rho]$, где где ровно m элементов равны ρ. При этом TI-подгруппы, задаваемые w и w' различны только в том случае, когда частное линейной группы берётся по центральной подгруппе нечетного порядка. Других циклических TI-подгрупп порядка 4 с a_0 соответствущей инволюции u типа m в G нет. Исходя из строения централизатора инволюции типа m в частном группы $GL_n(q)$ по центральной подгруппе (раздел 3A [9]) можно заключить, что подгруппа A будет находиться в центре централизатора a_0, за исключением ситуации, когда $n = 2m$ и частное берется по подгруппе четного порядка. В последнем случае A будет инвертироваться элементом из $GL_n(q)$, переставляющим пространстваV_u^+ и V_u^-. Отметим, что подгруппа, построенная при помощи матрицы w (или w'), будет TI-подгруппой в любом частном $GL_n(q)$ по центральной подгруппе ввиду Предложения 1.

`Пример 2` Пусть $q+1 \equiv 0(4)$. В этом случае a_0 соответствует полуинволюции u типа 0 из $H = GL_n(q)$, $n = 2m$ и можно считать, что $u^2 = -E$. Через $\bar{H}$ обозначим частное H по центральной подгруппе четного порядка. Согласно разделу 3A [9], в пространстве V существует базис $e_1, \dots, e_m, e'_1, \dots, e'_m$ такой, чт о $u(e_i) = -e'_i, u(e'_i) = e_i$. В этом базисе полный прообраз $C_{\bar{H}}(\bar{u})$ в группе H будет состоять из матриц $wx^\epsilon(\epsilon = 0, 1)$ вида

$$w = \begin{pmatrix} C & B \\ -B & C \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

где C и B – произвольные матрицы размера $m \times m$ ($det\ w \neq 0$), E – единичная матрица размера $m \times m$. Согласно разделу 3A [9] существует взаимно однозначное соответствие между элементами полного прообраза$C_{\bar{H}}(\bar{u})$ в группе H и элементами группы $GL_m(q^2) < \tau >$, где τ индуцирует на $GL_m(q^2)$ полевой автоморфизм порядка 2. Матрице w ставится в соответствие матрица $v = C + \rho B$ из группы $S = GL_m(q^2)$, где ρ – элемент поля $F_{q^2} = \{\lambda + \rho\mu | \lambda, \mu \in F_q\}$ и $\rho^2 = -1$. Матрице x будет соответствовать полевой автоморфизм τ. Тогда TI-подгруппа A порядка 4, инволюция из которой соответствует u, будет порождена элементом c вида $\begin{pmatrix} \alpha E & \beta E \\ -\beta E & \alpha E \end{pmatrix}$, где $(\alpha + \beta\rho)^2 = \rho$, $\alpha, \beta \in F_q$. В группе S матрице c будет соответствовать матрица c' вида $(\alpha + \beta\rho)E$. Элемент $\alpha + \beta\rho$ в дальнейшем обозначим через δ. Заметим, что в этом случае A находится в центре S и инвертируется элементом τ. Построенная таким образом подгруппа A является единственной циклической TI-подгруппой порядка 4, у которой инволюция соответствует полуинволюции u типа 0.

Отметим, что подгруппа построенная при помощи элемента c, будет TI-подгруппой в любом частном $GL_n(q)$ по центральной подгруппе четного порядка ввиду Предложения 1.

3. Кликовое число графа коммутирования TI-подгрупп при $q-1 \equiv 0(mod\ 4)$

В этом разделе будем считать, что $q-1 \equiv 0(mod\ 4)$. Тогда имеет место один из случаев (4), (5), (6), (8), (9), (11), описанных в теореме 2, и подгруппа A имеет строение, описанное в примере 1.

Лемма 2. *Пусть X – частное $SL_n(q)$ по подгруппе порядка d, $G \in X^*$, a_0 соответствует инволюции типа m из $H = GL_n(q)$, $n \neq 2m$ или d нечетно. Тогда любая максимальная клика из $\Gamma(G, A^G)$ имеет порядок C_n^m.*

Доказательство. Согласно доказательству леммы 2.6 [4], циклическая TI-подгруппа порядка 4 в указанном случае существует тогда и только тогда, когда $q-1 \equiv 0(mod\ 4)$, и будет устроена так, как это описано в примере 1. По разделу 3A [9] $C_H(w) = C_H(u)$, а значит, $C_G(a_0) = C_G(a)$, и тогда подгруппа A является подгруппой корневого типа. Поэтому граф коммутирования $\Gamma(G, A^G)$ совпадет с графом коммутирования инволюций типа m.

Пусть a_0 соответствует инволюции u типа m из H. Зафиксируем базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства V такой, что u инвертирует m векторов данного базиса и централизует остальные векторы. Рассмотрим множество различных инволюций $u_1, u_2, \ldots, u_s$ ($s = C_n^m$) таких, что каждая из них инвертирует m векторов данного базиса и централизует остальные векторы. Очевидно, что данные инволюции коммутируют друг с другом. Согласно разделу 3A [9], пересечение централизаторов любых двух инволюций из данного множества в H, например, u_1 и u_2, равно:

$$C_{C_H(u_1)}(u_2) = GL_{m-m_1}(q) \times GL_{m_1}(q) \times GL_{m-m_1}(q) \times GL_{n-2m+m_1}(q),$$

где $m_1 = dim(V_{u_1}^- \cap V_{u_2}^-)$. По индукции легко получить, что пересечение централизаторов всех рассматриваемых инволюций равно:

$$T = C_H(u_1) \cap C_H(u_2) \cap \cdots \cap C_H(u_s) = GL_1(q) \times GL_1(q) \times \cdots \times GL_1(q).$$

Таким образом, $u^H \cap T$ является максимальной кликой в графе $\Gamma(H, u^H)$. Следовательно, максимальная клика из $\Gamma(H, u^H)$ имеет размерность C_n^m.

Заметим, что $|u^H| = |A^G| = |a_0^G|$. Между множествами вершин графов $\Gamma(H, u^H)$ и $\Gamma(G, a_0^G)$ можно установить биекцию по следующему правилу: пусть u^g – вершина графа $\Gamma(H, u^H)$. Тогда инволюции u и u^g будут сопряжены в $SL_n(q)$. Поэтому существует элемент r из $SL_n(q)$ такой, что $u^r = u^g$. Тогда вершине u^g будет соответствовать вершина a_0^r. Таким образом, максимальная клика из $\Gamma(G, A^G)$ также имеет размерность C_n^m, что приводит к случаю (1) из теоремы 1. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть X – частное $SL_n(q)$ по подгруппе порядка d, $G \in X^*$, $q-1 \equiv 0(mod\ 4)$, a_0 соответствует инволюции типа m из $H = GL_n(q)$, $n = 2m$ и d четно. Тогда любая максимальная клика из $\Gamma(G, A^G)$ имеет размерность $C_n^m/2$.*

Доказательство. Зафиксируем базис $e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$ пространства V. Пусть a_0 соответствует инволюции u типа m из H. Пусть a соответствует элементу w порядка 4 из H, $w^2 = u$, и согласно лемме 2.6 из [4], инволюция u имеет вид $[1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1]$, где ровно m диагональных элементов равны 1 и ровно m диагональных элементов равны -1. Тогда w имеет вид $[1, \ldots, 1, \rho, \ldots, \rho]$, где ρ – элемент поля F_q такой, что $\rho^2 = -1$.

Пусть $\bar{H} = PGL_n(q)$, $B =< wZ >$, $Z = Z(H)$. Тогда B будет циклической TI-подгруппой из $\bar{H}$, как было отмечено в примере 1, $\Gamma_1 = \Gamma(\bar{H}, B^{\bar{H}})$ и $\Gamma_2 = \Gamma(G, A^G)$. Покажем, что Γ_1 изоморфен Γ_2.

Пусть смежный класс b, порождающий подгруппу B, содержит матрицу w. Для подгруппы A можно выбрать порождающий элемент a так, чтобы он соответствовал смежному классу в $\bar{H}$, содержащему ту же матрицу w (строение подгруппы A описано в примере 1). Заметим, что $|B^{\bar{H}}| = |A^G|$.

Между множествами вершин графов Γ_1 и Γ_2 можно установить биекцию по следующему правилу: пусть $< b >^g$ – вершина графа Γ_1. Тогда инволюции b^2 и $(b^2)^g$ будут сопряжены в $SL_n(q)$. Поэтому существует элемент h из $SL_n(q)$ такой, что $(b^2)^h = (b^2)^g$ (Раздел 3A [9]). Следовательно, $< b >^g$ будет совпадать с $< b >^h$, так как существует единственная циклическая TI-подгруппа порядка 4 с инволюцией $(b^2)^h = (b^2)^g$ (Пример 1). Тогда вершине $< b >^g$ будет соответствовать вершина $< a >^h$. Очевидно, что данная биекция будет сохранять отношение смежности, поэтому $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$.

Теперь рассмотрим элементы $w_1, \ldots, w_s$ $(s = C_n^m)$, которые в описанном ранее базисе имеют вид $w_i = [\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]$, где среди $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ ровно m элементов ρ, а остальные m элементов – единицы. Заметим, что данные элементы будут сопряжены в H, т.к. они имеют одинаковую нормальную жорданову форму. Согласно разделу 3A [9], пересечение централизаторов всех этих элементов равно:

$$\mathrm{T} = C_H(w_1) \cap C_H(w_2) \cap \cdots \cap C_H(w_s) = GL_1(q) \times GL_1(q) \times \cdots \times GL_1(q).$$

Таким образом, $w^H \cap T$ является максимальной кликой в графе $\Gamma(H, w^H)$. Элементы $w_1, \ldots, w_s$ можно разбить попарно следующим образом: если $w_i = [\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]$, то элемент, состоящий с ним в паре, будет иметь вид $w_j = [\beta_1, \ldots, \beta_n]$, где $\beta_t = 1$, если $\varepsilon_t = \rho$ и $\beta_t = \rho$, если $\varepsilon_t = 1$. Следовательно, $w_i w_j = \rho E$ и $w_j = \rho E w_i^{-1}$, и тогда в $\bar{H}$ подгруппы $< w_j Z >$ и $< w_i Z >$ совпадают.

Следовательно, максимальная клика из $\Gamma(G, A^G))$ имеет размерность $C_n^m/2$, что приводит к случаю (2) из теоремы 1. Лемма доказана.

4. Кликовое число графа коммутирования TI-подгрупп при $q + 1 \equiv 0 (mod\ 4)$

В этом разделе будем считать, что $q + 1 \equiv 0 (mod\ 4)$. Это влечет, что -1 не является квадратом в поле F_q. Тогда имеет место один из случаев (2), (7), (10), описанных в теореме 2. Подгруппа A в этом случае имеет строение, описанное в примере 2, обозначения из которого будут применяться в данном разделе. Через H обозначим группу $GL_{2m}(q)$, $\bar{H} = PGL_{2m}(q)$. Через $\Gamma(\bar{H}, A^{\bar{H}})$ обозначим граф коммутирования TI-подгрупп порядка 4, сопряженных с TI-подгруппой $A \leq \bar{H}$.

Лемма 4. *Пусть* $\bar{H} = PGL_{2m}(q)$, $q+1 \equiv 0(mod\ 4)$, *Тогда в* $\bar{H}$ *существует циклическая TI-подгруппа порядка 4* $B =< b >$ *такая, что* b^2 *соответствует полуинволюции типа 0 из группы* $H = GL_{2m}(q)$.

Доказательство. Требуемая подгруппа строится как описано в примере 2. Пусть $b_0 = b^2$ соответствует полуинволюции u типа 0 из H. Пусть b соответствует элементу c порядка 4 из H, $c^2 = u$, и тогда инволюция u имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, а c имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha E & \beta E \\ -\beta E & \alpha E \end{pmatrix}$, где α и β – элементы, описанные ранее в примере 2.

Лемма 5. *Пусть* $H = GL_{2m}(q)$, $S = GL_m(q^2)$, *Пусть* h *и* h_s *– элементы из* H, *которые соответствуют матрицам из* S *(см. описание в примере 2) вида* $[\delta, \ldots, \delta]$ *и* $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m]$ *соответственно. При этом среди* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ *ровно* k *элементов* $-\rho\delta$, *если 2 – квадрат в поле* F_q, *либо* k *элементов* $\rho\delta$, *если 2 – не квадрат в поле* F_q, *для некоторого* $k = 1, 2, \ldots, m$, *а остальные* $m-k$ *элементов* δ *(где* ρ *и* δ *– элементы, определенные выше). Тогда* h *и* h_s *сопряжены в* H.

Доказательство. Из равенства $\delta^2 = \rho$ мы получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 0, \\ 2\alpha\beta = 1. \end{cases}$$

При решении данной системы возможны следующие два случая:
(1) $\alpha = \beta$ и $2\alpha^2 = 1$, т.е. 2 является квадратом в поле F_q;
(2) $\alpha = -\beta$ и $-2\alpha^2 = 1$, т.е. 2 не является квадратом в поле F_q.

Найдем элемент, сопрягающий h и h_s, для первого случая. Пусть h_s соответствует матрице из S вида $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m]$, где $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots \varepsilon_{i_k}$ равны $-\rho\delta$, а остальные ε_{i_j} равны δ. Рассмотрим элемент $x \in H$ для некоторого $k = 1, 2, \ldots, m$, действующий на базис $e_1, \ldots, e_m, e'_1, \ldots, e'_m$ так, что $x(e_{i_1}) = -e'_{i_1}$, $x(e_{i_2}) = -e'_{i_2}$, $\ldots$, $x(e_{i_k}) = -e'_{i_k}$, а для остальных $x(e_{i_j}) = e_{i_j}$. Соответственно, $x(e'_{i_1}) = -e_{i_1}$, $x(e'_{i_2}) = -e_{i_2}$, $\ldots$, $x(e'_{i_k}) = -e_{i_k}$, а для остальных $x(e'_{i_j}) = e'_{i_j}$. Непосредственная проверка показывает, что тогда x сопрягает h и h_s.

Теперь найдем элемент, сопрягающий h и h_s, для второго случая. Пусть h_s соответствует матрице из S вида $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m]$, где $\varepsilon_{i_1}, \varepsilon_{i_2}, \ldots \varepsilon_{i_k}$ равны $\rho\delta$, а остальные ε_{i_j} равны δ. Рассмотрим элемент $x \in H$ для некоторого $k = 1, 2, \ldots, m$, действующий на базис $e_1, \ldots, e_m, e'_1, \ldots, e'_m$ так, что $x(e_{i_1}) = e'_{i_1}$, $x(e_{i_2}) = e'_{i_2}$, $\ldots$, $x(e_{i_k}) = e'_{i_k}$, а для остальных $x(e_{i_j}) = e_{i_j}$. Соответственно, $x(e'_{i_1}) = e_{i_1}$, $x(e'_{i_2}) = e_{i_2}$, $\ldots$, $x(e'_{i_k}) = e_{i_k}$, а для остальных $x(e'_{i_j}) = e'_{i_j}$. Непосредственная проверка показывает, что тогда x сопрягает h и h_s. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $G_1 = PGL_{2m}(q)$, B *– циклическая TI-подгруппа порядка 4 из* G_1, $G = XA$, $\Gamma_1 = \Gamma(G_1, B^{G_1}), \Gamma_2 = \Gamma(G, A^G)$. *Тогда* $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$.

Доказательство. В качестве порождающего элемента для подгруппы B можно взять смежный класс b, содержащий матрицу c из леммы 4, а для подгруппы A можно выбрать порождающий элемент a так, чтобы он соответствовал смежному классу, содержащему ту же матрицу c (Исходя из строения A, приведенного в примере 2). Заметим, что $|B^{G_1}| = |A^{G_2}|$.

Между множествами вершин графов Γ_1 и Γ_2 можно установить биекцию по следующему правилу: пусть $< b >^g$ – вершина графа Γ_1. Тогда элементы b^2 и $(b^2)^g$ будут сопряжены в $SL_n(q)$. Поэтому существует элемент r из $SL_n(q)$ такой, что $(b^2)^r = (b^2)^g$. Следовательно, $< b >^g$ будет совпадать с $< b >^r$, так как существует единственная циклическая TI-подгруппа порядка 4 с инволюцией $(b^2)^r = (b^2)^g$ (Пример 2). Тогда вершине $< b >^g$ будет соответствовать вершина $< a >^r$. Очевидно, что данная биекция будет сохранять отношение смежности, поэтому $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$.

Лемма 7. *Пусть* $H = GL_{2m}(q)$, $\bar{H} = PGL_{2m}(q)$, $q+1 \equiv 0(mod\ 4)$, B *– циклическая TI-подгруппа порядка 4 из* $\bar{H}$. *Тогда максимальная клика из* $\Gamma(\bar{H}, B^{\bar{H}})$ *имеет размерность* 2^{m-1}.

Доказательство. Пусть S – подгруппа $GL_m(q^2)$, использованная при описании централизатора полуинволюции типа 0 в примере 2. Рассмотрим множество вершин из $\Gamma(\bar{H}, B^{\bar{H}})$, построенное следующим образом. Пусть $B =< hZ >$, где h соответствует матрице из S вида $[\delta, \ldots, \delta]$, Z – центр H.

Случай 1. Пусть 2 является квадратом в поле F_q. Рассмотрим элементы $h_1, h_2, \ldots, h_s$, соответствующие матрицам из S, имеющим вид $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m]$, где среди $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ ровно k элементов, равны δ и $m-k$ элементов равны $-\rho\delta$, где k принимает значения $1, 2, \ldots, m$. Таких элементов будет в точности 2^m.

Очевидно, что элементы $h_1, h_2, \ldots, h_s$ коммутируют с h, а из леммы 5 следует, что эти элементы сопряжены с h. Заметим, что пересечение централизаторов элементов $h_1, h_2, \ldots, h_s$ равно:

$$\mathrm{T} = C_H(h_1) \cap C_H(h_2) \cap \cdots \cap C_H(h_s) \simeq GL_1(q) \times GL_1(q) \times \cdots \times GL_1(q).$$

Из полученного равенства следует, что любой элемент h', сопряженный с h и централизующий $h_1, h_2, \ldots, h_s$, имеет в S диагональное представление. Заметим, что $(h')^2$ является полуинволюцией типа 0. Следовательно, матрица, представляющая в S элемент $(h')^2$, имеет вид $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m]$, где любой элемент λ_i равен либо ρ, либо $-\rho$. Тогда существует такой h_i, для которого выполняется равенство $h_i^2 = (h')^2$. Так как элемент h определяет TI-подгруппу в $\bar{H}$, то можно считать, что h' совпадает с h_i.

Матрицы из S, соответствующие элементам $h_1, \ldots, h_s$, можно разбить попарно следующим образом. Пусть матрица h_i имеет представление в S вида $\theta = [\theta_1, \ldots, \theta_m]$, где среди $\theta_1, \ldots, \theta_m$ ровно k элементов δ и $m-k$ элементов $-\rho\delta$. Тогда элемент, состоящий с ней в паре, будет иметь представление в S вида $\sigma = [\sigma_1, \ldots, \sigma_m]$, где $\sigma_t = -\rho\delta$, если $\theta_t = \delta$ и $\sigma_t = \delta$, если $\theta_t = -\rho\delta$.

Следовательно, $< \theta >$ совпадает с $< \sigma >$ в группе $\bar{H}$, каждой такой паре будет соответствовать циклическая TI-подгруппа порядка 4, и в совокупности все эти пары соответствуют максимальной клике из $\bar{H}$. Отсюда следует, что любая максимальная клика из $\Gamma(\bar{H}, B^{\bar{H}})$ имеет размерность 2^{m-1}.

Случай 2. Пусть 2 не является квадратом в поле F_q. Рассмотрим элементы $h_1, h_2, \ldots, h_s$, соответствующие матрицам из S, имеющим вид $[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m]$, где среди $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ ровно k элементов, равны δ и $m-k$ элементов равны $\rho\delta$, где k принимает значения $1, 2, \ldots, m$. Таких элементов будет в точности 2^m.

Очевидно, что элементы $h_1, h_2, \ldots, h_s$ коммутируют с h, а из леммы 5 следует, что эти элементы сопряжены. Доказательство леммы в данном случае проводится аналогично случаю 1, с учетом того, что элементы h_i группируются попарно следующим образом. Пусть матрица h_i имеет представление в S вида $\theta = [\theta_1, \ldots, \theta_m]$, где среди $\theta_1, \ldots, \theta_m$ ровно k элементов δ и $m-k$ элементов $\rho\delta$. Тогда элемент, состоящий с ней в паре, будет иметь представление в S вида $\sigma = [\sigma_1, \ldots, \sigma_m]$, где $\sigma_t = \rho\delta$, если $\theta_t = \delta$ и $\sigma_t = \delta$, если $\theta_t = \rho\delta$.

Лемма доказана и приводит к случаю (3) из теоремы 1.

5. Завершение доказательства теоремы

Пусть $G \in X^*$. Если $q-1 \equiv 0(mod\ 4)$, то утверждение теоремы будет следовать из лемм 2 и 3. Если $q+1 \equiv 0(mod\ 4)$, то утверждение теоремы будет следовать из леммы 7.

Остался нерассмотренным случай, когда $G \notin X^*$. Тогда имеют место случаи (1), (3), описанные в теореме, приведенной в разделе 2.

По теореме 3 из [8] получим, что в этих случаях граф коммутирования является кокликой, что приводит нас к случаю (4) из теоремы 1.

References

[1] A.A. Makhnev, *TI-subgroups in groups of characteristic 2 type*, Mathematics of the USSR-Sbornik, **127**:2 (1985), 239–244.

[2] N.D. Zyulyarkina, A.A. Makhnev, *Tightly embedded subgroups with abelian fusion*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, **2**:1 (1992), 19–26.

[3] N.D. Zyulyarkina, A.A. Makhnev, *Cyclic TI-subgroups of order 4 in exceptional Chevalley groups*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, **3**:1 (1995), 41–49.

[4] N.D. Zyulyarkina, *Cyclic TI-subgroups of order 4 in classical Chevalley groups of odd characteristic*, Matematicheskie Trudy, **30**:1 (1996), 89–110.

[5] Y. Hochheim, F. Timmesfeld, *A note on TI-subgroups*, Arch. Math, **51**:1 (1988), 97–103.

[6] A.A. Makhnev, *A reduction theorem for TI-subgroups*, Mathematics of the USSR-Izvestiya, **55**:2 (1991), 303–317.

[7] M. Suzuki, *Finite groups of even order in which Sylow 2-groups are independent*, Ann. Math, **80**:1 (1964), 58–77.

[8] N.D. Zyulyarkina, *On the commutation graph of cyclic TI-subgroups in linear groups*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, **17**:4 (2011), 114–120.

[9] M.E. Harris, *Finite groups containing an intrinsic 2-component of Chevalley type over a field of odd order*, Transactions of the American Mathematical Society, **272**:1 (1982), 1–65.

[10] M. Ashbacher, *Tightly embedded subgroups of finite groups*, Journal of Algebra, **42**:1 (1976), 85–101.

Anton Aleksandrovich Kudinov
South Ural State University,
Lenina Avenue, 76,
454080, Chelyabinsk, Russia
Email address: neverdark74@gmail.com

Natalya Dmitrievna Zyulyarkina
South Ural State University,
Lenina Avenue, 76,
454080, Chelyabinsk, Russia
Email address: toddeath@yandex.ru