S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 23, № 1, стр. 50–68 (2026) УДК 517.92
https://doi.org/10.33048/semi.2026.23.004 MSC 34A36, 34C23

О БИФУРКАЦИЯХ КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ РАЗВИЛКИ

В.Ш. Ройтенберг

Представлено О.С. Розановой

Abstract: We consider a two-parameter family of piecewise smooth dynamical systems on the plane. For zero values of the parameters the dynamical system has a periodic trajectory L passing through two singular points of the fork type and not containing other singular points. It is assumed that L contains both the tangent and transverse separatrices of both forks. We consider different cases of the location of the remaining separatrices. In each case, we describe bifurcations in a neighborhood of L for generic families.

Keywords: piecewise smooth dynamical system, fork, periodic trajectory, bifurcation.

1 Введение

Кусочно-гладкие динамические системы являются естественными математическими моделями реальных систем с переключениями и широко используются в теории колебаний начиная с работ А.А. Андронова (см. [1, 2]) Бифуркации кусочно-гладких динамических систем на плоскости

Roitenberg, V.Sh., On bifurcations of a piecewise smooth dynamical system on the plane in a neighborhood of a periodic trajectory passing through two forks.

Поступила 17 декабря 2024 г., опубликована 2 марта 2026 г.

начали изучать уже давно [3, 4]. В [4] описаны бифуркации особых точек первой степени негрубости. Бифуркации рождения периодической траектории из особой точки и другие локальные бифуркации в типичных семействах кусочно-гладких систем на плоскости с одним и двумя параметрами рассматривались в работах [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Бифуркации некоторых сепаратрисных контуров исследовались в [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. Однако, ряд нетривиальных нелокальных бифуркаций в типичных двухпараметрических семействах до сих пор не описан.

Здесь мы рассмотрим бифуркации в окрестности периодической траектории, содержащей две особых точки типа «развилка» для различных вариантов расположения сепаратрис этих точек.

2 Кусочно-гладкие векторные поля на плоскости и их особые точки типа «развилка»

Пусть M – компактное множество в $\mathbb{R}^2$ с C^∞-гладкой границей, $\mathcal{D} := \{M_1, M_2, ..., M_n\}$, где M_i, $i \in \{1, ..., n\}$ – такие замкнутые подмножества M с C^∞-гладкой границей ∂M_i, что $M = \bigcup_{i=1}^n M_i$, $M_j \cap M_k = \partial M_j \cap \partial M_k$ при $j, k = 1, ..., n$, $j \neq k$.

Пусть $\mathbf{v}^{(i)}$, $i \in \{1, ..., n\}$ – C^r-векторные поля на $M_i (r \geq 2)$. *Кусочно-гладким векторным полем* на M, задаваемым этими векторными полями, назовем класс всех векторных полей $\tilde{\mathbf{v}}$ на M (вообще говоря, разрывных) таких, что $\tilde{\mathbf{v}}(x) = \mathbf{v}^{(i)}(x)$, если $x \in \operatorname{int} M_i$, $i \in \{1, ..., n\}$. Будем его обозначать $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^{(1)}, ..., \mathbf{v}^{(n)})$, а множество таких полей – $\mathfrak{X}^r(M, \mathcal{D})$.

Следуя определению из [1, с. 95] *траекториями поля* $\mathbf{v} \in \mathfrak{X}^r(M, \mathcal{D})$ будем называть траектории дифференциального включения $\dot{x} \in \hat{\mathbf{v}}(x)$, $x \in M$, где $\hat{\mathbf{v}}(x)$ – одноточечное множество $\{\mathbf{v}^{(i)}(x)\}$ для $x \in \operatorname{int} M_i$ и выпуклая оболочка векторов $\mathbf{v}^{(i)}(x)$ и $\mathbf{v}^{(j)}(x)$ для $x \in M_{ij} := \partial M_i \cap \partial M_j \neq \emptyset$.

В точках $a \in M_{ij}$, где $\mathbf{v}^{(i)}(a)$ и $\mathbf{v}^{(j)}(a)$ не касаются M_{ij} и направлены в одну сторону от M_{ij}, для определенности внутрь M_i, положительная (отрицательная) полутраектория поля $\mathbf{v}$, начинающаяся в точке $a \in M_{ij}$, продолжается как положительная (отрицательная) полутраектория поля $\mathbf{v}^{(i)}$ ($\mathbf{v}^{(j)}$). Для остальных точек $a \in M_{ij}$ в $\hat{\mathbf{v}}(a)$ существует единственный вектор $\mathbf{v}_{ij}(a)$, касающийся M_{ij}.

*О*собыми точками поля $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^{(1)}, ..., \mathbf{v}^{(n)})$ будем называть особые точки векторных полей $\mathbf{v}^{(i)}$, точки касания этих полей с ∂M_i и точки $a \in M_{ij}$, в которых $\mathbf{v}_{ij}(a) = \mathbf{0}$.

Пусть поле $\mathbf{v}^{(i)}$ касается ∂M_i в особой точке $O \in M_{ij}$. Выберем C^∞-координаты x_1, x_2 в окрестности $V(O)$ этой точки так, чтобы она имела нулевые координаты, $M_i \cap V(O)$ ($M_j \cap V(O)$) задавалось неравенством $x_2 \geq 0$ ($x_2 \leq 0$). В этих координатах

$$\mathbf{v}^{(s)}(x) = F_{s1}(x_1, x_2)\partial/\partial x_1 + F_{s2}(x_1, x_2)\partial/\partial x_2,$$

где $F_{sl} \in C^r$, $s = i$ и $s = j$, $l = 1, 2$, $F_{i2}(0, 0) = 0$.

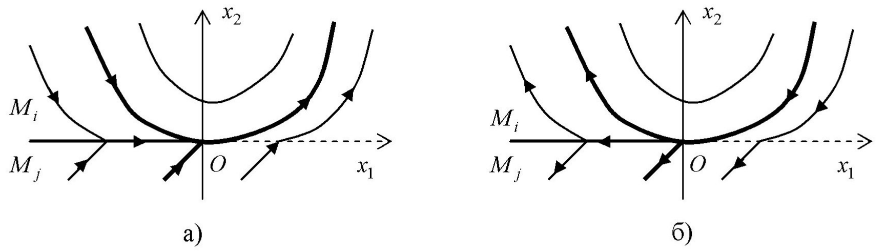

Рис. 1. Развилки: а) сходящаяся развилка, б) расходящаяся развилка

Если $F_{i1}(0,0)\partial F_{i1}(0,0)/\partial x_1 > 0$, а $F_{j2}(0,0) > 0$ ($F_{j2}(0,0) < 0$), то точку O будем называть *сходящейся (расходящейся) развилкой*, а также особой точкой типа «развилка» (рис. 1). Без ограничения общности можно считать, что $F_{i1}(0,0) > 0$, $\partial F_{i1}(0,0)/\partial x_1 > 0$. Для сходящейся развилки положительная полутраектория поля $\mathbf{v}$ начинается из точки $M_{ij} \cap V(O)$ единственным образом как положительная полутраектория поля $\mathbf{v}^{(i)}$ для точек с координатой $x_2 \geq 0$ и как траектория поля $\mathbf{v}_{ij}$ для точек с координатой $x_2 < 0$. Отрицательная полутраектория поля $\mathbf{v}$ начинается из точек $M_{ij} \cap V(O)$ с координатой $x_2 > 0$ единственным образом, как отрицательная полутраектория поля $\mathbf{v}^{(j)}$, а из точек с координатой $x_2 \leq 0$ тремя возможными способами, как отрицательная полутраектория одного из векторных полей $\mathbf{v}^{(i)}$, $\mathbf{v}^{(j)}$ и $\mathbf{v}_{ij}$. Для расходящейся развилки положительная и отрицательная полутраектория меняются ролями.

Из точки O выхолят положительная и отрицательная полутраектории поля $\mathbf{v}^{(i)}$, касающиеся M_{ij} в O. Их продолжения, как полутраекторий поля $\mathbf{v}$, назовем соответственно *выходящей и входящей касательными сепаратрисами* развилки O. Положительную (отрицательную) полутраекторию поля $\mathbf{v}$, начинающуюся в точке O, как положительная (отрицательная) полутраектория поля $\mathbf{v}^{(j)}$, назовем *трансверсальной сепаратрисой* сходящейся (расходящейся) развилки O.

Пусть периодическая траектория Γ поля $\mathbf{v}$ не проходит через особые точки и не является траекторией одного из векторных полей $\mathbf{v}_{ij}$. Тогда Γ либо 1) периодическая траектория одного из векторных полей $\mathbf{v}^{(j)}$, для определенности поля $\mathbf{v}^{(j_1)}$, либо 2) $\Gamma = \cup_{k=1}^{m}\Gamma_k$, где Γ_k дуга траектории векторного поля $\mathbf{v}^{(j_k)}$, $j_k \in \{1, ..., n\}$, начинающаяся в точке $l_k \in M_{j_{k-1}j_k}$, кончающаяся в точке $l_{k+1} \in M_{j_k j_{k+1}}$ и трансверсальная ∂M_{j_k} ($j_{n+1} = j_1$). Выберем C^r-вложение $T : (-1,1) \to \mathrm{int} M_{j_1}$, $T(0) \in \Gamma$, трансверсальное Γ. При достаточно малом $\bar{u} > 0$ определено отображение последования $T(u) \mapsto T(f(u))$, $u \in (-\bar{u}, \bar{u})$, по траекториям поля $\mathbf{v}$, $f \in C^r$, $f(0) = 0$, $f'(u) > 0$. Величина $f'(0)$ не зависит от выбора T. Если $f'(0) \neq 1$, то Γ называется *гиперболической периодической траекторией*

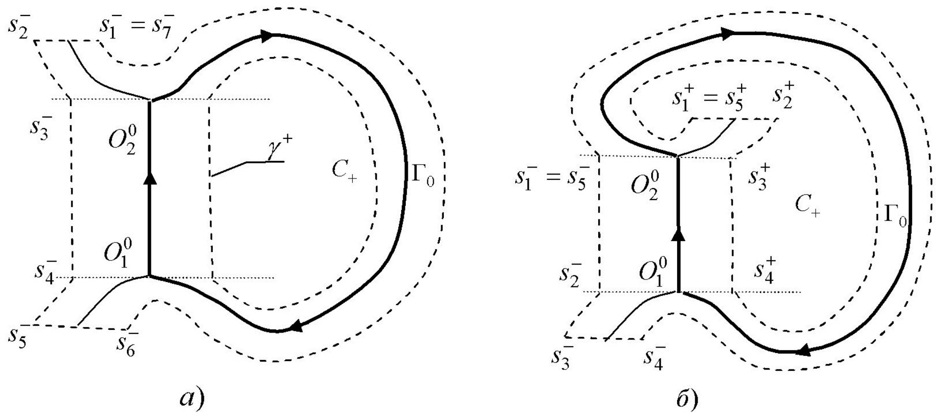

Рис. 2. Периодическая траектория Γ_0 и ее окрестность
а) в случае (А), б) в случае (Б)

(предельным циклом). При $f'(0) < 1$ ($f'(0) > 1$) Γ устойчивая (неустойчивая) траектория. Если $f'(0) = 1$, $f''(0) \neq 0$, то Γ называется *двойным циклом.*

3 Двухпараметрические деформации векторного поля с периодической траекторией, проходящей через две развилки

Пусть Γ_0 – периодическая траектория поля $\mathbf{v}_0 \in \mathfrak{X}^r(M,\mathcal{D})$, проходящая через развилки $O_k^0 \in M_{i_k j_k}$ $(k = 1, 2)$ и не содержащая других особых точек. Тогда Γ_0 является простой замкнутой кривой и $\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma_0$ состоит из двух связных компонент C_+ и C_-, одна из которых, для определенности пусть C_+, не содержит сепаратрисы развилки O_1^0, не принадлежащей Γ_0.

Будем рассматривать следующие случаи:

(A) Γ_0 содержит касательную (трансверсальную) входящую (выходящую) сепаратрисы развилки O_1^0 и касательную (трансверсальную) выходящую (входящую) сепаратрисы развилки O_2^0. Компонента C_+ не содержит сепаратрису развилки O_2^0, не принадлежащую Γ_0 (рис. 2а).

(Б) Γ_0 содержит касательную (трансверсальную) входящую (выходящую) сепаратрисы развилки O_1^0 и касательную (трансверсальную) выходящую (входящую) сепаратрисы развилки O_2^0. Замыкание компоненты C_+ содержит сепаратрису развилки O_2^0, не принадлежащую Γ_0 (рис. 2б).

Пусть семейство векторных полей $\mathbf{v}_\varepsilon = (\mathbf{v}_\varepsilon^{(1)}, ..., \mathbf{v}_\varepsilon^{(n)}) \in \mathfrak{X}^r(M,\mathcal{D})$ – двухпараметрическая деформация векторного поля $\mathbf{v}_0$, имеющего периодическую траекторию Γ_0 , удовлетворяющую одному из условий (А) и

(Б). Будем считать, что двумерный параметр $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, меняется в окрестности E^0 нуля в $\mathbb{R}^2$, а отображения $M_i \times \mathrm{E}^0 \ni (x, \varepsilon) \mapsto \mathbf{v}_\varepsilon^{(i)}(x)$, $i \in \{1, ..., n\}$, принадлежат классу C^r $(r \geq 2)$.

Для определенности будем считать, что касательные сепаратрисы развилки O_k^0, $k = 1, 2$ начинаются в M_{i_k}. Выберем такие C^r-гладкие вложения $T_1 : (-1, 1) \to \mathrm{int} M_{j_1}$, $T_2 : (-1, 1) \to \mathrm{int} M_{i_1}$, что дуга $T_1(-1, 1)$ (соотв. $T_2(-1, 1)$) трансверсально пересекает Γ_0 в точке $T_1(0)$ (соотв. $T_2(0)$), при этом $T_k(0, 1) \subset C_+$, $k = 1, 2$.

Используя теорему о неявной функции, получим, что найдется такая окрестность нуля $\mathrm{E}^1 \subset \mathrm{E}^0$, что поле $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\varepsilon \in \mathrm{E}^1$, имеет развилки $O_k(\varepsilon) \in M_{i_k j_k}$, $O_k(\cdot) \in C^r$, $O_k(0) = O_k^0$, $k = 1, 2$. Окрестность E^1 можно взять столь малой, что выходящая (соотв. входящая) сепаратриса развилки $O_1(\varepsilon)$ трансверсально пересекает $T_1(-1, 1)$ (соотв. $T_2(-1, 1)$) в точке $T_1(u_{11}(\varepsilon))$ (соотв. $T_2(u_{21}(\varepsilon))$), где $u_{i1}(\cdot) \in C^r$, $u_{i1}(0) = 0$ $(i = 1, 2)$, а входящая (соотв. выходящая) сепаратриса точки $O_2(\varepsilon)$, трансверсально пересекает $T_1(-1, 1)$ (соотв. $T_2(-1, 1)$) в точке $T_1(u_{12}(\varepsilon))$ (соотв. $T_2(u_{22}(\varepsilon))$), где $u_{i2}(\cdot) \in C^r$, $u_{i2}(0) = 0$ $(i = 1, 2)$. Обозначим $\Delta_i(\varepsilon) := u_{i1}(\varepsilon) - u_{i2}(\varepsilon)$, $i = 1, 2$.

Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\det\left(\partial \Delta_i(0, 0)/\partial \varepsilon_j\right) \neq 0. \tag{1}$$

При условии (1), сделав в некоторой окрестности нуля $\mathrm{E}^* \subset \mathrm{E}^1$ на плоскости параметров C^r-замену координат $\Delta_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \tilde{\varepsilon}_i$ $(i = 1, 2)$ и вернувшись к прежним обозначениям $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ параметров, можно считать, что

$$\Delta_i(\varepsilon) = \varepsilon_i, \;\; i = 1, 2, \tag{2}$$

а $\mathrm{E}^* = (-\delta^*, \delta^*)^2$.

Везде далее будем предполагать, что семейство векторных полей $\mathbf{v}_\varepsilon$ удовлетворяет условию (1), а параметры $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ выбраны так, что справедливо равенство (2).

4 Бифуркации векторного поля, удовлетворяющего условиям (А)

Пусть $\tau_\varepsilon^k : (-1, 1) \to M_{i_k j_k}$, $\varepsilon \in \mathrm{E}^*$, $k = 1, 2$, такие C^r-вложения, что $\tau_\varepsilon^k(0) = O_k(\varepsilon)$, $\tau_\varepsilon^k(v)$ C^r-гладко зависит от (v, ε), $\tau_0^k(0, 1) \subset C_+$. Тогда, используя леммы о пересечении траекторий с дугами без контакта [18, параграф 3] и учитывая равенства (2), получаем, что числа $u_1 > 0$, $v_1 > 0$ и $\delta_1 \in (0, \delta^*]$ можно выбрать так, что $\forall \varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$ определены отображения

$$T_1(u_{12}(\varepsilon)) + u) \mapsto \tau_\varepsilon^2(\varphi_1(u, \varepsilon)), \;\; u \in [-u_1, u_1],$$

$$\tau_\varepsilon^2(v, \varepsilon)) \mapsto T_2(u_{22}(\varepsilon) + \varphi_2(v, \varepsilon)), \;\; v \in [0, v_1]$$

по траекториям поля $\mathbf{v}_\varepsilon$ и отображения

$$T_1(u_{12}(\varepsilon)) + u) \mapsto \tau^1_\varepsilon(\psi_1(u,\varepsilon)),\ \ u \in [-u_1, u_1],$$

$$\tau^1_\varepsilon(v,\varepsilon)) \mapsto T_2(u_{21}(\varepsilon) + \psi_2(v,\varepsilon)),\ \ v \in [0, v_1]$$

по траекториям поля $-\mathbf{v}_\varepsilon$, где $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in C^r$,

$\forall u \in [-u_1, u_1]\ \ \forall \varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$

$$(\varphi_1)'_u(u,\varepsilon) > 0,\ (\psi_1)'_u(u,\varepsilon) > 0,\ \varphi_1(0,\varepsilon) = 0,\ \psi_1(\varepsilon_1,\varepsilon) = 0, \tag{3}$$

$\forall v \in (0, v_1]\ \ \forall \varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$

$$(\varphi_2)'_v(v,\varepsilon) > 0,\ (\psi_2)'_v(v,\varepsilon) > 0,\ \varphi_2(0,\varepsilon) = 0,\ \psi_2(0,\varepsilon) = \varepsilon_2. \tag{4}$$

Из условий, определяющих особую точку типа «развилка», следует (см. [17]), что $\forall \varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$

$$(\varphi_2)'_v(0,\varepsilon) = 0, (\psi_2)'_v(0,\varepsilon) = 0, (\varphi_2)''_{vv}(0,\varepsilon) > 0, (\psi_2)''_{vv}(0,\varepsilon) > 0. \tag{5}$$

Пусть $\varphi(u,\varepsilon) := \varphi_2(\varphi_1(u,\varepsilon),\varepsilon)$, $\psi(u,\varepsilon) := \psi_2(\psi_1(u,\varepsilon),\varepsilon)$. Ввиду (3) и (4) можно считать, что $\varphi(u,\varepsilon)$ определена на множестве $[0,u_1]\times(-\delta_1,\delta_1)^2$, а $\psi(u,\varepsilon)$ на множестве $\{(u,\varepsilon) : \varepsilon \in (-\delta_1,\delta_1)^2,\ \varepsilon_1 \le u \le u_1\}$.

Обозначим $\lambda_+ := \varphi''_{uu}(0,0)$, $\lambda_- := \psi''_{uu}(0,0)$. Вследствие (3)–(5)

$$\lambda_+ = (\varphi_2)''_{vv}(0,0)[(\varphi_1)'_u(0,0)]^2 > 0,\ \ \lambda_- = (\psi_2)''_{vv}(0,0)[(\psi_1)'_u(0,0)]^2 > 0.$$

Нетрудно убедиться, что число $\lambda := \lambda_+/\lambda_-$ не зависит от произвола в выборе отображений T_k и τ^k_0 и потому является характеристикой траектории Γ_0 поля $\mathbf{v}_0$.

Теорема 1. *Пусть имеет место случай (A), при этом $\lambda < 1$. Тогда существуют число $\delta \in (0,\delta_1)$, окрестность U траектории Γ_0 и разбиение области параметров $\mathrm{E} := (-\delta,\delta)^2$ на множества $\mathrm{B}_0 = \{(0,0)\}$, B_i, E_i ($i \in \{1,2,...,7\}$) (рис. 3), где*

$\mathrm{B}_1 = (0,\delta) \times \{0\}$, $\mathrm{B}_j = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = \beta_j(\varepsilon_1)\}$, $\beta_j : (0,\delta) \to (0,\delta)$, $\beta_j \in C^1$, $\beta_j(+0) = \beta'_j(+0) = 0$, $j = 2,3$, $\beta_2(\varepsilon_1) < \beta_3(\varepsilon_1)$, $\mathrm{B}_4 = \{0\} \times (0,\delta)$, $\mathrm{B}_5 = (-\delta,0) \times \{0\}$, $\mathrm{B}_6 = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = \beta_6(\varepsilon_1)\}$, $\beta_6 : (-\delta,0) \to (-\delta,0)$, $\beta_6 \in C^1$, $\beta_6(-0) = \beta'_6(-0) = 0$, $\mathrm{B}_7 = \{0\} \times (-\delta,0)$,

E_i *– связная компонента* $\mathrm{E}\setminus \cup_{k=0}^7 \mathrm{B}_k$, *в границу которой входят* B_i *и* B_{i+1} ($\mathrm{B}_8 := \mathrm{B}_1$),

такие, что схемы фазовых портретов в U векторных полей $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\varepsilon \in \mathrm{E}$, имеют вид, изображенный на рис. 3.

Случай $\lambda > 1$ сводится к случаю $\lambda < 1$ переходом к семейству противоположных векторных полей $-\mathbf{v}_\varepsilon$, и переменой нумерации развилок.

Доказательство. Пусть $\psi^{-1}(\cdot,\varepsilon)$ – функция, обратная к $\psi(\cdot,\varepsilon)$. Определим функцию последования $f(\cdot,\varepsilon) := \psi^{-1}(\varphi(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)$ по траекториям поля $\mathbf{v}_\varepsilon$ и функцию расхождения траекторий $d(\cdot,\varepsilon) := \varphi(\cdot,\varepsilon) - \psi(\cdot,\varepsilon)$. Тогда $\forall \varepsilon \in (-\delta_1,\delta_1)^2$ функция $d(\cdot,\varepsilon)$ определена на $[0,u_1]$, если $\varepsilon_1 \le 0$, и на $[\varepsilon_1,u_1]$, если $\varepsilon_1 > 0$.

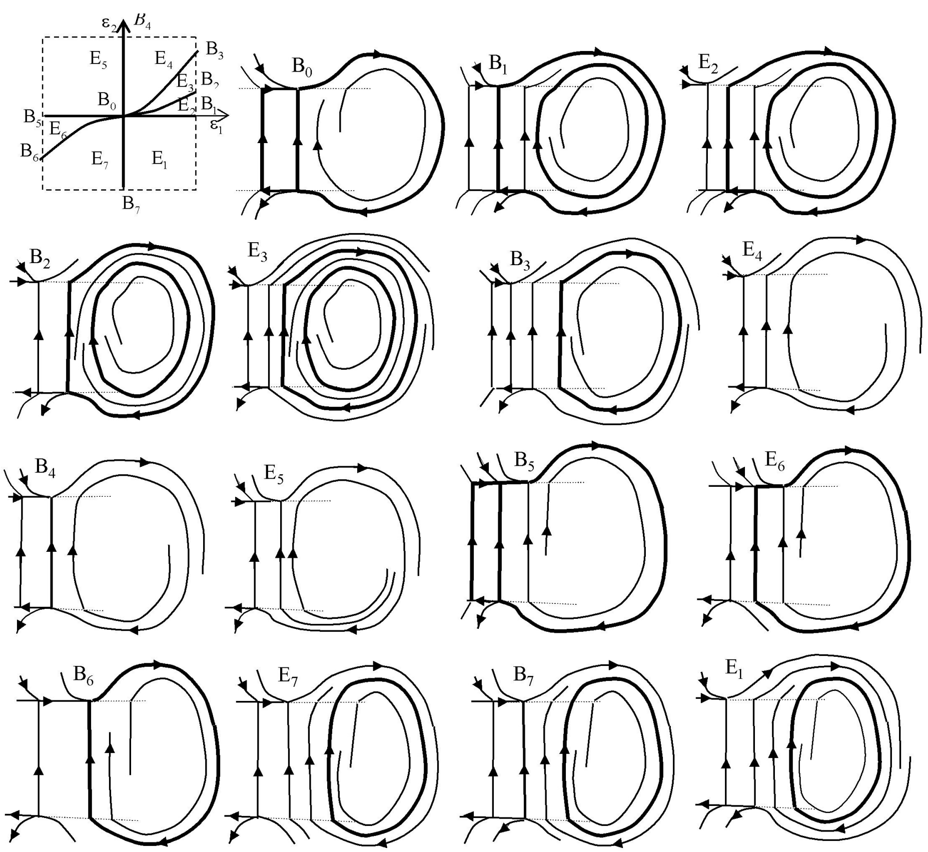

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма и бифуркации фазовых портретов в случае (A) и $\gamma < 1$

Через точку $T_1(u_{12}(\varepsilon)) + u_*)$, где $u_* \in (0, u_1]$ при $\varepsilon_1 \le 0$ и $u_* \in (\varepsilon_1, u_1]$ при $\varepsilon_1 > 0$, проходит устойчивая (неустойчивая) гиперболическая периодическая траектория тогда и только тогда, когда $f(u_*, \varepsilon) - u_* = 0$, $f'_u(u_*, \varepsilon) < 1$ ($f'_u(u_*, \varepsilon) > 1$), проходит двойной цикл тогда и только тогда, когда $f(u_*, \varepsilon) - u_* = f'_u(u_*, \varepsilon) - 1 = 0$, $f''_{uu}(u_*, \varepsilon) \neq 0$.

Для функции расхождения эти условия принимают соответственно вид $d(u_*, \varepsilon) = 0$, $d'_u(u_*, \varepsilon) < 0$ ($d'_u(u_*, \varepsilon) > 0$) и $d(u_*, \varepsilon) = d'_u(u_*, \varepsilon) = 0$, $d''_{uu}(u_*, \varepsilon) \neq 0$.

Продолжим φ и ψ до C^r-функций, соответственно, $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ на $[-u_1, u_1] \times (-\delta_1, \delta_1)^2$. Пусть $\bar{d}(u, \varepsilon) := \bar{\varphi}(u, \varepsilon) - \bar{\psi}(u, \varepsilon)$.

Ввиду (3)–(5)

$$\bar{\varphi}(u, \varepsilon) = (\lambda_+/2)u^2 + R_1(u, \varepsilon), \ \ \bar{\psi}(u, \varepsilon) = \varepsilon_2 + (\lambda_-/2)(u - \varepsilon_1)^2 + R_2(u - \varepsilon_1, \varepsilon), \tag{6}$$

где

$$R_k(0, \varepsilon) = (R_k)'_u(0, \varepsilon) = (R_k)'_{\varepsilon_j}(0, \varepsilon) = (R_k)''_{u\varepsilon_j}(0, \varepsilon) = 0, \ \ k, j = 1, 2, \tag{7}$$

и, следовательно,
$$\bar d(0,0) = \bar d'_u(0,0) = 0. \tag{8}$$

Так как $\bar d'_{\varepsilon_2}(u,\varepsilon) = -1 + R'_{1\varepsilon_2}(u,\varepsilon) - R'_{2\varepsilon_2}(u-\varepsilon_1,\varepsilon)$, то u_1 и δ_1 можно выбрать так, что
$$\bar d'_{\varepsilon_2}(u,\varepsilon) < 0 \text{ для всех } (u,\varepsilon) \in (-u_1,u_1)\times(-\delta_1,\delta_1)^2. \tag{9}$$

Поскольку $\lambda = \lambda_+/\lambda_- < 1$, то $d''_{uu}(0,0) = \lambda_+ - \lambda_- < 0$. Следовательно, u_1 и δ_1 можно считать столь малыми, что
$$\bar d''_{uu}(u,\varepsilon) < 0 \text{ для всех } (u,\varepsilon) \in (-u_1,u_1)\times(-\delta_1,\delta_1)^2. \tag{10}$$

Из (6) и (7) следует, что u_1 и δ_1 можно считать выбранными так, что
$$d'_u(u,\varepsilon) < 0 \text{ для всех } u \in [0,u_1],\ \varepsilon \in (-\delta_1,0]\times(-\delta_1,\delta_1). \tag{11}$$

Из (8) и (10) вытекает, что $d(u,0) < 0$ для всех $u \in [0,u_1]$. Пусть $0 < u_2 < f(u_1,0) < u_1$. Взяв δ_1 достаточно малым, получим
$$d(u,\varepsilon) < 0 \text{ для всех } \varepsilon \in (0,\delta_1)\times(-\delta_1,\delta_1),\ \varepsilon_1 < u_2 \le u \le u_1. \tag{12}$$

Используя леммы о траекториях между дугами без контакта [18, параграф 3] и учитывая неравенство $f(u_1,0) < u_1$, можно построить простые замкнутые кривые $\gamma^\pm \in C_\pm$ со следующими свойствами:

1) Γ_0 и $\gamma^\pm$ ограничивают цилиндрическую полуокрестность $U_\pm$ траектории Γ_0 , не содержащую особых точек поля $\mathbf{v}_0$, 2) $\gamma^+ = \cup_{j=1}^N \gamma_j^+$, где γ_j^+ гладкая дуга в M_{k_j}, при некотором $k_j \in \{1,...,n\}$ с концами, принадлежащим ∂M_{k_j}, и трансверсальная ∂M_{k_j}, 2) пересечение γ^+ с $T_1(-u_1,u_1)$ трансверсально и состоит из одной точки $T_1(f(u_1,0))$, 4) поле $\mathbf{v}_0^{(k_j)}$ в точках дуг γ_j^+ трансверсально γ_j^+, а траектории поля $\mathbf{v}_0$ в этих точках входят в U_+, 6) γ^-, состоит из дуг $[s_i^- s_{i+1}^-]$, $i \in \{1,...,6\}$, с концами в точках s_i^- и s_{i+1}^-, где $s_2^- \in \tau_0^2(-u_1,0)$, $s_3^- \in \tau_0^1(-u_1,0)$, 7) $[s_1^- s_2^-]$ и $[s_2^- s_3^-]$ (соотв. $[s_4^- s_5^-]$ и $[s_5^- s_6^-]$) – гладкие дуги в M_{i_1} (соотв. в M_{i_2}), трансверсальные траекториям поля $\mathbf{v}_0^{(i_1)}$ (соотв. $\mathbf{v}_0^{(i_2)}$), причем в точках дуг $[s_1^- s_2^-]$, $[s_2^- s_3^-]$ и $[s_4^- s_5^-]\backslash\{s_5^-\}$ траектории поля $\mathbf{v}_0$ входят в U_-, а в точках дуги $[s_5^- s_6^-]$ они выходят из U_-, 8) дуги $[s_3^- s_4^-]$ и $[s_6^- s_7^-]$ состоят из гладких дуг, принадлежащих одному из множеств M_k, в точках которых траектории поля $\mathbf{v}_0^{(k)}$трансверсальны этим дугам, причем в точках дуг $[s_3^- s_4^-]$ и $[s_6^- s_7^-]\backslash\{s_6^-\}$ траектории поля входят в U_-, 9) дуги $T_1(-u_1,0)$ и $[s_3^- s_4^-]$ трансверсально пересекаются в единственной точке.

Возьмем $U := U_+ \cup \Gamma_0 \cup U_-$.

Выбрав число δ_1 достаточно малым, получим, что при $\varepsilon \in (-\delta_1,\delta_1)^2$ поле $\mathbf{v}_\varepsilon$ не имеет в U особых точек, отличных от $O_1(\varepsilon)$ и $O_2(\varepsilon)$, траектории поля $\mathbf{v}_\varepsilon$ в точках γ^+ и $\gamma^-\backslash[s_5^- s_6^-]$ входят в U, а в точках дуги $[s_5^- s_6^-]\backslash\{s_5^-, s_6^-\}$ выходят из в U,
$$l_\varepsilon := T_1(u_{12}(\varepsilon)) - u_1, u_{12}(\varepsilon)) + u_1) \cap U = T_1(u_{12}(\varepsilon)) + u_-(\varepsilon), u_{12}(\varepsilon)) + u_+(\varepsilon)),$$
где $u_2 < u_+(\varepsilon) < u_1$, $-u_1 < u_-(\varepsilon) < 0$.

Тогда при $\varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$ касательная выходящая (входящая) сепаратриса развилки $O_1(\varepsilon)$ (соотв. $O_2(\varepsilon)$) пересекает дугу $[s_1^- s_2^-]$ (соотв. $[s_5^- s_6^-]$) в ее внутренней точке, любая периодическая траектория поля $\mathbf{v}_\varepsilon$, содержащаяся в U, пересекает дугу l_ε, а периодическая траектория этого поля, начинающаяся в точке l_ε, не выходит из U.

Пусть $l_\varepsilon^+ := T_1[u_{12}(\varepsilon)) + \varepsilon_1, u_{12}(\varepsilon)) + u_+(\varepsilon))$, если $\varepsilon_1 > 0$ и $l_\varepsilon^+ := T_1[u_{12}(\varepsilon)), u_{12}(\varepsilon)) + u_+(\varepsilon))$, если $\varepsilon_1 \le 0$, $l_\varepsilon^- := l_\varepsilon \backslash l_\varepsilon^+$.

Ввиду (6) и (7) $\bar{\varphi}(\varepsilon_1, \varepsilon)\,|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2}\bar{\varphi}(\varepsilon_1, \varepsilon)\,|_{\varepsilon=0} = 0$, $k = 1, 2$. Поэтому существует такое $\delta \in (0, \delta_1)$, что для любого $\varepsilon_1 \in (-\delta, \delta)$ уравнение $\bar{\varphi}(\varepsilon_1, \varepsilon) - \varepsilon_2 = 0$ имеет единственное решение $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)$, где $\beta_2(\cdot) \in C^r$,

$$0 < \beta_2(\varepsilon) = (\lambda_+/2)\varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2) < \delta. \tag{13}$$

Так как при $\varepsilon_1 > 0$ имеем $\bar{\varphi}(\varepsilon_1, \varepsilon) = \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon)$, то, учитывая (9), получаем $\forall \varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta)$

$$\operatorname{sgn} d(\varepsilon_1, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon) - \varepsilon_2) = \operatorname{sgn}(\beta_2(\varepsilon_1) - \varepsilon_2). \tag{14}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\bar{d}(u, \varepsilon) = 0, \;\; \bar{d}'_u(u, \varepsilon) = 0. \tag{15}$$

Из (6) и (7) находим, что

$$\begin{vmatrix} \bar{d}'_u(0,0) & \bar{d}'_{\varepsilon_2}(0,0) \\ \bar{d}''_{uu}(0,0) & \bar{d}''_{u\varepsilon_2}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \lambda_+ - \lambda_- & \bar{d}''_{u\varepsilon_2}(0,0) \end{vmatrix} = \lambda_+ - \lambda_- \neq 0. \tag{16}$$

Из (8) и (16) по теореме о неявной функции вытекает, что δ можно считать выбранным так, что для любого $\varepsilon_1 \in (-\delta, \delta)$ система уравнений (15) имеет единственное решение $u = \hat{u}(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_2 = \beta_3(\varepsilon_1)$, где функции $\hat{u}(\cdot), \beta_3(\cdot) \in C^{r-1}$, $\hat{u}(0) = \beta_3(0) = 0$. Используя (6) и (7), получаем

$$\hat{u}(\varepsilon_1) = \frac{\lambda_-}{\lambda_- - \lambda_+}\varepsilon_1 + o(\varepsilon_1), \;\; \beta_3(\varepsilon_1) = \frac{\lambda_+ \lambda_-}{2(\lambda_- - \lambda_+)}\varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2).$$

Считая δ достаточно малым, отсюда и из (13) имеем

$$\forall \varepsilon_1 \in (0, \delta) \;\; \beta_2(\varepsilon_1) < \beta_3(\varepsilon_1) < \varepsilon_1 < \delta, \;\; \varepsilon_1 < \hat{u}(\varepsilon_1) < u_2,$$

и потому для всех $\varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta)$ и $u \in [\varepsilon_1, u_1]$

$$d(u, \varepsilon) = d'_u(u, \varepsilon) = 0 \Leftrightarrow u = \hat{u}(\varepsilon_1), \;\; \varepsilon_2 = \beta_3(\varepsilon_1). \tag{17}$$

Из (6)–(9) по теореме о неявной функции получаем, что число δ можно выбрать так, что для любого $\varepsilon_1 \in (-\delta, \delta)$ уравнение $\bar{d}(0, \varepsilon) = 0$ имеет единственное решение $\varepsilon_2 = \beta_6(\varepsilon_1)$, где $\beta_6(\cdot) \in C^1$, $\beta_6(\varepsilon) = -(\lambda_-/2)\varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2)$. Считая δ достаточно малым, будем иметь $\beta_6(\varepsilon_1) \in (-\delta, 0)$ при $\varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$ и

$$\operatorname{sgn} d(0, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\beta_6(\varepsilon_1) - \varepsilon_2) \text{ для всех } \varepsilon \in (-\delta, 0] \times (-\delta, \delta). \tag{18}$$

Определим теперь множества B_i и E_i ($i \in \{1, 2, ..., 7\}$) так, как они описаны в формулировке теоремы.

Пусть $\varepsilon \in \mathrm{B}_2 \cup \mathrm{E}_3 \cup \mathrm{B}_3 \cup \mathrm{E}_4$, то есть $\varepsilon_1 \in (0, \delta)$, $\beta_2(\varepsilon_1) \le \varepsilon_2 < \delta$. Положительная полутраектория L^+ поля $\mathbf{v}_\varepsilon$, начинающаяся в точке дуги

l^-_ε, проходит через точку $\tau^2_\varepsilon(\varphi_1(u,\varepsilon))$ для некоторого $u \in [0, \varepsilon_1)$. Из (14) следует, что $\varphi(u,\varepsilon) < \varphi(\varepsilon_1,\varepsilon) \le \varepsilon_2 = \psi(0,\varepsilon)$. Поэтому L^+ выходит из U (в точке дуги $[s^-_5 s^-_6]$). Тем самым, любая периодическая траектория, лежащая в U, пересекает дугу l^+_ε.

Из (17) и (10) получаем, что при $\varepsilon \in \mathrm{B}_3$ поле $\mathbf{v}_\varepsilon$ имеет в U единственную периодическую траекторию – двойной цикл, проходящий через точку $T_1(u_{12}(\varepsilon)) + \hat{u}(\varepsilon_1)) \in l^+_\varepsilon$, а асимптотическое поведение остальных траекторий такое, как указано на рис. 3.

Из (17) и (10) также следует, что при $\varepsilon \in \mathrm{B}_3$, $u \ne \hat{u}(\varepsilon_1)$ $d(u,\varepsilon) < 0$. Отсюда и из (9) получаем, что $d(u,\varepsilon) < 0$, если $\varepsilon \in \mathrm{E}_4$, $u \in [\varepsilon_1, u_1]$. Следовательно, при $\varepsilon \in \mathrm{E}_4$ поле $\mathbf{v}_\varepsilon$ не имеет в U периодических траекторий; все положительные и отрицательные полутраектории выходят из U.

Вследствие (17) и (9) имеем $d(\hat{u}(\varepsilon_1),\varepsilon) > 0$ при $\varepsilon_1 \in (0,\delta)$, $-\delta < \varepsilon_2 < \beta_3(\varepsilon_1)$. Отсюда, из (10), (12) и (14) получаем, что для любого $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ с $\varepsilon_1 \in (0,\delta)$, $\beta_2(\varepsilon_1) \le \varepsilon_2 < \beta_3(\varepsilon_1)$ существует такое число $u_M(\varepsilon) \in (\varepsilon_1, u_2)$, что

$$d(u_M(\varepsilon),\varepsilon) > 0,\ \operatorname{sgn} d\,'_u(u,\varepsilon) = \operatorname{sgn}(u_M(\varepsilon) - u) \ \text{ для } \ u \in [\varepsilon_1, u_1]. \quad (19)$$

Из (19), (12) и (14) следует, что при $\varepsilon \in \mathrm{B}_2 \cup \mathrm{E}_3$ $d(\cdot,\varepsilon)$ имеет ровно два нуля: $u_R(\varepsilon) \in (u_M(\varepsilon), u_2)$, $d'_u(u_R(\varepsilon),\varepsilon) < 0$ и $u_L(\varepsilon) = \varepsilon_1$, если $\varepsilon \in \mathrm{B}_2$, $u_L(\varepsilon) \in (\varepsilon_1, u_M(\varepsilon))$, если $\varepsilon \in \mathrm{E}_3$, при этом $d'_u(u_L(\varepsilon),\varepsilon) > 0$. Соответственно, при $\varepsilon \in \mathrm{E}_3$ в U имеется ровно две периодических траектории – устойчивая и неустойчивая гиперболические периодических траектории, а при $\varepsilon \in \mathrm{B}_2$ в U имеется устойчивая гиперболическая периодическая траектория и периодическая траектория, проходящая через развилку $O_1(\varepsilon)$. Асимптотическое поведение остальных траекторий такое, как указано на рис. 3.

При $\varepsilon \in \mathrm{E}_1 \cup \mathrm{B}_1 \cup \mathrm{E}_2$ из (12), (14) и (10) следует, что $d(\cdot,\varepsilon)$ имеет единственный нуль $u_R(\varepsilon) \in (\varepsilon_1, u_2)$, при этом $d'_u(u_R(\varepsilon),\varepsilon) < 0$. Следовательно, дугу l^+_ε пересекает единственная периодическая траектория $\Gamma_s(\varepsilon)$; она гиперболическая и устойчивая, а остальные траектории, пересекающие l^+_ε, ω-предельны к $\Gamma_s(\varepsilon)$.

При тех же ε исследуем траектории, пересекающие дугу l^-_ε.

Пусть $\varepsilon \in \mathrm{E}_2$. Ввиду (3) и (4) $\varphi(0,\varepsilon) \equiv 0 < \varepsilon_2$. Вследствие (14) $\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon) > \varepsilon_2$. Так как $\varphi'_u(u,\varepsilon) > 0$, то существует единственное число $u_L(\varepsilon) \in (0,\varepsilon_1)$ такое, что $\varphi(u_L(\varepsilon),\varepsilon) = \varepsilon_2$. Тем самым, дугу l^-_ε пересекает единственная периодическая траектория $\Gamma_u(\varepsilon)$. Она содержит отрезок $\tau^1_\varepsilon[\psi_1(u_L(\varepsilon),\varepsilon), 0]$, и потому неустойчива. Поведение непериодических траекторий, пересекающих эту дугу показано на рис. 3.

Пусть $\varepsilon \in \mathrm{B}_1$. Так как $\varphi(0,\varepsilon) = \varphi_2(0,\varepsilon) = 0 = \psi_2(0,\varepsilon)$, то положительная полутраектория, выходящая из точки $O_2(\varepsilon)$, проходит и через точку $O_1(\varepsilon)$. Если $u \in (0,\varepsilon_1)$, то $\varphi(u,\varepsilon) > 0 = \psi_2(0,\varepsilon)$, и потому через точку $T_1(u_{12}(\varepsilon) + u)$ не проходит периодическая траектория. Через каждую точку $T_1(u_{12}(\varepsilon)+u)$, $u\in[-u_1,0]$, проходит континуум периодических траекторий. Они содержит отрезки $\tau_\varepsilon^2[\varphi_1(u,\varepsilon),0]$ и $\tau_\varepsilon^1[\psi_1(u,\varepsilon),0]$, и, очевидно, неустойчивы.

Покажем, что при $\varepsilon\in \mathrm{E}_1$ через точки дуги l_ε^- не проходят периодические траектории. Положительная полутраектория L^+, выходящая из точки дуги l_ε^-, проходит через точку $\tau_\varepsilon^2(\varphi_1(u_*,\varepsilon))$, $u_*\in[0,\varepsilon_1)$. Так как $\varphi(u_*,\varepsilon)\geq\varphi(0,\varepsilon)=0>\varepsilon_2$, то $\psi^{-1}(\varphi(u_*,\varepsilon),\varepsilon)>\psi^{-1}(\varepsilon_2,\varepsilon)=\varepsilon_1$. Поэтому L^+ пересекает дугу l_ε^+, и, следовательно, ω-предельна к периодической траектории $\Gamma_s(\varepsilon)$.

Из (11), (18) и (12) получаем следующие утверждения:

При $\varepsilon\in \mathrm{E}_7$ и $\varepsilon\in \mathrm{B}_7$ с дугой l_ε^+ пересекается единственная (устойчивая гиперболическая периодическая траектория $\Gamma_s(\varepsilon)$. При $\varepsilon=0$ с дугой l_0^+ пересекается единственная (устойчивая) периодическая траектория Γ_0. При $\varepsilon\in \mathrm{B}_6$ с дугой l_0^+ пересекается единственная (устойчивая) периодическая траектория $\Gamma_s(\varepsilon)$, образованная совпадающими сепаратрисами точки $O_2(\varepsilon)$. При $\varepsilon\in \mathrm{B}_4\cup \mathrm{E}_5\cup \mathrm{B}_5\cup \mathrm{E}_6$ нет периодических траекторий, пересекающихся с дугой l_0^+.

Рассмотрим теперь траектории, пересекающие дугу l_ε^- при $\varepsilon\in(-\delta,0]\times(-\delta,\delta)$.

При $\varepsilon\in \mathrm{B}_4$ и $\varepsilon\in \mathrm{B}_7$ положительная и отрицательная полутраектории, начинающиеся в точке дуги l_ε^- проходят, соответственно через точки $O_2(\varepsilon)$ и $O_1(\varepsilon)$, а потому пересекают дугу $T_2(-1,1)$ в несовпадающих точках $T_2(u_{22}(\varepsilon))$ и $T_2(u_{22}(\varepsilon)+\varepsilon_2)$. Следовательно, периодических траекторий, пересекающихся с дугой l_ε^- , нет. При $\varepsilon=0$ через каждую точку дуги l_ε^- проходит периодическая траектория. При $\varepsilon\in \mathrm{B}_6$ положительная полутраектория, начинающаяся в точке дуги l_ε^-, проходит через точку $O_2(\varepsilon)$, и потому ω-предельна к периодической траектории $\Gamma_s(\varepsilon)$.

Пусть $\varepsilon\in \mathrm{E}_6$. Через точку $T_1(u_{12}(\varepsilon))+u)$, $u\in(\varepsilon_1,0)$, дуги l_ε^- проходит периодическая траектория тогда и только тогда, когда $\psi(u,\varepsilon)=0$. Так как $\psi(0,\varepsilon)=-d(0,\varepsilon)$, то из (18) имеем $\psi(0,\varepsilon)>0$. Поскольку $\psi(\varepsilon_1,\varepsilon)=\varepsilon_2<0$, а $\psi'_u(u,\varepsilon)>0$, то уравнение $\psi(u,\varepsilon)=0$ имеет единственное решение $u=u_R(\varepsilon)\in(\varepsilon_1,0)$. Через точку $T_1(u_{12}(\varepsilon))+u_R(\varepsilon))$ проходит устойчивая периодическая траектория $\Gamma_R(\varepsilon)$. Все остальные траектории, проходящие через точки дуги l_ε^-, совпадают с $\Gamma_R(\varepsilon)$, начиная с некоторого положительного момента времени, и потому непериодические.

При $\varepsilon\in \mathrm{B}_5$ через каждую точку $T_1(u_{12}(\varepsilon))+u)$, $u\in(-u_-(\varepsilon),\varepsilon_1]$ проходит периодическая траектория. Траектории, проходящие через точки $T_1(u_{12}(\varepsilon))+u)$, $u\in(\varepsilon_1,0)$ начиная с некоторого положительного момента времени совпадают с траекториями, проходящими через точки $T_1(u_{12}(\varepsilon))+u_*)$, $u_*\in(-u_1,\varepsilon_1]$, и потому непериодические. □

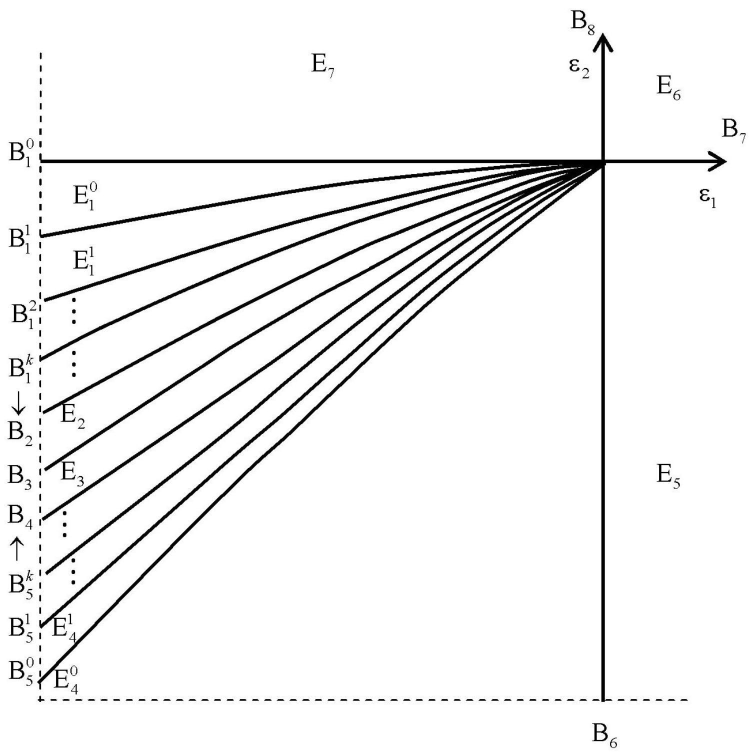

Рис. 4. Бифуркационная диаграмма в случае (Б)

5 Бифуркации векторного поля, удовлетворяющего условиям (Б)

Функции $\psi(u,\varepsilon)$ и $\varphi_1(u,\varepsilon)$ определим так же, как в доказательстве теоремы 1. При достаточно малом $v_1 > 0$ определено отображение

$$\tau^2_\varepsilon(v,\varepsilon)) \mapsto T_2(u_{22}(\varepsilon)+\varphi_2(v,\varepsilon)),\ \ v\in(-v_1,0],$$

по траекториям поля $\mathbf{v}_\varepsilon$, при этом

$$\varphi_2(0,\varepsilon) = (\varphi_2)'_v(0,\varepsilon) = 0,\ \ (\varphi_2)''_{vv}(0,\varepsilon) < 0. \tag{20}$$

Функция $\varphi(u,\varepsilon) := \varphi_2(\varphi_1(u,\varepsilon),\varepsilon)$ теперь определена на множестве $[-u_1,0]\times(-\delta_1,\delta_1)^2$. Числа λ_+ и λ_- определим так же, как и в случае (А). Ввиду (20) теперь $\lambda_+ < 0$. Положим $\lambda := -\lambda_+/\lambda_-$.

Теорема 2. *Пусть имеет место случай (Б), при этом $\lambda \neq 1$. Тогда существуют число $\delta\in(0,\delta^*)$, окрестность U траектории Γ_0 и разбиение области параметров $\mathrm{E} := (-\delta,\delta)^2$ на множества $\mathrm{B}_0 = \{(0,0)\}$, B_i, $i\in\{1,2,...,8\}$, E_j , $j\in\{1,2,...,7\}$, где (рис. 4)*

$\mathrm{B}_i = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = \beta_i(\varepsilon_1)\}$, *$\beta_i : (-\delta,0)\to(-\delta,0)$, $\beta_i\in C^1$, $\beta_i(-0) = \beta_i'(-0) = 0$ для $i = 2,3,4$, $\beta_4(\varepsilon_1) < \beta_3(\varepsilon_1) < \beta_2(\varepsilon_1)$,*

$B_1 = \cup_{k=0}^{\infty} B_1^k$, $B_1^0 = (-\delta, 0) \times \{0\}$, $B_1^k = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = \beta_1^k(\varepsilon_1)\}$, $\beta_1^k : (-\delta, 0) \to (-\delta, 0)$, $\beta_1^k \in C^1$, $\beta_1^k(\varepsilon_1) \downarrow \beta_2(\varepsilon_1)$ *при* $k \geq 1$,

$B_5 = \cup_{k=0}^{\infty} B_5^k$, $B_5^k = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = \beta_5^k(\varepsilon_1)\}$, $\beta_5^k : (-\delta, 0) \to (-\delta, 0)$, $\beta_5^k \in C^1$, $\beta_5^k(\varepsilon_1) \uparrow \beta_4(\varepsilon_1)$,

$B_6 = \{0\} \times (-\delta, 0)$, $B_7 = (0, \delta) \times \{0\}$, $B_8 = \{0\} \times (0, \delta)$,

$E_j = \{\varepsilon : \beta_j(\varepsilon_1\} < \varepsilon_2 < \beta_{j+1}(\varepsilon_1)\}$ *для* $j = 2, 3$,

$E_1 = \cup_{k=0}^{\infty} E_1^k$, $E_1^k = \{\varepsilon : \beta_1^{k+1}(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_1^k(\varepsilon_1)\}$,

$E_4 = \cup_{k=0}^{\infty} E_4^k$, $E_4^k = \{\varepsilon : \beta_5^k(\varepsilon_1\} < \varepsilon_2 < \beta_5^{k+1}(\varepsilon_1)\}$ *(здесь* $\beta_5^0(\varepsilon_1\} := -\delta$*)*,

$E_5 = (0, \delta) \times (-\delta, 0)$, $E_6 = (0, \delta) \times (0, \delta)$, $E_7 = (-\delta, 0) \times (0, \delta)$,

такие, что схемы фазовых портретов векторных полей $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\varepsilon \in E$, *в окрестности* U *имеют вид, изображенный на рис. 5 (при* $\varepsilon \in B_1^k$ *и* $\varepsilon \in B_5^k$ *дуга траектории между развилками пересекает дугу* $T(-u_1, u_1)$ *в* k *точках).*

Доказательство. Как и в случае (A) можно выбрать число δ_1 и окрестность U траектории Γ_0 (рис. 2б), содержащую особые точки $O_1(\varepsilon)$ и $O_2(\varepsilon)$, но не содержащую других особых точек поля $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$, ограниченную простыми замкнутыми кривыми $\gamma^\pm$, состоящими из дуг $[s_i^\pm s_{i+1}^\pm]$, $i \in \{1, ..., 5\}$, с концами в точках $s_i^\pm$ и $s_{i+1}^\pm$, причем в точках γ^+ и $\gamma^- \backslash [s_3^- s_4^-]$ траектории поля $\mathbf{v}_\varepsilon$ входят в U, а в точках $[s_3^- s_4^-]$ они выходят из U, а

$$l_\varepsilon := T_1(u_{12}(\varepsilon)) - u_1, u_{12}(\varepsilon)) + u_1) \cap U = T_1(u_{12}(\varepsilon)) + u_-(\varepsilon), u_{12}(\varepsilon)) + u_+(\varepsilon)),$$

где $u_2 < u_+(\varepsilon) < u_1$, $-u_1 < u_-(\varepsilon) < \min\{0, \varepsilon_1\}$.

Функция $d(\cdot, \varepsilon) := \varphi(\cdot, \varepsilon) - \psi(\cdot, \varepsilon)$ теперь определена на отрезке $[\varepsilon_1, 0]$ при $\varepsilon \in (-\delta_1, 0) \times (-\delta_1, \delta_1)$. Продолжим $\psi(u, \varepsilon)$ и $\varphi(u, \varepsilon)$ до C^2-функций $\bar{\psi}(u, \varepsilon)$ и $\bar{\varphi}(u, \varepsilon)$, определенных на $[-u_1, u_1] \times (-\delta_1, \delta_1)^2$, и положим $\bar{d}(u, \varepsilon) := \bar{\varphi}(u, \varepsilon) - \bar{\psi}(u, \varepsilon)$. Как и в случае (A) имеем равенства (6) и (7).Так как $\bar{d}''_{uu}(0, 0) = \lambda_+ - \lambda_- < 0$, то можно считать, что неравенства (9) и (10) верны и в рассматриваемом случае.

Используя (6), (7) и (9), получаем, что существует такое $\delta \in (0, \delta_1)$, что для любого $\varepsilon_1 \in (-\delta, \delta)$ уравнение $\bar{\varphi}(\varepsilon_1, \varepsilon) - \varepsilon_2 = 0$ имеет единственное решение $\varepsilon_2 = \beta_*(\varepsilon_1)$, где $\beta_*(\cdot) \in C^1$,

$$-\delta < \beta_*(\varepsilon) = (\lambda_+/2)\varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2) < 0. \tag{21}$$

Так как при $\varepsilon_1 < 0$ $\bar{\varphi}(\varepsilon_1, \varepsilon) = \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon)$, то, учитывая (9), получаем для всех $\varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)$ равенства

$$\operatorname{sgn} d(\varepsilon_1, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon) - \varepsilon_2) = \operatorname{sgn}(\beta_*(\varepsilon_1) - \varepsilon_2). \tag{22}$$

Из (6) имеем $\bar{d}(0, \varepsilon) = -\bar{\psi}(0, \varepsilon) = -\varepsilon_2 - (\lambda_-/2)\varepsilon_1^2 + R_2(-\varepsilon_1, \varepsilon)$. Отсюда и из (7) по теореме о неявной функции получаем, что δ можно выбрать столь малым, что для любого $\varepsilon_1 \in (-\delta, \delta)$ уравнение $\bar{d}(0, \varepsilon) = 0$ имеет единственное решение $\varepsilon_2 = \beta_{**}(\varepsilon_1)$, где $\beta_{**}(\cdot) \in C^1$,

$$-\delta < \beta_{**}(\varepsilon) = (-\lambda_-/2)\varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2) < 0. \tag{23}$$

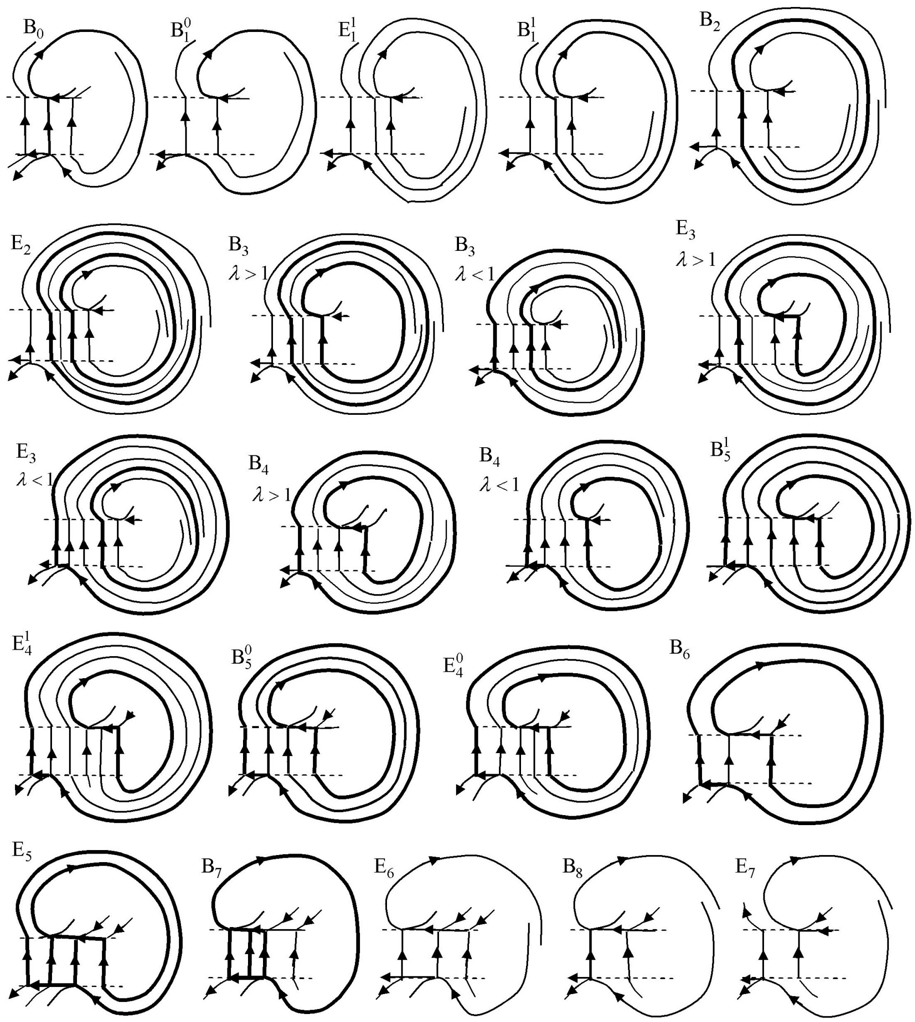

Рис. 5. Бифуркации фазовых портретов в случае (Б)

Так как при $\varepsilon_1 < 0$ $\bar{d}(0,\varepsilon) = d(0,\varepsilon)$, то из (23) и (9) следует, что

$$\forall \varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta) \ \operatorname{sgn} d(0,\varepsilon) = \operatorname{sgn}(\beta_{**}(\varepsilon_1) - \varepsilon_2). \tag{24}$$

Как и в случае (А) получаем, что δ можно считать выбранным так, что для любого $\varepsilon_1 \in (-\delta, \delta)$ система уравнений (15) имеет единственное решение $u = \hat{u}(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)$, где $\hat{u}(\cdot), \beta_2(\cdot) \in C^{r-1}$,

$$\hat{u}(\varepsilon_1) = \frac{\lambda_-}{\lambda_- - \lambda_+}\varepsilon_1 + o(\varepsilon_1), \ -\delta < \beta_2(\varepsilon_1) = \frac{\lambda_+ \lambda_-}{2(\lambda_- - \lambda_+)}\varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2) < 0. \tag{25}$$

Поскольку $0 < \frac{\lambda_-}{\lambda_- - \lambda_+} < 1$, то можно считать, что при $\varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$ $\hat{u}(\varepsilon_1) \in (\varepsilon_1, 0)$. Поэтому

$$\forall \varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta) \;\; d(u, \varepsilon) = d'_u(u, \varepsilon) = 0 \Leftrightarrow u = \hat{u}(\varepsilon_1), \varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1). \quad (26)$$

Из (21), (23) и (25), считая δ достаточно малым, получаем, что для любого $\varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)$

$$-\delta < \beta_{**}(\varepsilon_1) < \beta_*(\varepsilon_1) < \beta_2(\varepsilon_1) < 0, \text{ если } \lambda < 1, \quad (27)$$

$$-\delta < \beta_*(\varepsilon_1) < \beta_{**}(\varepsilon_1) < \beta_2(\varepsilon_1) < 0, \text{ если } \lambda > 1, \quad (28)$$

Вследствие (6) и (7)

$$d'_u(\varepsilon_1, \varepsilon) = \lambda_+ \varepsilon_1 + (R_1)'_v(0, \varepsilon) = \lambda_+ \varepsilon_1 + o(\varepsilon_1),$$

$$d'_u(0, \varepsilon) = \lambda_- \varepsilon_1 + (R_2)'_v(-\varepsilon_1, \varepsilon) = \lambda_- \varepsilon_1 + o(\varepsilon_1).$$

Поэтому можно считать $\forall \varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)$ $d'_u(\varepsilon_1, \varepsilon) > 0$, $d'_u(0, \varepsilon) < 0$. Отсюда и из (10) получаем, что $\forall \varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)$ существует такое число $u_M(\varepsilon) \in (\varepsilon_1, 0)$, что $u_M(\cdot) \in C^1$,

$$\operatorname{sgn} d'_u(u, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(u_M(\varepsilon) - u) \text{ для всех } u \in [\varepsilon_1, 0]. \quad (29)$$

Из (29), (26) и (9) вытекает, что

$$\operatorname{sgn} d(u_M(\varepsilon), \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\beta_2(\varepsilon_1) - \varepsilon_2) \text{ для всех } \varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta). \quad (30)$$

Положим теперь $\beta_3(\varepsilon_1) := \beta_*(\varepsilon_1)$, $\beta_4(\varepsilon_1) := \beta_{**}(\varepsilon_1)$ при $\lambda < 1$ и $\beta_3(\varepsilon_1) := \beta_{**}(\varepsilon_1)$, $\beta_4(\varepsilon_1) := \beta_*(\varepsilon_1)$ при $\lambda > 1$. Ввиду (27) и (29) $\beta_4(\varepsilon_1) < \beta_3(\varepsilon_1) < \beta_2(\varepsilon_1)$.

Для функции последования $f(\cdot, \varepsilon) := \psi^{-1}(\varphi(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ определим ее итерации $f^k(\cdot, \varepsilon)$ по индукции: $f^1(\cdot, \varepsilon) := f(\cdot, \varepsilon)$, $f^k(\cdot, \varepsilon) := f(f^{k-1}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ при $k \geq 2$, если $f^{k-1}(\cdot, \varepsilon)$ определено.

Ясно, что для $\varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$, $-\delta < \varepsilon_2 < \beta_4(\varepsilon_1)$, $u \in [\varepsilon_1, 0]$ значение $f(u, \varepsilon)$ определено и $f(u, \varepsilon) > u$, $f'_u(u, \varepsilon) > 0$.

Дифференцируя равенство $\psi(f(u, \varepsilon), \varepsilon) = \varphi(u, \varepsilon)$ по ε_2, получаем при $u \in (\varepsilon_1, 0)$

$$\psi'_v(f(u, \varepsilon), \varepsilon) f'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) + \psi'_{\varepsilon_2}(f(u, \varepsilon), \varepsilon) = \varphi'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon),$$

откуда находим

$$f'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) = \frac{\varphi'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) - \psi'_{\varepsilon_2}(f(u, \varepsilon), \varepsilon)}{\psi'_v(f(u, \varepsilon), \varepsilon)}.$$

Так как вследствие (6) и (7) $\varphi'_{\varepsilon_2}(0, 0) = 0$, $\psi'_{\varepsilon_2}(0, 0) = 1$, то можно считать, что при выбранном δ

$$f'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) < 0 \text{ для } \varepsilon_1 \in (-\delta, 0), -\delta < \varepsilon_2 < \beta_4(\varepsilon_1), u \in (\varepsilon_1, 0). \quad (31)$$

Лемма 1. *Для любых $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $_1 \in (-\delta, 0)$ уравнение $f^{k+1}(\varepsilon_1, \varepsilon) = 0$ имеет относительно $\varepsilon_2 \in (-\delta, 0)$ единственное решение $\varepsilon_2 = \beta_5^k(\varepsilon_1)$, при этом $\beta_5^k(\cdot) \in C^1$, $\beta_5^k(\varepsilon_1) \uparrow \beta_4(\varepsilon_1)$.*

Доказательство. Приведем его для случая $\lambda < 1$. Случай $\lambda > 1$ рассматривается аналогично. Предполагая δ достаточно малым, из (6), (7), (21) и (23) получаем, что уравнение $\bar{\varphi}(\varepsilon_1, \varepsilon) - \bar{\psi}(0, \varepsilon) = 0$ для любого $\varepsilon_1 \in (-\delta, \delta)$ имеет относительно ε_2 единственное решение $\varepsilon_2 = \beta_5^0(\varepsilon_1)$, при этом $\beta_5^0(\cdot) \in C^1$,

$$-\delta < \beta_5^0(\varepsilon_1) = (1/2)(\lambda_+ - \lambda_-)\varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2) < \beta_4(\varepsilon_1).$$

Для $\varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$, $\varepsilon_2 = \beta_5^0(\varepsilon_1)$ получаем $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon) - \psi(0, \varepsilon) = 0$, и потому $f^1(\varepsilon_1, \varepsilon) = 0$, то есть утверждение леммы верно при $k = 0$. Пусть оно верно при $k \le m$. При $\varepsilon_2 = \beta_5^m(\varepsilon_1)$ $f^{m+2}(\varepsilon_1, \varepsilon) = f(f^{m+1}(\varepsilon_1, \varepsilon), \varepsilon) = f(0, \varepsilon) > 0$. При $\varepsilon_2 = \beta_4(\varepsilon_1) = \beta_{**}(\varepsilon_1)$ $f(0, \varepsilon) = 0$, и потому $f^{m+2}(\varepsilon_1, \varepsilon) < f^{m+2}(0, \varepsilon) = 0$. Вследствие (31) $\partial f^{m+2}(0, \varepsilon)/\partial\varepsilon_2 < 0$ для $\beta_5^m(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_4(\varepsilon_1)$. Поэтому для любого $\varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$ существует такое $\beta_5^{m+1}(\varepsilon_1) \in (\beta_5^m(\varepsilon_1), \beta_4(\varepsilon_1))$, что $\varepsilon_2 = \beta_5^{m+1}(\varepsilon_1)$ – единственное решение уравнения $f^{m+2}(\varepsilon_1, \varepsilon) = 0$, а $\beta_5^{m+1}(\cdot) \in C^1$. По индукции получаем, что уравнение $f^k(\varepsilon_1, \varepsilon) = 0$ имеет относительно $\varepsilon_2 \in (-\delta, 0)$ единственное решение $\varepsilon_2 = \beta_5^k(\varepsilon_1)$ для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Покажем, что $\forall \varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$ $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_5^k(\varepsilon_1) = \beta_4(\varepsilon_1)$. Предположим противное: при некотором $\varepsilon_1^* \in (-\delta, 0)$ $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_5^k(\varepsilon_1^*) = \varepsilon_2^* < \beta_4(\varepsilon_1^*)$. Тогда найдется такое число n_*, что при $\varepsilon^* = (\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*)$ будем иметь неравенства $f^{n_*-1}(\varepsilon_1^*, \varepsilon^*) < 0$, $f^{n_*}(\varepsilon_1^*, \varepsilon^*) > 0$, а $f^{n_*+1}(\varepsilon_1^*, \varepsilon^*)$ не определено. Если V – достаточно малая окрестность ε^* в $(-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)$, то $f^{n_*}(\varepsilon_1, \varepsilon) > 0$ для всех $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in V$, и $f^{n_*+1}(\varepsilon_1, \varepsilon)$ не определено. При некотором $n > n_*$ $\varepsilon^n := (\varepsilon_1^*, \beta_5^n(\varepsilon_1^*)) \in V$, а $f^k(\varepsilon_1^*, \varepsilon^n) < f^n(\varepsilon_1^*, \varepsilon^n) = 0$ для $k \le n - 1$ и, в частности, для $k = n_*$. Получили противоречие. Следовательно, $\forall \varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$ $\beta_5^k(\varepsilon_1) \uparrow \beta_4(\varepsilon_1)$. Лемма 1 доказана. $\square$

Аналогично доказывается

Лемма 2. *Для любых $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$ уравнение $f^{k+1}(0, \varepsilon) = \varepsilon_1$ имеет относительно $\varepsilon_2 \in (-\delta, 0)$ единственное решение $\varepsilon_2 = \beta_1^k(\varepsilon_1)$, при этом $\beta_1^k(\cdot) \in C^1$, $\beta_1^k(\varepsilon_1) \downarrow \beta_2(\varepsilon_1)$.*

Определим множества B_i и E_j так как они описаны в формулировке теоремы. Пусть

$$l_\varepsilon^+ := T_1[u_{12}(\varepsilon), u_{12}(\varepsilon) + u_+(\varepsilon)],\ \ l_\varepsilon^- := T_1[u_{12}(\varepsilon) - u_-(\varepsilon), u_{12}(\varepsilon)].$$

При $\varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)$ пусть $l_\varepsilon^c := T_1[u_{12}(\varepsilon) + \varepsilon_1, u_{12}(\varepsilon)]$.

Рассмотрим случай $\lambda < 1$. Из (22), (24), (26), (29) и (30) получаем следующие утверждения:

При $\varepsilon \in \mathrm{E}_7 \cup \mathrm{B}_1 \cup \mathrm{E}_1$ ($\varepsilon \in \mathrm{B}_5 \cup \mathrm{E}_4$) $d(u, \varepsilon) < 0$ ($d(u, \varepsilon) > 0$) для всех $u \in [\varepsilon_1, 0]$, а дугу l_ε^c не пересекают периодические траектории поля $\mathbf{v}_\varepsilon$. Ввиду лемм 1 и 2 при $\varepsilon \in \mathrm{B}_1$ ($\varepsilon \in \mathrm{B}_5$) входящая (выходящая) сепаратриса развилки $O_1(\varepsilon)$ совпадает с выходящей (входящей) сепаратрисой развилки $O_2(\varepsilon)$.

При $\varepsilon \in \mathrm{B}_2$ $d(\cdot,\varepsilon)$ имеет единственный, причем двукратный, нуль, а l^c_ε пересекает единственная периодическая траектория поля $\mathbf{v}_\varepsilon$ – двойной цикл, к которому α (ω)-предельна входящая (выходящая) сепаратриса развилки $O_1(\varepsilon)$ ($O_2(\varepsilon)$).

При $\varepsilon \in \mathrm{E}_2$ $d(\cdot,\varepsilon)$ имеет два нуля $\varepsilon_1 < u_L < u_R < 0$, $d'_u(u_L,\varepsilon) > 0$, $d'_u(u_R,\varepsilon) < 0$, а l^c_ε пересекает две периодических траектории – неустойчивый и устойчивый гиперболические предельные циклы Γ_u и Γ_s; входящая (выходящая) сепаратриса развилки $O_1(\varepsilon)$ ($O_2(\varepsilon)$) $\alpha(\omega)$-предельна к Γ_u (Γ_s).

При $\varepsilon \in \mathrm{B}_3$ $d(\cdot,\varepsilon)$ имеет два простых нуля $u_L = \varepsilon_1$, и $u_R \in (\varepsilon_1, 0)$, $d'_u(u_L,\varepsilon) > 0$, $d'_u(u_R,\varepsilon) < 0$, а пересекает две периодических траектории – неустойчивую, проходящую через развилку $O_1(\varepsilon)$ и устойчивый гиперболический предельный цикл Γ_s; выходящая сепаратриса развилки $O_2(\varepsilon)$ ω-предельна к Γ_s.

При $\varepsilon \in \mathrm{E}_3$ $d(\cdot,\varepsilon)$ имеет единственный нуль $\varepsilon_1 < u_R < 0$, $d'_u(u_R,\varepsilon) < 0$, а l^c_ε пересекает единственная периодическая траектория – устойчивый гиперболический предельный цикл Γ_s, к которому ω-предельны выходящие сепаратрисы развилок $O_1(\varepsilon)$ и $O_2(\varepsilon)$.

При $\varepsilon \in \mathrm{B}_4$ $d(\cdot,\varepsilon)$ имеет единственный нуль $u_R = 0$, $d'_u(u_R,\varepsilon) < 0$, а l^c_ε пересекает единственная периодическая траектория, она устойчива и проходит через точку $O_2(\varepsilon)$.

Через точку $T_1(u_{12}(\varepsilon)) + u)$, $u \in (\varepsilon_1, u_+(\varepsilon))$ дуги l^+_ε проходит периодическая траектория тогда и только тогда u нуль функции $\psi(\cdot,\varepsilon)$. Эта траектория содержит дугу $\tau^2_\varepsilon[0, \varphi_1(u,\varepsilon)]$.

Ввиду (6) и (7) можно считать

$$\psi(u_+(\varepsilon),\varepsilon) > 0 \text{ для всех } \varepsilon \in (-\delta,\delta)^2. \tag{32}$$

Пусть $\varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta,\delta)$. Так как $\psi(0,\varepsilon) = -d(0,\varepsilon)$, то из (24) получаем $\mathrm{sgn}\psi(0,\varepsilon) = \mathrm{sgn}\,(\varepsilon_2 - \beta_4(\varepsilon_1))$. Отсюда, из (32) и возрастания $\psi(\cdot,\varepsilon)$ следует, что $\psi(\cdot,\varepsilon)$ имеет нуль на $(\varepsilon_1, u_+(\varepsilon))$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon_2 < \beta_4(\varepsilon_1)$, то есть $\varepsilon \in \mathrm{E}_4 \cup \mathrm{B}_5$.

Пусть $\varepsilon \in [0,\delta) \times (-\delta,\delta)$. Так как $\psi(\cdot,\varepsilon)$ – возрастающая функция, то из (32) и равенства $\psi(\varepsilon_1,\varepsilon) = \varepsilon_2$ следует, что $\psi(\cdot,\varepsilon)$ имеет нуль на $(\varepsilon_1, u_+(\varepsilon))$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon_2 < 0$, то есть при $\varepsilon \in \mathrm{B}_6 \cup \mathrm{E}_5$. При $\varepsilon \in \mathrm{B}_7$ через каждую точку дуги $T_1[u_{12}(\varepsilon), u_{12}(\varepsilon) + \varepsilon_1]$ проходит периодическая траектория.

Через точку $T_1(u_{12}(\varepsilon)) + u)$, где $u \in (u_-(\varepsilon), \varepsilon_1)$, $\varepsilon \in (-\delta,0) \times (-\delta,\delta)$, проходит периодическая траектория, тогда и только тогда, когда u нуль функции $\varphi(\cdot,\varepsilon) - \varepsilon_2$. Эта траектория содержит дугу $\tau^1_\varepsilon[\psi_1(u,\varepsilon), \psi_1(\varepsilon_1,\varepsilon)]$ неустойчивой линейной особенности. Вследствие (6) можно считать, что $\varphi(u_-(\varepsilon),\varepsilon) < \varepsilon_2$ для всех $\varepsilon \in (-\delta,\delta)^2$. Отсюда, из (22) и возрастания $\varphi(\cdot,\varepsilon)$ следует, что $\varphi(u,\varepsilon) - \varepsilon_2 = 0$ для $u \in (u_-(\varepsilon), \varepsilon_1)$, $\varepsilon \in [0,\delta) \times (-\delta,\delta)$, тогда и только тогда, когда $\varepsilon_2 < \beta_3(\varepsilon_1)$, то есть, если $\varepsilon \in \mathrm{B}_4 \cup \mathrm{E}_3 \cup \mathrm{B}_5 \cup \mathrm{E}_4$.

При $\varepsilon = 0$ Γ_0 - единственная периодическая траектория в U. Все положительные (отрицательные) полутраектории, начинающиеся в U, либо выходят из U, либо, начиная с некоторого момента времени, совпадают с Γ_0.

Для случая $\lambda > 1$ доказательство аналогично. $\square$

References

[1] A.A. Andronov, A.A. Vitt A.A., S.E. Khaikin, *Theory of oscillations*, Fizmatgiz, Moscow, 1937. (in Russian)

[2] N.V. Butenin, Ju.I. Neymark, N.A. Fufaev, *Introduction to the theory of nonlinear oscillations*, Nauka, Moscow, 1987. Zbl 0651.34034

[3] N.N. Bautin, E.A. Leontovich, *Methods and techniques for qualitative research of dynamical systems on the plane*, Nauka, Moscow, 1976.

[4] A.F. Filippov, *Differential equations with a discontinuous right-hand side*, Nauka, Moscow, 1985.

[5] M. Han, W. Zhang, *On Hopf bifurcation in non-smooth planar systems*, J. Differ. Equations, **248**:9 (2010), 2399–2416. Zbl 1198.34059

[6] S.J. Hogan, M.E. Homer, M.R. Jeffrey, R. Szalai, *Piecewise Smooth Dynamical Systems Theory: The Case of the Missing Boundary Equilibrium Bifurcations*, J. Nonlinear Sci., **26** (2016), 1161–1173. Zbl 1358.34023

[7] D.J.W. Simpson, *A compendium of Hopf-like bifurcations in piecewise-smooth dynamical systems* , Phys. Lett., A, **382**:35 (2018), 2439–2444. Zbl 1404.34074

[8] V.Sh. Roitenberg, *On the generation of a strange attractor from a joining point of lines of discontinuity of a vector field*, The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences, **4** (2016), 53–59.

[9] V.Sh. Roitenberg, *On bifurcations in the neighborhood of a singular point of triple sewn focus type*, University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences, **2** (2017), 18–31.

[10] Ju.A. Kuznetsov, S. Rinaldi, A. Granini, *One-parameter bifurcations in planar Filippov systems*, Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng., **13**:8 (2003), 2157–2188. Zbl 1079.34029

[11] M. Guardia, T.M. Seara, M.A. Teixeira, *Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems*, J. Differ. Equations, **250**:4 (2011), 1967–2023. Zbl 1225.34046

[12] M. di Bernardo, Ch.J. Budd, A.R. Champneys, P. Kowalczyk, *Piecewise-smooth dynamical systems. Theory and applications*, Appl. Math. Sci., **163**, Springer-Verlag, London, 2008. Zbl 1146.37003

[13] V.Sh. Roitenberg, *On bifurcations of separatrix loops of singular points on the line of discontinuity*, Yaroslavl: Yaroslavl Polytechnic Institute, 1987, 26 p. Dep. in VINITI, 22.04.1987, No. 2795-B87. (In Russian)

[14] V.Sh. Roitenberg, *On bifurcations of a piecewise-smooth vector field in a neighborhood of a separatrix loop of a singular point on a discontinuity line*, Mathematics and mathematical education. Theory and Practice: inter-higher school coll. of scientific works, **5** (2006), 49–52, YaSTU Publ.,Yaroslavl. (in Russian)

[15] V.Sh. Roitenberg, *On the birth of limit cycles from a contour formed by separatrices of a saddle and a sewn saddle-node of a piecewise-smooth vector field*, Vestnik of Nekrasov Kostroma State University, **20**:2 (2014), 26–30. (in Russian)

[16] V.Sh. Roitenberg, *On the separatrix loop bifurcations of two-dimensional piecewise-smooth dynamical system*, University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences, **1** (2020), 36–50. (in Russian)

[17] V.Sh. Roitenberg, *On bifurcations of periodic trajectory "eight" of piecewise smooth vector field with symmetry*, University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences, **3** (2020), 98–113. (in Russian)

[18] A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Maier, *Qualitative theory of second-order dynamic system*, Halsted Press and Israel Program for Scientific Translations, New York, 1973.

Vladimir Shleimovich Roitenberg
Yaroslavl State University,
pr. Moskovskij, 88,
150023, Yaroslavl, Russia
Email address: vroitenberg@mail.ru