

О БИФУРКАЦИЯХ КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ
ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ
ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ, ПРОХОДЯЩЕЙ
ЧЕРЕЗ ДВЕ РАЗВИЛКИ

В.Ш. РОЙТЕНБЕРГ 

Представлено П.П. ПЕТРОВЫМ

Abstract: We consider a two-parameter family of piecewise smooth dynamical systems on the plane. For zero values of the parameters the dynamical system has a periodic trajectory L passing through two singular points of the fork type and not containing other singular points. It is assumed that L contains both the tangent and transverse separatrices of both forks. We consider different cases of the location of the remaining separatrices. In each case, we describe bifurcations in a neighborhood of L for generic families.

Keywords: piecewise smooth dynamical system, fork, periodic trajectory, bifurcation.

1 Введение

Кусочно-гладкие динамические системы являются естественными математическими моделями реальных систем с переключениями и широко используются в теории колебаний начиная с работ А.А. Андропова (см. [1, 2]) Бифуркации кусочно-гладких динамических систем на плоскости

ROITENBERG, V.Sh., ON BIFURCATIONS OF A PIECEWISE SMOOTH DYNAMICAL SYSTEM ON THE PLANE IN A NEIGHBORHOOD OF A PERIODIC TRAJECTORY PASSING THROUGH TWO FORKS.

© 2023 Ройтенберг В.Ш..

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

начали изучать уже давно [3, 4]. В [4] описаны бифуркации особых точек первой степени негрубости. Бифуркации рождения периодической траектории из особой точки и другие локальные бифуркации в типичных семействах кусочно-гладких систем на плоскости с одним и двумя параметрами рассматривались в работах [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Бифуркации некоторых сепаратрисных контуров исследовались в [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. Однако, ряд нетривиальных нелокальных бифуркаций в типичных двухпараметрических семействах до сих пор не описан.

Здесь мы рассмотрим бифуркации в окрестности периодической траектории, содержащей две особые точки типа «развилка» для различных вариантов расположения сепаратрис этих точек.

2 Кусочно-гладкие векторные поля на плоскости и их особые точки типа «развилка»

Пусть M – компактное множество в \mathbb{R}^2 с C^∞ -гладкой границей, $\mathcal{D} := \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$, где M_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ – такие замкнутые подмножества M с C^∞ -гладкой границей ∂M_i , что $M = \bigcup_{i=1}^n M_i$, $M_j \cap M_k = \partial M_j \cap \partial M_k$ при $j, k = 1, \dots, n$, $j \neq k$.

Пусть $\mathbf{v}^{(i)}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ – C^r -векторные поля на M_i ($r \geq 2$). Кусочно-гладким векторным полем на M , задаваемым этими векторными полями, назовем класс всех векторных полей $\tilde{\mathbf{v}}$ на M (вообще говоря, разрывных) таких, что $\tilde{\mathbf{v}}(x) = \mathbf{v}^{(i)}(x)$, если $x \in \text{int}M_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Будем его обозначать $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)})$, а множество таких полей – $\mathfrak{X}^r(M, \mathcal{D})$.

Следуя определению из [1, с. 95] траекториями поля $\mathbf{v} \in \mathfrak{X}^r(M, \mathcal{D})$ будем называть траектории дифференциального включения $\dot{x} \in \hat{\mathbf{v}}(x)$, $x \in M$, где $\hat{\mathbf{v}}(x)$ – одноточечное множество $\{\mathbf{v}^{(i)}(x)\}$ для $x \in \text{int}M_i$ и выпуклая оболочка векторов $\mathbf{v}^{(i)}(x)$ и $\mathbf{v}^{(j)}(x)$ для $x \in M_{ij} := \partial M_i \cap \partial M_j \neq \emptyset$.

В точках $a \in M_{ij}$, где $\mathbf{v}^{(i)}(a)$ и $\mathbf{v}^{(j)}(a)$ не касаются M_{ij} и направлены в одну сторону от M_{ij} , для определенности внутрь M_i , положительная (отрицательная) полутраектория поля \mathbf{v} , начинающаяся в точке $a \in M_{ij}$, продолжается как положительная (отрицательная) полутраектория поля $\mathbf{v}^{(i)}$ ($\mathbf{v}^{(j)}$). Для остальных точек $a \in M_{ij}$ в $\hat{\mathbf{v}}(a)$ существует единственный вектор $\mathbf{v}_{ij}(a)$, касающийся M_{ij} .

Особыми точками поля $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)})$ будем называть особые точки векторных полей $\mathbf{v}^{(i)}$, точки касания этих полей с ∂M_i и точки $a \in M_{ij}$, в которых $\mathbf{v}_{ij}(a) = \mathbf{0}$.

Пусть поле $\mathbf{v}^{(i)}$ касается ∂M_i в особой точке $O \in M_{ij}$. Выберем C^∞ -координаты x_1, x_2 в окрестности $V(O)$ этой точки так, чтобы она имела нулевые координаты, $M_i \cap V(O)$ ($M_j \cap V(O)$) задавалось неравенством $x_2 \geq 0$ ($x_2 \leq 0$). В этих координатах

$$\mathbf{v}^{(s)}(x) = F_{s1}(x_1, x_2)\partial/\partial x_1 + F_{s2}(x_1, x_2)\partial/\partial x_2,$$

где $F_{sl} \in C^r$, $s = i$ и $s = j$, $l = 1, 2$, $F_{i2}(0, 0) = 0$.

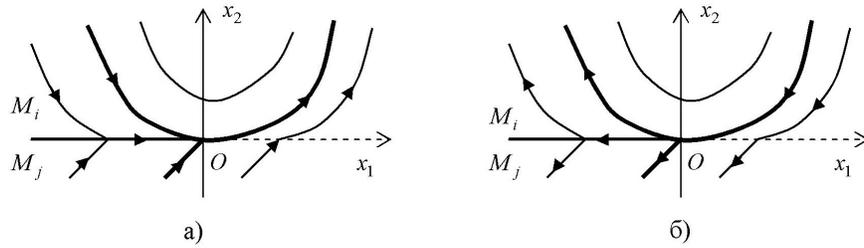


Рис. 1. Развилки: а) сходящаяся развилка, б) расходящаяся развилка

Если $F_{i1}(0,0)\partial F_{i1}(0,0)/\partial x_1 > 0$, а $F_{j2}(0,0) > 0$ ($F_{j2}(0,0) < 0$), то точку O будем называть *сходящейся (расходящейся) развилкой*, а также особой точкой типа «развилка» (рис. 1). Без ограничения общности можно считать, что $F_{i1}(0,0) > 0$, $\partial F_{i1}(0,0)/\partial x_1 > 0$. Для сходящейся развилки положительная полутраектория поля \mathbf{v} начинается из точки $M_{ij} \cap V(O)$ единственным образом как положительная полутраектория поля $\mathbf{v}^{(i)}$ для точек с координатой $x_2 \geq 0$ и как траектория поля \mathbf{v}_{ij} для точек с координатой $x_2 < 0$. Отрицательная полутраектория поля \mathbf{v} начинается из точек $M_{ij} \cap V(O)$ с координатой $x_2 > 0$ единственным образом, как отрицательная полутраектория поля $\mathbf{v}^{(j)}$, а из точек с координатой $x_2 \leq 0$ тремя возможными способами, как отрицательная полутраектория одного из векторных полей $\mathbf{v}^{(i)}$, $\mathbf{v}^{(j)}$ и \mathbf{v}_{ij} . Для расходящейся развилки положительная и отрицательная полутраектория меняются ролями.

Из точки O выходят положительная и отрицательная полутраектории поля $\mathbf{v}^{(i)}$, касающиеся M_{ij} в O . Их продолжения, как полутраекторий поля \mathbf{v} , назовем соответственно *выходящей и входящей касательными сепаратрисами* развилки O . Положительную (отрицательную) полутраекторию поля \mathbf{v} , начинающуюся в точке O , как положительная (отрицательная) полутраектория поля $\mathbf{v}^{(j)}$, назовем *трансверсальной сепаратрисой* сходящейся (расходящейся) развилки O .

Пусть периодическая траектория Γ поля \mathbf{v} не проходит через особые точки и не является траекторией одного из векторных полей \mathbf{v}_{ij} . Тогда Γ либо 1) периодическая траектория одного из векторных полей $\mathbf{v}^{(j)}$, для определенности поля $\mathbf{v}^{(j_1)}$, либо 2) $\Gamma = \cup_{k=1}^m \Gamma_k$, где Γ_k дуга траектории векторного поля $\mathbf{v}^{(j_k)}$, $j_k \in \{1, \dots, n\}$, начинающаяся в точке $l_k \in M_{j_{k-1}j_k}$, кончающаяся в точке $l_{k+1} \in M_{j_k j_{k+1}}$ и трансверсальная ∂M_{j_k} ($j_{n+1} = j_1$). Выберем C^r -вложение $T: (-1, 1) \rightarrow \text{int} M_{j_1}$, $T(0) \in \Gamma$, трансверсальное Γ . При достаточно малом $\bar{u} > 0$ определено отображение последования $T(u) \mapsto T(f(u))$, $u \in (-\bar{u}, \bar{u})$, по траекториям поля \mathbf{v} , $f \in C^r$, $f(0) = 0$, $f'(u) > 0$. Величина $f'(0)$ не зависит от выбора T . Если $f'(0) \neq 1$, то Γ называется *гиперболической периодической траекторией*

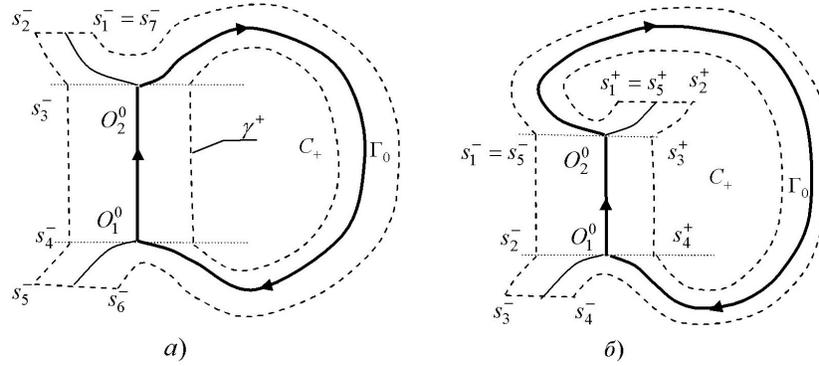


Рис. 2. Периодическая траектория Γ_0 и ее окрестность
 а) в случае (А), б) в случае (Б)

(предельным циклом). При $f'(0) < 1$ ($f'(0) > 1$) Γ устойчивая (неустойчивая) траектория. Если $f'(0) = 1$, $f''(0) \neq 0$, то Γ называется *двойным циклом*.

3 Двухпараметрические деформации векторного поля с периодической траекторией, проходящей через две развилки

Пусть Γ_0 – периодическая траектория поля $\mathbf{v}_0 \in \mathfrak{X}^r(M, \mathcal{D})$, проходящая через развилки $O_k^0 \in M_{i_k j_k}$ ($k = 1, 2$) и не содержащая других особых точек. Тогда Γ_0 является простой замкнутой кривой и $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_0$ состоит из двух связных компонент C_+ и C_- , одна из которых, для определенности пусть C_+ , не содержит сепаратрисы развилки O_1^0 , не принадлежащей Γ_0 .

Будем рассматривать следующие случаи:

(А) Γ_0 содержит касательную (трансверсальную) входящую (выходящую) сепаратрисы развилки O_1^0 и касательную (трансверсальную) входящую (выходящую) сепаратрисы развилки O_2^0 . Компонента C_+ не содержит сепаратрису развилки O_2^0 , не принадлежащую Γ_0 (рис. 2а).

(Б) Γ_0 содержит касательную (трансверсальную) входящую (выходящую) сепаратрисы развилки O_1^0 и касательную (трансверсальную) входящую (выходящую) сепаратрису развилки O_2^0 . Замыкание компоненты C_+ содержит сепаратрису развилки O_2^0 , не принадлежащую Γ_0 (рис. 2б).

Пусть семейство векторных полей $\mathbf{v}_\varepsilon = (\mathbf{v}_\varepsilon^{(1)}, \dots, \mathbf{v}_\varepsilon^{(n)}) \in \mathfrak{X}^r(M, \mathcal{D})$ – двухпараметрическая деформация векторного поля \mathbf{v}_0 , имеющего периодическую траекторию Γ_0 , удовлетворяющую одному из условий (А) и (Б). Будем считать, что двумерный параметр $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, меняется в

окрестности E^0 нуля в \mathbb{R}^2 , а отображения $M_i \times E^0 \ni (x, \varepsilon) \mapsto \mathbf{v}_\varepsilon^{(i)}(x)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, принадлежат классу C^r ($r \geq 2$).

Для определенности будем считать, что касательные сепаратрисы развилки O_k^0 , $k = 1, 2$ начинаются в M_{i_k} . Выберем такие C^r -гладкие вложения $T_1 : (-1, 1) \rightarrow \text{int}M_{j_1}$, $T_2 : (-1, 1) \rightarrow \text{int}M_{i_1}$, что дуга $T_1(-1, 1)$ (соотв. $T_2(-1, 1)$) трансверсально пересекает Γ_0 в точке $T_1(0)$ (соотв. $T_2(0)$), при этом $T_k(0, 1) \subset C_+$, $k = 1, 2$.

Используя теорему о неявной функции, получим, что найдется такая окрестность нуля $E^1 \subset E^0$, что поле \mathbf{v}_ε , $\varepsilon \in E^1$, имеет развилки $O_k(\varepsilon) \in M_{i_k j_k}$, $O_k(\cdot) \in C^r$, $O_k(0) = O_k^0$, $k = 1, 2$. Окрестность E^1 можно взять столь малой, что выходящая (соотв. входящая) сепаратриса развилки $O_1(\varepsilon)$ трансверсально пересекает $T_1(-1, 1)$ (соотв. $T_2(-1, 1)$) в точке $T_1(u_{11}(\varepsilon))$ (соотв. $T_2(u_{21}(\varepsilon))$), где $u_{i1}(\cdot) \in C^r$, $u_{i1}(0) = 0$ ($i = 1, 2$), а входящая (соотв. выходящая) сепаратриса точки $O_2(\varepsilon)$, трансверсально пересекает $T_1(-1, 1)$ (соотв. $T_2(-1, 1)$) в точке $T_1(u_{12}(\varepsilon))$ (соотв. $T_2(u_{22}(\varepsilon))$), где $u_{i2}(\cdot) \in C^r$, $u_{i2}(0) = 0$ ($i = 1, 2$). Обозначим $\Delta_i(\varepsilon) := u_{i1}(\varepsilon) - u_{i2}(\varepsilon)$, $i = 1, 2$.

Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\det(\partial\Delta_i(0, 0)/\partial\varepsilon_j) \neq 0. \quad (1)$$

При условии (1), сделав в некоторой окрестности нуля $E^* \subset E^1$ на плоскости параметров C^r -замену координат $\Delta_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \tilde{\varepsilon}_i$ ($i = 1, 2$) и вернувшись к прежним обозначениям $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ параметров, можно считать, что

$$\Delta_i(\varepsilon) = \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

а $E^* = (-\delta^*, \delta^*)^2$.

Везде далее будем предполагать, что семейство векторных полей \mathbf{v}_ε удовлетворяет условию (1), а параметры $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ выбраны так, что справедливо равенство (2).

4 Бифуркации векторного поля, удовлетворяющего условиям (А)

Пусть $\tau_\varepsilon^k : (-1, 1) \rightarrow M_{i_k j_k}$, $\varepsilon \in E^*$, $k = 1, 2$, такие C^r -вложения, что $\tau_\varepsilon^k(0) = O_k(\varepsilon)$, $\tau_\varepsilon^k(v)$ C^r -гладко зависит от (v, ε) , $\tau_0^k(0, 1) \subset C_+$. Тогда, используя леммы о пересечении траекторий с дугами без контакта [18, параграф 3] и учитывая равенства (2), получаем, что числа $u_1 > 0$, $v_1 > 0$ и $\delta_1 \in (0, \delta^*]$ можно выбрать так, что $\forall \varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$ определены отображения

$$\begin{aligned} T_1(u_{12}(\varepsilon) + u) &\mapsto \tau_\varepsilon^2(\varphi_1(u, \varepsilon)), \quad u \in [-u_1, u_1], \\ \tau_\varepsilon^2(v, \varepsilon) &\mapsto T_2(u_{22}(\varepsilon) + \varphi_2(v, \varepsilon)), \quad v \in [0, v_1] \end{aligned}$$

по траекториям поля \mathbf{v}_ε и отображения

$$T_1(u_{12}(\varepsilon) + u) \mapsto \tau_\varepsilon^1(\psi_1(u, \varepsilon)), \quad u \in [-u_1, u_1],$$

$$\tau_\varepsilon^1(v, \varepsilon) \mapsto T_2(u_{21}(\varepsilon) + \psi_2(v, \varepsilon)), \quad v \in [0, v_1]$$

по траекториям поля $-\mathbf{v}_\varepsilon$, где $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in C^r$,

$$\forall u \in [-u_1, u_1] \quad \forall \varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$$

$$(\varphi_1)'_u(u, \varepsilon) > 0, \quad (\psi_1)'_u(u, \varepsilon) > 0, \quad \varphi_1(0, \varepsilon) = 0, \quad \psi_1(\varepsilon_1, \varepsilon) = 0, \quad (3)$$

$$\forall v \in (0, v_1] \quad \forall \varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$$

$$(\varphi_2)'_v(v, \varepsilon) > 0, \quad (\psi_2)'_v(v, \varepsilon) > 0, \quad \varphi_2(0, \varepsilon) = 0, \quad \psi_2(0, \varepsilon) = \varepsilon_2. \quad (4)$$

Из условий, определяющих особую точку типа «развилка», следует (см. [17]), что $\forall \varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$

$$(\varphi_2)'_v(0, \varepsilon) = 0, \quad (\psi_2)'_v(0, \varepsilon) = 0, \quad (\varphi_2)''_{vv}(0, \varepsilon) > 0, \quad (\psi_2)''_{vv}(0, \varepsilon) > 0. \quad (5)$$

Пусть $\varphi(u, \varepsilon) := \varphi_2(\varphi_1(u, \varepsilon), \varepsilon)$, $\psi(u, \varepsilon) := \psi_2(\psi_1(u, \varepsilon), \varepsilon)$. Ввиду (3) и (4) можно считать, что $\varphi(u, \varepsilon)$ определена на множестве $[0, u_1] \times (-\delta_1, \delta_1)^2$, а $\psi(u, \varepsilon)$ на множестве $\{(u, \varepsilon) : \varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2, \varepsilon_1 \leq u \leq u_1\}$.

Обозначим $\lambda_+ := \varphi''_{uu}(0, 0)$, $\lambda_- := \psi''_{uu}(0, 0)$. Вследствие (3)–(5)

$$\lambda_+ = (\varphi_2)''_{vv}(0, 0)[(\varphi_1)'_u(0, 0)]^2 > 0, \quad \lambda_- = (\psi_2)''_{vv}(0, 0)[(\psi_1)'_u(0, 0)]^2 > 0.$$

Нетрудно убедиться, что число $\lambda := \lambda_+/\lambda_-$ не зависит от произвола в выборе отображений T_k и τ_0^k и потому является характеристикой траектории Γ_0 поля \mathbf{v}_0 .

Теорема 1. Пусть имеет место случай (A), при этом $\lambda < 1$. Тогда существуют число $\delta \in (0, \delta_1)$, окрестность U траектории Γ_0 и разбиение области параметров $E := (-\delta, \delta)^2$ на множества $B_0 = \{(0, 0)\}$, B_i , E_i ($i \in \{1, 2, \dots, 7\}$) (рис. 3), где

$$B_1 = (0, \delta) \times \{0\}, \quad B_j = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = \beta_j(\varepsilon_1)\}, \quad \beta_j : (0, \delta) \rightarrow (0, \delta), \quad \beta_j \in C^1, \\ \beta_j(+0) = \beta'_j(+0) = 0, \quad j = 2, 3, \quad \beta_2(\varepsilon_1) < \beta_3(\varepsilon_1), \quad B_4 = \{0\} \times (0, \delta), \quad B_5 = \\ (-\delta, 0) \times \{0\}, \quad B_6 = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = \beta_6(\varepsilon_1)\}, \quad \beta_6 : (-\delta, 0) \rightarrow (-\delta, 0), \quad \beta_6 \in C^1, \\ \beta_6(-0) = \beta'_6(-0) = 0, \quad B_7 = \{0\} \times (-\delta, 0),$$

E_i – связная компонента $E \setminus \bigcup_{k=0}^7 B_k$, в границу которой входят B_i и B_{i+1} ($B_8 := B_1$),

такие, что схемы фазовых портретов в U векторных полей \mathbf{v}_ε , $\varepsilon \in E$, имеют вид, изображенный на рис. 3.

Случай $\lambda > 1$ сводится к случаю $\lambda < 1$ переходом к семейству противоположных векторных полей $-\mathbf{v}_\varepsilon$, и переменной нумерации развилки.

Доказательство. Пусть $\psi^{-1}(\cdot, \varepsilon)$ – функция, обратная к $\psi(\cdot, \varepsilon)$. Определим функцию последования $f(\cdot, \varepsilon) := \psi^{-1}(\varphi(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ по траекториям поля \mathbf{v}_ε и функцию расхождения траекторий $d(\cdot, \varepsilon) := \varphi(\cdot, \varepsilon) - \psi(\cdot, \varepsilon)$. Тогда $\forall \varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$ функция $d(\cdot, \varepsilon)$ определена на $[0, u_1]$, если $\varepsilon_1 \leq 0$, и на $[\varepsilon_1, u_1]$, если $\varepsilon_1 > 0$.

Через точку $T_1(u_{12}(\varepsilon)) + u_*$, где $u_* \in (0, u_1]$ при $\varepsilon_1 \leq 0$ и $u_* \in (\varepsilon_1, u_1]$ при $\varepsilon_1 > 0$, проходит устойчивая (неустойчивая) гиперболическая периодическая траектория тогда и только тогда, когда $f(u_*, \varepsilon) - u_* = 0$,

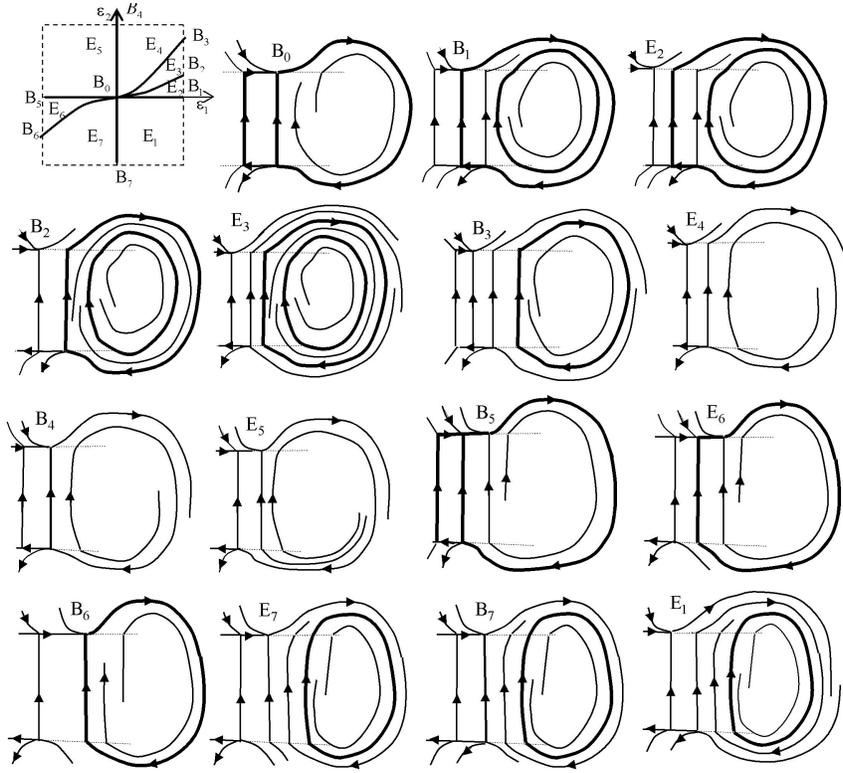


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма и бифуркации фазовых портретов в случае (А) и $\gamma < 1$

$f'_u(u_*, \varepsilon) < 1$ ($f'_u(u_*, \varepsilon) > 1$), проходит двойной цикл тогда и только тогда, когда $f(u_*, \varepsilon) - u_* = f'_u(u_*, \varepsilon) - 1 = 0$, $f''_{uu}(u_*, \varepsilon) \neq 0$.

Для функции расхождения эти условия принимают соответственно вид $d(u_*, \varepsilon) = 0$, $d'_u(u_*, \varepsilon) < 0$ ($d'_u(u_*, \varepsilon) > 0$) и $d(u_*, \varepsilon) = d'_u(u_*, \varepsilon) = 0$, $d''_{uu}(u_*, \varepsilon) \neq 0$.

Продолжим φ и ψ до C^r -функций, соответственно, $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ на $[-u_1, u_1] \times (-\delta_1, \delta_1)^2$. Пусть $\bar{d}(u, \varepsilon) := \bar{\varphi}(u, \varepsilon) - \bar{\psi}(u, \varepsilon)$.

Ввиду (3)–(5)

$$\bar{\varphi}(u, \varepsilon) = (\lambda_+/2)u^2 + R_1(u, \varepsilon), \quad \bar{\psi}(u, \varepsilon) = \varepsilon_2 + (\lambda_-/2)(u - \varepsilon_1)^2 + R_2(u - \varepsilon_1, \varepsilon), \quad (6)$$

где

$$R_k(0, \varepsilon) = (R_k)'_u(0, \varepsilon) = (R_k)'_{\varepsilon_j}(0, \varepsilon) = (R_k)''_{u\varepsilon_j}(0, \varepsilon) = 0, \quad k, j = 1, 2, \quad (7)$$

и, следовательно,

$$\bar{d}(0, 0) = \bar{d}'_u(0, 0) = 0. \quad (8)$$

Так как $\bar{d}'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) = -1 + R'_{1\varepsilon_2}(u, \varepsilon) - R'_{2\varepsilon_2}(u - \varepsilon_1, \varepsilon)$, то u_1 и δ_1 можно выбрать так, что

$$\bar{d}'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) < 0 \text{ для всех } (u, \varepsilon) \in (-u_1, u_1) \times (-\delta_1, \delta_1)^2. \quad (9)$$

Поскольку $\lambda = \lambda_+/\lambda_- < 1$, то $d''_{uu}(0, 0) = \lambda_+ - \lambda_- < 0$. Следовательно, u_1 и δ_1 можно считать столь малыми, что

$$\bar{d}''_{uu}(u, \varepsilon) < 0 \text{ для всех } (u, \varepsilon) \in (-u_1, u_1) \times (-\delta_1, \delta_1)^2. \quad (10)$$

Из (6) и (7) следует, что u_1 и δ_1 можно считать выбранными так, что

$$d'_u(u, \varepsilon) < 0 \text{ для всех } u \in [0, u_1], \varepsilon \in (-\delta_1, 0] \times (-\delta_1, \delta_1). \quad (11)$$

Из (8) и (10) вытекает, что $d(u, 0) < 0$ для всех $u \in [0, u_1]$. Пусть $0 < u_2 < f(u_1, 0) < u_1$. Взяв δ_1 достаточно малым, получим

$$d(u, \varepsilon) < 0 \text{ для всех } \varepsilon \in (0, \delta_1) \times (-\delta_1, \delta_1), \varepsilon_1 < u_2 \leq u \leq u_1. \quad (12)$$

Используя леммы о траекториях между дугами без контакта [18, параграф 3] и учитывая неравенство $f(u_1, 0) < u_1$, можно построить простые замкнутые кривые $\gamma^\pm \in C_\pm$ со следующими свойствами:

1) Γ_0 и γ^\pm ограничивают цилиндрическую полуокрестность U_\pm траектории Γ_0 , не содержащую особых точек поля \mathbf{v}_0 , 2) $\gamma^+ = \cup_{j=1}^N \gamma_j^+$, где γ_j^+ гладкая дуга в M_{k_j} , при некотором $k_j \in \{1, \dots, n\}$ с концами, принадлежащим ∂M_{k_j} , и трансверсальная ∂M_{k_j} , 2) пересечение γ^+ с $T_1(-u_1, u_1)$ трансверсально и состоит из одной точки $T_1(f(u_1, 0))$, 4) поле $\mathbf{v}_0^{(k_j)}$ в точках дуг γ_j^+ трансверсально γ_j^+ , а траектории поля \mathbf{v}_0 в этих точках входят в U_+ , 6) γ^- , состоит из дуг $[s_i^- s_{i+1}^-]$, $i \in \{1, \dots, 6\}$, с концами в точках s_i^- и s_{i+1}^- , где $s_2^- \in \tau_0^2(-u_1, 0)$, $s_3^- \in \tau_0^1(-u_1, 0)$, 7) $[s_1^- s_2^-]$ и $[s_2^- s_3^-]$ (соотв. $[s_4^- s_5^-]$ и $[s_5^- s_6^-]$) – гладкие дуги в M_{i_1} (соотв. в M_{i_2}), трансверсальные траекториям поля $\mathbf{v}_0^{(i_1)}$ (соотв. $\mathbf{v}_0^{(i_2)}$), причем в точках дуг $[s_1^- s_2^-]$, $[s_2^- s_3^-]$ и $[s_4^- s_5^-] \setminus \{s_5^-\}$ траектории поля \mathbf{v}_0 входят в U_- , а в точках дуги $[s_5^- s_6^-]$ они выходят из U_- , 8) дуги $[s_3^- s_4^-]$ и $[s_6^- s_7^-]$ состоят из гладких дуг, принадлежащих одному из множеств M_k , в точках которых траектории поля $\mathbf{v}_0^{(k)}$ трансверсальны этим дугам, причем в точках дуг $[s_3^- s_4^-]$ и $[s_6^- s_7^-] \setminus \{s_6^-\}$ траектории поля входят в U_- , 9) дуги $T_1(-u_1, 0)$ и $[s_3^- s_4^-]$ трансверсально пересекаются в единственной точке.

Возьмем $U := U_+ \cup \Gamma_0 \cup U_-$.

Выбрав число δ_1 достаточно малым, получим, что при $\varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$ поле \mathbf{v}_ε не имеет в U особых точек, отличных от $O_1(\varepsilon)$ и $O_2(\varepsilon)$, траектории поля \mathbf{v}_ε в точках γ^+ и $\gamma^- \setminus [s_5^- s_6^-]$ входят в U , а в точках дуги $[s_5^- s_6^-] \setminus \{s_5^-, s_6^-\}$ выходят из U ,

$$l_\varepsilon := T_1(u_{12}(\varepsilon) - u_1, u_{12}(\varepsilon) + u_1) \cap U = T_1(u_{12}(\varepsilon) + u_-(\varepsilon), u_{12}(\varepsilon) + u_+(\varepsilon)),$$

где $u_2 < u_+(\varepsilon) < u_1$, $-u_1 < u_-(\varepsilon) < 0$.

Тогда при $\varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$ касательная выходящая (входящая) сепаратриса развилки $O_1(\varepsilon)$ (соотв. $O_2(\varepsilon)$) пересекает дугу $[s_1^- s_2^-]$ (соотв. $[s_5^- s_6^-]$) в ее внутренней точке, любая периодическая траектория поля

\mathbf{v}_ε , содержащаяся в U , пересекает дугу l_ε , а периодическая траектория этого поля, начинающаяся в точке l_ε , не выходит из U .

Пусть $l_\varepsilon^+ := T_1[u_{12}(\varepsilon) + \varepsilon_1, u_{12}(\varepsilon) + u_+(\varepsilon)]$, если $\varepsilon_1 > 0$ и $l_\varepsilon^+ := T_1[u_{12}(\varepsilon), u_{12}(\varepsilon) + u_+(\varepsilon)]$, если $\varepsilon_1 \leq 0$, $l_\varepsilon^- := l_\varepsilon \setminus l_\varepsilon^+$.

Ввиду (6) и (7) $\bar{\varphi}(\varepsilon_1, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} \bar{\varphi}(\varepsilon_1, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 0$, $k = 1, 2$. Поэтому существует такое $\delta \in (0, \delta_1)$, что для любого $\varepsilon_1 \in (-\delta, \delta)$ уравнение $\bar{\varphi}(\varepsilon_1, \varepsilon) - \varepsilon_2 = 0$ имеет единственное решение $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)$, где $\beta_2(\cdot) \in C^r$,

$$0 < \beta_2(\varepsilon) = (\lambda_+/2)\varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2) < \delta. \quad (13)$$

Так как при $\varepsilon_1 > 0$ имеем $\bar{\varphi}(\varepsilon_1, \varepsilon) = \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon)$, то, учитывая (9), получаем $\forall \varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta)$

$$\operatorname{sgn} d(\varepsilon_1, \varepsilon) = \operatorname{sgn} (\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon) - \varepsilon_2) = \operatorname{sgn} (\beta_2(\varepsilon_1) - \varepsilon_2). \quad (14)$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\bar{d}(u, \varepsilon) = 0, \quad \bar{d}'_u(u, \varepsilon) = 0. \quad (15)$$

Из (6) и (7) находим, что

$$\begin{vmatrix} \bar{d}'_u(0, 0) & \bar{d}'_{\varepsilon_2}(0, 0) \\ \bar{d}''_{uu}(0, 0) & \bar{d}''_{u\varepsilon_2}(0, 0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \lambda_+ - \lambda_- & \bar{d}''_{u\varepsilon_2}(0, 0) \end{vmatrix} = \lambda_+ - \lambda_- \neq 0. \quad (16)$$

Из (8) и (16) по теореме о неявной функции вытекает, что δ можно считать выбранным так, что для любого $\varepsilon_1 \in (-\delta, \delta)$ система уравнений (15) имеет единственное решение $u = \hat{u}(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_2 = \beta_3(\varepsilon_1)$, где функции $\hat{u}(\cdot), \beta_3(\cdot) \in C^{r-1}$, $\hat{u}(0) = \beta_3(0) = 0$. Используя (6) и (7), получаем

$$\hat{u}(\varepsilon_1) = \frac{\lambda_-}{\lambda_- - \lambda_+} \varepsilon_1 + o(\varepsilon_1), \quad \beta_3(\varepsilon_1) = \frac{\lambda_+ \lambda_-}{2(\lambda_- - \lambda_+)} \varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2).$$

Считая δ достаточно малым, отсюда и из (13) имеем

$$\forall \varepsilon_1 \in (0, \delta) \quad \beta_2(\varepsilon_1) < \beta_3(\varepsilon_1) < \varepsilon_1 < \delta, \quad \varepsilon_1 < \hat{u}(\varepsilon_1) < u_2,$$

и потому для всех $\varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta)$ и $u \in [\varepsilon_1, u_1]$

$$d(u, \varepsilon) = d'_u(u, \varepsilon) = 0 \Leftrightarrow u = \hat{u}(\varepsilon_1), \quad \varepsilon_2 = \beta_3(\varepsilon_1). \quad (17)$$

Из (6)–(9) по теореме о неявной функции получаем, что число δ можно выбрать так, что для любого $\varepsilon_1 \in (-\delta, \delta)$ уравнение $\bar{d}(0, \varepsilon) = 0$ имеет единственное решение $\varepsilon_2 = \beta_6(\varepsilon_1)$, где $\beta_6(\cdot) \in C^1$, $\beta_6(\varepsilon) = -(\lambda_-/2)\varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2)$. Считая δ достаточно малым, будем иметь $\beta_6(\varepsilon_1) \in (-\delta, 0)$ при $\varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$ и

$$\operatorname{sgn} d(0, \varepsilon) = \operatorname{sgn} (\beta_6(\varepsilon_1) - \varepsilon_2) \text{ для всех } \varepsilon \in (-\delta, 0] \times (-\delta, \delta). \quad (18)$$

Определим теперь множества B_i и E_i ($i \in \{1, 2, \dots, 7\}$) так, как они описаны в формулировке теоремы.

Пусть $\varepsilon \in B_2 \cup E_3 \cup B_3 \cup E_4$, то есть $\varepsilon_1 \in (0, \delta)$, $\beta_2(\varepsilon_1) \leq \varepsilon_2 < \delta$. Положительная полутраектория L^+ поля \mathbf{v}_ε , начинающаяся в точке дуги l_ε^- , проходит через точку $\tau_\varepsilon^2(\varphi_1(u, \varepsilon))$ для некоторого $u \in [0, \varepsilon_1]$. Из (14) следует, что $\varphi(u, \varepsilon) < \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon) \leq \varepsilon_2 = \psi(0, \varepsilon)$. Поэтому L^+ выходит из

U (в точке дуги $[s_5^- s_6^-]$). Тем самым, любая периодическая траектория, лежащая в U , пересекает дугу l_ε^+ .

Из (17) и (10) получаем, что при $\varepsilon \in B_3$ поле \mathbf{v}_ε имеет в U единственную периодическую траекторию – двойной цикл, проходящий через точку $T_1(u_{12}(\varepsilon) + \hat{u}(\varepsilon_1)) \in l_\varepsilon^+$, а асимптотическое поведение остальных траекторий такое, как указано на рис. 3.

Из (17) и (10) также следует, что при $\varepsilon \in B_3$, $u \neq \hat{u}(\varepsilon_1)$ $d(u, \varepsilon) < 0$. Отсюда и из (9) получаем, что $d(u, \varepsilon) < 0$, если $\varepsilon \in E_4$, $u \in [\varepsilon_1, u_1]$. Следовательно, при $\varepsilon \in E_4$ поле \mathbf{v}_ε не имеет в U периодических траекторий; все положительные и отрицательные полутраектории выходят из U .

Вследствие (17) и (9) имеем $d(\hat{u}(\varepsilon_1), \varepsilon) > 0$ при $\varepsilon_1 \in (0, \delta)$, $-\delta < \varepsilon_2 < \beta_3(\varepsilon_1)$. Отсюда, из (10), (12) и (14) получаем, что для любого $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ с $\varepsilon_1 \in (0, \delta)$, $\beta_2(\varepsilon_1) \leq \varepsilon_2 < \beta_3(\varepsilon_1)$ существует такое число $u_M(\varepsilon) \in (\varepsilon_1, u_2)$, что

$$d(u_M(\varepsilon), \varepsilon) > 0, \operatorname{sgn} d'_u(u, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(u_M(\varepsilon) - u) \text{ для } u \in [\varepsilon_1, u_1]. \quad (19)$$

Из (19), (12) и (14) следует, что при $\varepsilon \in B_2 \cup E_3$ $d(\cdot, \varepsilon)$ имеет ровно два нуля: $u_R(\varepsilon) \in (u_M(\varepsilon), u_2)$, $d'_u(u_R(\varepsilon), \varepsilon) < 0$ и $u_L(\varepsilon) = \varepsilon_1$, если $\varepsilon \in B_2$, $u_L(\varepsilon) \in (\varepsilon_1, u_M(\varepsilon))$, если $\varepsilon \in E_3$, при этом $d'_u(u_L(\varepsilon), \varepsilon) > 0$. Соответственно, при $\varepsilon \in E_3$ в U имеется ровно две периодических траектории – устойчивая и неустойчивая гиперболические периодических траектории, а при $\varepsilon \in B_2$ в U имеется устойчивая гиперболическая периодическая траектория и периодическая траектория, проходящая через развилку $O_1(\varepsilon)$. Асимптотическое поведение остальных траекторий такое, как указано на рис. 3.

При $\varepsilon \in E_1 \cup B_1 \cup E_2$ из (12), (14) и (10) следует, что $d(\cdot, \varepsilon)$ имеет единственный нуль $u_R(\varepsilon) \in (\varepsilon_1, u_2)$, при этом $d'_u(u_R(\varepsilon), \varepsilon) < 0$. Следовательно, дугу l_ε^+ пересекает единственная периодическая траектория $\Gamma_s(\varepsilon)$; она гиперболическая и устойчивая, а остальные траектории, пересекающие l_ε^+ , ω -предельны к $\Gamma_s(\varepsilon)$.

При тех же ε исследуем траектории, пересекающие дугу l_ε^- .

Пусть $\varepsilon \in E_2$. Ввиду (3) и (4) $\varphi(0, \varepsilon) \equiv 0 < \varepsilon_2$. Вследствие (14) $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon) > \varepsilon_2$. Так как $\varphi'_u(u, \varepsilon) > 0$, то существует единственное число $u_L(\varepsilon) \in (0, \varepsilon_1)$ такое, что $\varphi(u_L(\varepsilon), \varepsilon) = \varepsilon_2$. Тем самым, дугу l_ε^- пересекает единственная периодическая траектория $\Gamma_u(\varepsilon)$. Она содержит отрезок $\tau_\varepsilon^1[\psi_1(u_L(\varepsilon), \varepsilon), 0]$, и потому неустойчива. Поведение непериодических траекторий, пересекающих эту дугу показано на рис. 3.

Пусть $\varepsilon \in B_1$. Так как $\varphi(0, \varepsilon) = \varphi_2(0, \varepsilon) = 0 = \psi_2(0, \varepsilon)$, то положительная полутраектория, выходящая из точки $O_2(\varepsilon)$, проходит и через точку $O_1(\varepsilon)$. Если $u \in (0, \varepsilon_1)$, то $\varphi(u, \varepsilon) > 0 = \psi_2(0, \varepsilon)$, и потому через точку $T_1(u_{12}(\varepsilon) + u)$ не проходит периодическая траектория. Через каждую точку $T_1(u_{12}(\varepsilon) + u)$, $u \in [-u_1, 0]$, проходит континуум периодических траекторий. Они содержат отрезки $\tau_\varepsilon^2[\varphi_1(u, \varepsilon), 0]$ и $\tau_\varepsilon^1[\psi_1(u, \varepsilon), 0]$, и, очевидно, неустойчивы.

Покажем, что при $\varepsilon \in E_1$ через точки дуги l_ε^- не проходят периодические траектории. Положительная полутраектория L^+ , выходящая из точки дуги l_ε^- , проходит через точку $\tau_\varepsilon^2(\varphi_1(u_*, \varepsilon))$, $u_* \in [0, \varepsilon_1)$. Так как $\varphi(u_*, \varepsilon) \geq \varphi(0, \varepsilon) = 0 > \varepsilon_2$, то $\psi^{-1}(\varphi(u_*, \varepsilon), \varepsilon) > \psi^{-1}(\varepsilon_2, \varepsilon) = \varepsilon_1$. Поэтому L^+ пересекает дугу l_ε^+ , и, следовательно, ω -предельна к периодической траектории $\Gamma_s(\varepsilon)$.

Из (11), (18) и (12) получаем следующие утверждения:

При $\varepsilon \in E_7$ и $\varepsilon \in B_7$ с дугой l_ε^+ пересекается единственная (устойчивая гиперболическая периодическая траектория $\Gamma_s(\varepsilon)$). При $\varepsilon = 0$ с дугой l_0^+ пересекается единственная (устойчивая) периодическая траектория Γ_0 . При $\varepsilon \in B_6$ с дугой l_0^+ пересекается единственная (устойчивая) периодическая траектория $\Gamma_s(\varepsilon)$, образованная совпадающими сепаратрисами точки $O_2(\varepsilon)$. При $\varepsilon \in B_4 \cup E_5 \cup B_5 \cup E_6$ нет периодических траекторий, пересекающихся с дугой l_0^+ .

Рассмотрим теперь траектории, пересекающие дугу l_ε^- при $\varepsilon \in (-\delta, 0] \times (-\delta, \delta)$.

При $\varepsilon \in B_4$ и $\varepsilon \in B_7$ положительная и отрицательная полутраектории, начинающиеся в точке дуги l_ε^- проходят, соответственно через точки $O_2(\varepsilon)$ и $O_1(\varepsilon)$, а потому пересекают дугу $T_2(-1, 1)$ в несовпадающих точках $T_2(u_{22}(\varepsilon))$ и $T_2(u_{22}(\varepsilon) + \varepsilon_2)$. Следовательно, периодических траекторий, пересекающихся с дугой l_ε^- , нет. При $\varepsilon = 0$ через каждую точку дуги l_ε^- проходит периодическая траектория. При $\varepsilon \in B_6$ положительная полутраектория, начинающаяся в точке дуги l_ε^- , проходит через точку $O_2(\varepsilon)$, и потому ω -предельна к периодической траектории $\Gamma_s(\varepsilon)$.

Пусть $\varepsilon \in E_6$. Через точку $T_1(u_{12}(\varepsilon) + u)$, $u \in (\varepsilon_1, 0)$, дуги l_ε^- проходит периодическая траектория тогда и только тогда, когда $\psi(u, \varepsilon) = 0$. Так как $\psi(0, \varepsilon) = -d(0, \varepsilon)$, то из (18) имеем $\psi(0, \varepsilon) > 0$. Поскольку $\psi(\varepsilon_1, \varepsilon) = \varepsilon_2 < 0$, а $\psi'_u(u, \varepsilon) > 0$, то уравнение $\psi(u, \varepsilon) = 0$ имеет единственное решение $u = u_R(\varepsilon) \in (\varepsilon_1, 0)$. Через точку $T_1(u_{12}(\varepsilon) + u_R(\varepsilon))$ проходит устойчивая периодическая траектория $\Gamma_R(\varepsilon)$. Все остальные траектории, проходящие через точки дуги l_ε^- , совпадают с $\Gamma_R(\varepsilon)$, начиная с некоторого положительного момента времени, и потому непериодические.

При $\varepsilon \in B_5$ через каждую точку $T_1(u_{12}(\varepsilon) + u)$, $u \in (-u_-(\varepsilon), \varepsilon_1]$ проходит периодическая траектория. Траектории, проходящие через точки $T_1(u_{12}(\varepsilon) + u)$, $u \in (\varepsilon_1, 0)$ начиная с некоторого положительного момента времени совпадают с траекториями, проходящими через точки $T_1(u_{12}(\varepsilon) + u_*)$, $u_* \in (-u_1, \varepsilon_1]$, и потому непериодические. \square

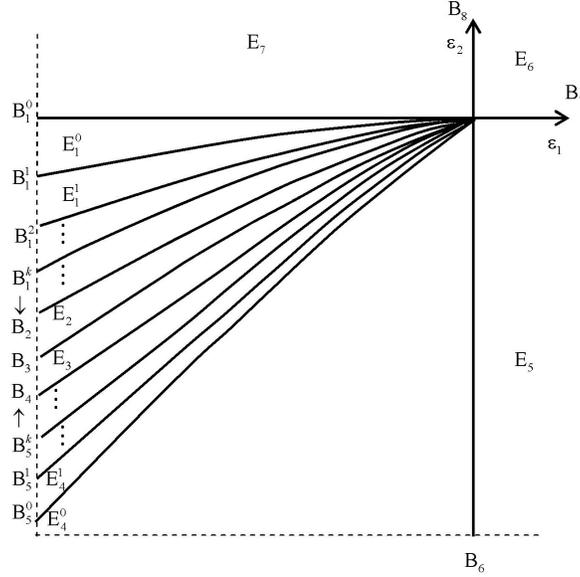


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма в случае (Б)

5 Бифуркации векторного поля, удовлетворяющего условиям (Б)

Функции $\psi(u, \varepsilon)$ и $\varphi_1(u, \varepsilon)$ определим так же, как в доказательстве теоремы 1. При достаточно малом $v_1 > 0$ определено отображение

$$\tau_\varepsilon^2(v, \varepsilon) \mapsto T_2(u_{22}(\varepsilon) + \varphi_2(v, \varepsilon)), \quad v \in (-v_1, 0],$$

по траекториям поля \mathbf{v}_ε , при этом

$$\varphi_2(0, \varepsilon) = (\varphi_2)'_v(0, \varepsilon) = 0, \quad (\varphi_2)''_{vv}(0, \varepsilon) < 0. \quad (20)$$

Функция $\varphi(u, \varepsilon) := \varphi_2(\varphi_1(u, \varepsilon), \varepsilon)$ теперь определена на множестве $[-u_1, 0] \times (-\delta_1, \delta_1)^2$. Числа λ_+ и λ_- определим так же, как и в случае (А). Ввиду (20) теперь $\lambda_+ < 0$. Положим $\lambda := -\lambda_+/\lambda_-$.

Теорема 2. Пусть имеет место случай (Б), при этом $\lambda \neq 1$. Тогда существуют число $\delta \in (0, \delta^*)$, окрестность U траектории Γ_0 и разбиение области параметров $E := (-\delta, \delta)^2$ на множества $B_0 = \{(0, 0)\}$, B_i , $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$, E_j , $j \in \{1, 2, \dots, 7\}$, где (рис. 4)

$$B_i = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = \beta_i(\varepsilon_1)\}, \quad \beta_i : (-\delta, 0) \rightarrow (-\delta, 0), \quad \beta_i \in C^1, \quad \beta_i(-0) = \beta_i'(-0) = 0 \text{ для } i = 2, 3, 4, \quad \beta_4(\varepsilon_1) < \beta_3(\varepsilon_1) < \beta_2(\varepsilon_1),$$

$$B_1 = \cup_{k=0}^{\infty} B_1^k, \quad B_1^0 = (-\delta, 0) \times \{0\}, \quad B_1^k = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = \beta_1^k(\varepsilon_1)\}, \quad \beta_1^k : (-\delta, 0) \rightarrow (-\delta, 0), \quad \beta_1^k \in C^1, \quad \beta_1^k(\varepsilon_1) \downarrow \beta_2(\varepsilon_1) \text{ при } k \geq 1,$$

$$B_5 = \cup_{k=0}^{\infty} B_5^k, \quad B_5^k = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = \beta_5^k(\varepsilon_1)\}, \quad \beta_5^k : (-\delta, 0) \rightarrow (-\delta, 0), \quad \beta_5^k \in C^1, \quad \beta_5^k(\varepsilon_1) \uparrow \beta_4(\varepsilon_1),$$

$$B_6 = \{0\} \times (-\delta, 0), \quad B_7 = (0, \delta) \times \{0\}, \quad B_8 = \{0\} \times (0, \delta),$$

$$E_j = \{\varepsilon : \beta_j(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_{j+1}(\varepsilon_1)\} \text{ для } j = 2, 3,$$

$E_1 = \cup_{k=0}^{\infty} E_1^k$, $E_1^k = \{\varepsilon : \beta_1^{k+1}(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_1^k(\varepsilon_1)\}$,
 $E_4 = \cup_{k=0}^{\infty} E_4^k$, $E_4^k = \{\varepsilon : \beta_5^k(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_5^{k+1}(\varepsilon_1)\}$ (здесь $\beta_5^0(\varepsilon_1) := -\delta$),
 $E_5 = (0, \delta) \times (-\delta, 0)$, $E_6 = (0, \delta) \times (0, \delta)$, $E_7 = (-\delta, 0) \times (0, \delta)$,
такие, что схемы фазовых портретов векторных полей \mathbf{v}_ε , $\varepsilon \in E$,
в окрестности U имеют вид, изображенный на рис. 5 (при $\varepsilon \in B_1^k$ и
 $\varepsilon \in B_5^k$ дуга траектории между развилками пересекает дугу $T(-u_1, u_1)$
в k точках).

Доказательство. Как и в случае (А) можно выбрать число δ_1 и окрестность U траектории Γ_0 (рис. 2б), содержащую особые точки $O_1(\varepsilon)$ и $O_2(\varepsilon)$, но не содержащую других особых точек поля \mathbf{v}_ε , $\varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$, ограниченную простыми замкнутыми кривыми γ^\pm , состоящими из дуг $[s_i^\pm s_{i+1}^\pm]$, $i \in \{1, \dots, 5\}$, с концами в точках s_i^\pm и s_{i+1}^\pm , причем в точках γ^+ и $\gamma^- \setminus [s_3^- s_4^-]$ траектории поля \mathbf{v}_ε входят в U , а в точках $[s_3^- s_4^-]$ они выходят из U , а

$$l_\varepsilon := T_1(u_{12}(\varepsilon)) - u_1, u_{12}(\varepsilon) + u_1 \cap U = T_1(u_{12}(\varepsilon)) + u_-(\varepsilon), u_{12}(\varepsilon) + u_+(\varepsilon),$$

где $u_2 < u_+(\varepsilon) < u_1$, $-u_1 < u_-(\varepsilon) < \min\{0, \varepsilon_1\}$.

Функция $d(\cdot, \varepsilon) := \varphi(\cdot, \varepsilon) - \psi(\cdot, \varepsilon)$ теперь определена на отрезке $[\varepsilon_1, 0]$ при $\varepsilon \in (-\delta_1, 0) \times (-\delta_1, \delta_1)$. Продолжим $\psi(u, \varepsilon)$ и $\varphi(u, \varepsilon)$ до C^2 -функций $\bar{\psi}(u, \varepsilon)$ и $\bar{\varphi}(u, \varepsilon)$, определенных на $[-u_1, u_1] \times (-\delta_1, \delta_1)^2$, и положим $\bar{d}(u, \varepsilon) := \bar{\varphi}(u, \varepsilon) - \bar{\psi}(u, \varepsilon)$. Как и в случае (А) имеем равенства (6) и (7). Так как $\bar{d}_{uu}''(0, 0) = \lambda_+ - \lambda_- < 0$, то можно считать, что неравенства (9) и (10) верны и в рассматриваемом случае.

Используя (6), (7) и (9), получаем, что существует такое $\delta \in (0, \delta_1)$, что для любого $\varepsilon_1 \in (-\delta, \delta)$ уравнение $\bar{\varphi}(\varepsilon_1, \varepsilon) - \varepsilon_2 = 0$ имеет единственное решение $\varepsilon_2 = \beta_*(\varepsilon_1)$, где $\beta_*(\cdot) \in C^1$,

$$-\delta < \beta_*(\varepsilon) = (\lambda_+/2)\varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2) < 0. \quad (21)$$

Так как при $\varepsilon_1 < 0$ $\bar{\varphi}(\varepsilon_1, \varepsilon) = \varphi(\varepsilon_1, \varepsilon)$, то, учитывая (9), получаем для всех $\varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)$ равенства

$$\operatorname{sgn} d(\varepsilon_1, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon) - \varepsilon_2) = \operatorname{sgn}(\beta_*(\varepsilon_1) - \varepsilon_2). \quad (22)$$

Из (6) имеем $\bar{d}(0, \varepsilon) = -\bar{\psi}(0, \varepsilon) = -\varepsilon_2 - (\lambda_-/2)\varepsilon_1^2 + R_2(-\varepsilon_1, \varepsilon)$. Отсюда и из (7) по теореме о неявной функции получаем, что δ можно выбрать столь малым, что для любого $\varepsilon_1 \in (-\delta, \delta)$ уравнение $\bar{d}(0, \varepsilon) = 0$ имеет единственное решение $\varepsilon_2 = \beta_{**}(\varepsilon_1)$, где $\beta_{**}(\cdot) \in C^1$,

$$-\delta < \beta_{**}(\varepsilon) = (-\lambda_-/2)\varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2) < 0. \quad (23)$$

Так как при $\varepsilon_1 < 0$ $\bar{d}(0, \varepsilon) = d(0, \varepsilon)$, то из (23) и (9) следует, что

$$\forall \varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta) \quad \operatorname{sgn} d(0, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\beta_{**}(\varepsilon_1) - \varepsilon_2). \quad (24)$$

Как и в случае (А) получаем, что δ можно считать выбранным так, что для любого $\varepsilon_1 \in (-\delta, \delta)$ система уравнений (15) имеет единственное

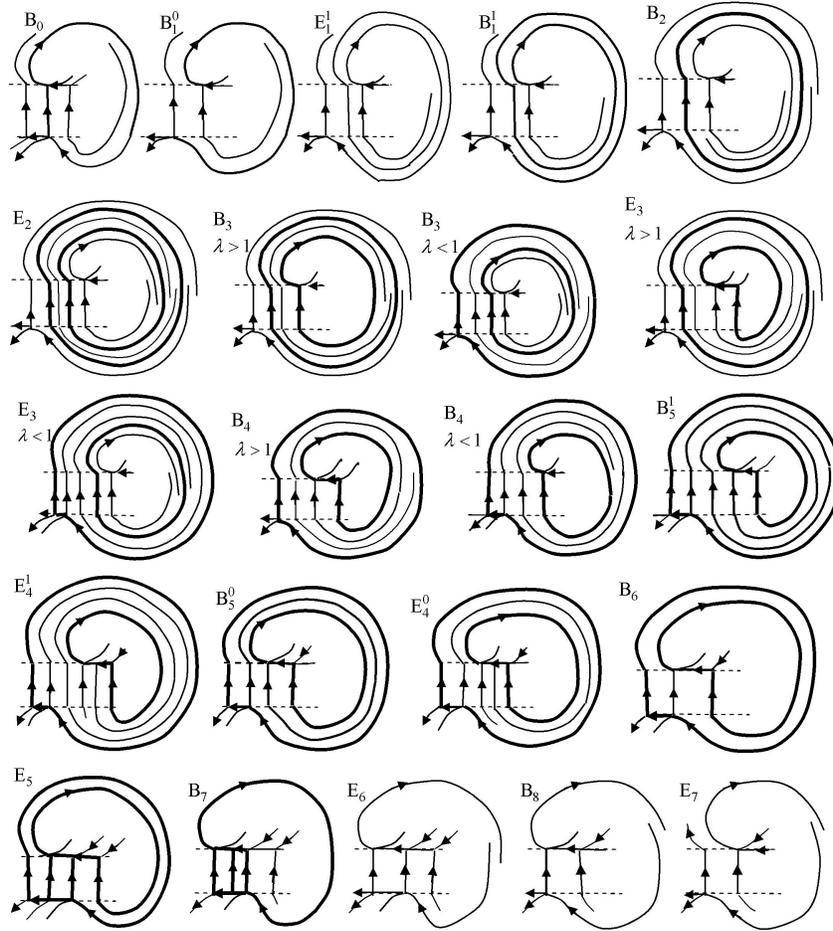


Рис. 5. Бифуркации фазовых портретов в случае (Б)

решение $u = \hat{u}(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)$, где $\hat{u}(\cdot), \beta_2(\cdot) \in C^{r-1}$,

$$\hat{u}(\varepsilon_1) = \frac{\lambda_-}{\lambda_- - \lambda_+} \varepsilon_1 + o(\varepsilon_1), \quad -\delta < \beta_2(\varepsilon_1) = \frac{\lambda_+ \lambda_-}{2(\lambda_- - \lambda_+)} \varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2) < 0. \quad (25)$$

Поскольку $0 < \frac{\lambda_-}{\lambda_- - \lambda_+} < 1$, то можно считать, что при $\varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$ $\hat{u}(\varepsilon_1) \in (\varepsilon_1, 0)$. Поэтому

$$\forall \varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta) \quad d(u, \varepsilon) = d'_u(u, \varepsilon) = 0 \Leftrightarrow u = \hat{u}(\varepsilon_1), \varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1). \quad (26)$$

Из (21), (23) и (25), считая δ достаточно малым, получаем, что для любого $\varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)$

$$-\delta < \beta_{**}(\varepsilon_1) < \beta_*(\varepsilon_1) < \beta_2(\varepsilon_1) < 0, \quad \text{если } \lambda < 1, \quad (27)$$

$$-\delta < \beta_*(\varepsilon_1) < \beta_{**}(\varepsilon_1) < \beta_2(\varepsilon_1) < 0, \quad \text{если } \lambda > 1, \quad (28)$$

Вследствие (6) и (7)

$$\begin{aligned} d'_u(\varepsilon_1, \varepsilon) &= \lambda_+ \varepsilon_1 + (R_1)'_v(0, \varepsilon) = \lambda_+ \varepsilon_1 + o(\varepsilon_1), \\ d'_u(0, \varepsilon) &= \lambda_- \varepsilon_1 + (R_2)'_v(-\varepsilon_1, \varepsilon) = \lambda_- \varepsilon_1 + o(\varepsilon_1). \end{aligned}$$

Поэтому можно считать $\forall \varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)$ $d'_u(\varepsilon_1, \varepsilon) > 0$, $d'_u(0, \varepsilon) < 0$. Отсюда и из (10) получаем, что $\forall \varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)$ существует такое число $u_M(\varepsilon) \in (\varepsilon_1, 0)$, что $u_M(\cdot) \in C^1$,

$$\operatorname{sgn} d'_u(u, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(u_M(\varepsilon) - u) \text{ для всех } u \in [\varepsilon_1, 0]. \quad (29)$$

Из (29), (26) и (9) вытекает, что

$$\operatorname{sgn} d(u_M(\varepsilon), \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\beta_2(\varepsilon_1) - \varepsilon_2) \text{ для всех } \varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta). \quad (30)$$

Положим теперь $\beta_3(\varepsilon_1) := \beta_*(\varepsilon_1)$, $\beta_4(\varepsilon_1) := \beta_{**}(\varepsilon_1)$ при $\lambda < 1$ и $\beta_3(\varepsilon_1) := \beta_{**}(\varepsilon_1)$, $\beta_4(\varepsilon_1) := \beta_*(\varepsilon_1)$ при $\lambda > 1$. Ввиду (27) и (29) $\beta_4(\varepsilon_1) < \beta_3(\varepsilon_1) < \beta_2(\varepsilon_1)$.

Для функции последования $f(\cdot, \varepsilon) := \psi^{-1}(\varphi(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ определим ее итерации $f^k(\cdot, \varepsilon)$ по индукции: $f^1(\cdot, \varepsilon) := f(\cdot, \varepsilon)$, $f^k(\cdot, \varepsilon) := f(f^{k-1}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ при $k \geq 2$, если $f^{k-1}(\cdot, \varepsilon)$ определено.

Ясно, что для $\varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$, $-\delta < \varepsilon_2 < \beta_4(\varepsilon_1)$, $u \in [\varepsilon_1, 0]$ значение $f(u, \varepsilon)$ определено и $f(u, \varepsilon) > u$, $f'_u(u, \varepsilon) > 0$.

Дифференцируя равенство $\psi(f(u, \varepsilon), \varepsilon) = \varphi(u, \varepsilon)$ по ε_2 , получаем при $u \in (\varepsilon_1, 0)$

$$\psi'_v(f(u, \varepsilon), \varepsilon) f'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) + \psi'_{\varepsilon_2}(f(u, \varepsilon), \varepsilon) = \varphi'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon),$$

откуда находим

$$f'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) = \frac{\varphi'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) - \psi'_{\varepsilon_2}(f(u, \varepsilon), \varepsilon)}{\psi'_v(f(u, \varepsilon), \varepsilon)}.$$

Так как вследствие (6) и (7) $\varphi'_{\varepsilon_2}(0, 0) = 0$, $\psi'_{\varepsilon_2}(0, 0) = 1$, то можно считать, что при выбранном δ

$$f'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) < 0 \text{ для } \varepsilon_1 \in (-\delta, 0), -\delta < \varepsilon_2 < \beta_4(\varepsilon_1), u \in (\varepsilon_1, 0). \quad (31)$$

Лемма 1. Для любых $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$ уравнение $f^{k+1}(\varepsilon_1, \varepsilon) = 0$ имеет относительно $\varepsilon_2 \in (-\delta, 0)$ единственное решение $\varepsilon_2 = \beta_5^k(\varepsilon_1)$, при этом $\beta_5^k(\cdot) \in C^1$, $\beta_5^k(\varepsilon_1) \uparrow \beta_4(\varepsilon_1)$.

Доказательство. Приведем его для случая $\lambda < 1$. Случай $\lambda > 1$ рассматривается аналогично. Предполагая δ достаточно малым, из (6), (7), (21) и (23) получаем, что уравнение $\bar{\varphi}(\varepsilon_1, \varepsilon) - \bar{\psi}(0, \varepsilon) = 0$ для любого $\varepsilon_1 \in (-\delta, \delta)$ имеет относительно ε_2 единственное решение $\varepsilon_2 = \beta_5^0(\varepsilon_1)$, при этом $\beta_5^0(\cdot) \in C^1$,

$$-\delta < \beta_5^0(\varepsilon_1) = (1/2)(\lambda_+ - \lambda_-)\varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2) < \beta_4(\varepsilon_1).$$

Для $\varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$, $\varepsilon_2 = \beta_5^0(\varepsilon_1)$ получаем $\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon) - \psi(0, \varepsilon) = 0$, и потому $f^1(\varepsilon_1, \varepsilon) = 0$, то есть утверждение леммы верно при $k = 0$. Пусть оно верно при $k \leq m$. При $\varepsilon_2 = \beta_5^m(\varepsilon_1)$ $f^{m+2}(\varepsilon_1, \varepsilon) = f(f^{m+1}(\varepsilon_1, \varepsilon), \varepsilon) = f(0, \varepsilon) > 0$. При $\varepsilon_2 = \beta_4(\varepsilon_1) = \beta_{**}(\varepsilon_1)$ $f(0, \varepsilon) = 0$, и потому $f^{m+2}(\varepsilon_1, \varepsilon) <$

$f^{m+2}(0, \varepsilon) = 0$. Вследствие (31) $\partial f^{m+2}(0, \varepsilon)/\partial \varepsilon_2 < 0$ для $\beta_5^m(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_4(\varepsilon_1)$. Поэтому для любого $\varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$ существует такое $\beta_5^{m+1}(\varepsilon_1) \in (\beta_5^m(\varepsilon_1), \beta_4(\varepsilon_1))$, что $\varepsilon_2 = \beta_5^{m+1}(\varepsilon_1)$ – единственное решение уравнения $f^{m+2}(\varepsilon_1, \varepsilon) = 0$, а $\beta_5^{m+1}(\cdot) \in C^1$. По индукции получаем, что уравнение $f^k(\varepsilon_1, \varepsilon) = 0$ имеет относительно $\varepsilon_2 \in (-\delta, 0)$ единственное решение $\varepsilon_2 = \beta_5^k(\varepsilon_1)$ для любого $k = 0, 1, 2, \dots$

Покажем, что $\forall \varepsilon_1 \in (-\delta, 0) \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_5^k(\varepsilon_1) = \beta_4(\varepsilon_1)$. Предположим противное: при некотором $\varepsilon_1^* \in (-\delta, 0) \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_5^k(\varepsilon_1^*) = \varepsilon_2^* < \beta_4(\varepsilon_1^*)$. Тогда найдется такое число n_* , что при $\varepsilon^* = (\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*)$ будем иметь неравенства $f^{n_*-1}(\varepsilon_1^*, \varepsilon^*) < 0$, $f^{n_*}(\varepsilon_1^*, \varepsilon^*) > 0$, а $f^{n_*+1}(\varepsilon_1^*, \varepsilon^*)$ не определено. Если V – достаточно малая окрестность ε^* в $(-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)$, то $f^{n_*}(\varepsilon_1, \varepsilon) > 0$ для всех $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in V$, и $f^{n_*+1}(\varepsilon_1, \varepsilon)$ не определено. При некотором $n > n_*$ $\varepsilon^n := (\varepsilon_1^*, \beta_5^n(\varepsilon_1^*)) \in V$, а $f^k(\varepsilon_1^*, \varepsilon^n) < f^n(\varepsilon_1^*, \varepsilon^n) = 0$ для $k \leq n - 1$ и, в частности, для $k = n_*$. Получили противоречие. Следовательно, $\forall \varepsilon_1 \in (-\delta, 0) \beta_5^k(\varepsilon_1) \uparrow \beta_4(\varepsilon_1)$. Лемма 1 доказана.

Аналогично доказывается

Лемма 2. Для любых $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$ уравнение $f^{k+1}(0, \varepsilon) = \varepsilon_1$ имеет относительно $\varepsilon_2 \in (-\delta, 0)$ единственное решение $\varepsilon_2 = \beta_1^k(\varepsilon_1)$, при этом $\beta_1^k(\cdot) \in C^1$, $\beta_1^k(\varepsilon_1) \downarrow \beta_2(\varepsilon_1)$.

Определим множества B_i и E_j так как они описаны в формулировке теоремы. Пусть

$$l_\varepsilon^+ := T_1[u_{12}(\varepsilon), u_{12}(\varepsilon) + u_+(\varepsilon)], \quad l_\varepsilon^- := T_1[u_{12}(\varepsilon) - u_-(\varepsilon), u_{12}(\varepsilon)].$$

При $\varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)$ пусть $l_\varepsilon^c := T_1[u_{12}(\varepsilon) + \varepsilon_1, u_{12}(\varepsilon)]$.

Рассмотрим случай $\lambda < 1$. Из (22), (24), (26), (29) и (30) получаем следующие утверждения:

При $\varepsilon \in E_7 \cup B_1 \cup E_1$ ($\varepsilon \in B_5 \cup E_4$) $d(u, \varepsilon) < 0$ ($d(u, \varepsilon) > 0$) для всех $u \in [\varepsilon_1, 0]$, а дугу l_ε^c не пересекают периодические траектории поля \mathbf{v}_ε . Ввиду лемм 1 и 2 при $\varepsilon \in B_1$ ($\varepsilon \in B_5$) входящая (выходящая) сепаратриса развилки $O_1(\varepsilon)$ совпадает с выходящей (входящей) сепаратрисой развилки $O_2(\varepsilon)$.

При $\varepsilon \in B_2$ $d(\cdot, \varepsilon)$ имеет единственный, причем двукратный, нуль, а l_ε^c пересекает единственная периодическая траектория поля \mathbf{v}_ε – двойной цикл, к которому $\alpha(\omega)$ -предельна входящая (выходящая) сепаратриса развилки $O_1(\varepsilon)$ ($O_2(\varepsilon)$).

При $\varepsilon \in E_2$ $d(\cdot, \varepsilon)$ имеет два нуля $\varepsilon_1 < u_L < u_R < 0$, $d'_u(u_L, \varepsilon) > 0$, $d'_u(u_R, \varepsilon) < 0$, а l_ε^c пересекает две периодических траектории – неустойчивый и устойчивый гиперболические предельные циклы Γ_u и Γ_s ; входящая (выходящая) сепаратриса развилки $O_1(\varepsilon)$ ($O_2(\varepsilon)$) $\alpha(\omega)$ -предельна к Γ_u (Γ_s).

При $\varepsilon \in B_3$ $d(\cdot, \varepsilon)$ имеет два простых нуля $u_L = \varepsilon_1$, и $u_R \in (\varepsilon_1, 0)$, $d'_u(u_L, \varepsilon) > 0$, $d'_u(u_R, \varepsilon) < 0$, а пересекает две периодических траектории

– неустойчивую, проходящую через развилку $O_1(\varepsilon)$ и устойчивый гиперболический предельный цикл Γ_s ; выходящая сепаратриса развилки $O_2(\varepsilon)$ ω -предельна к Γ_s .

При $\varepsilon \in E_3$ $d(\cdot, \varepsilon)$ имеет единственный нуль $\varepsilon_1 < u_R < 0$, $d'_u(u_R, \varepsilon) < 0$, а l_ε^c пересекает единственная периодическая траектория – устойчивый гиперболический предельный цикл Γ_s , к которому ω -предельны выходящие сепаратрисы развилки $O_1(\varepsilon)$ и $O_2(\varepsilon)$.

При $\varepsilon \in B_4$ $d(\cdot, \varepsilon)$ имеет единственный нуль $u_R = 0$, $d'_u(u_R, \varepsilon) < 0$, а l_ε^c пересекает единственная периодическая траектория, она устойчива и проходит через точку $O_2(\varepsilon)$.

Через точку $T_1(u_{12}(\varepsilon) + u)$, $u \in (\varepsilon_1, u_+(\varepsilon))$ дуги l_ε^+ проходит периодическая траектория тогда и только тогда u нуль функции $\psi(\cdot, \varepsilon)$. Эта траектория содержит дугу $\tau_\varepsilon^2[0, \varphi_1(u, \varepsilon)]$.

Ввиду (6) и (7) можно считать

$$\psi(u_+(\varepsilon), \varepsilon) > 0 \text{ для всех } \varepsilon \in (-\delta, \delta)^2. \quad (32)$$

Пусть $\varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)$. Так как $\psi(0, \varepsilon) = -d(0, \varepsilon)$, то из (24) получаем $\text{sgn} \psi(0, \varepsilon) = \text{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_4(\varepsilon_1))$. Отсюда, из (32) и возрастания $\psi(\cdot, \varepsilon)$ следует, что $\psi(\cdot, \varepsilon)$ имеет нуль на $(\varepsilon_1, u_+(\varepsilon))$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon_2 < \beta_4(\varepsilon_1)$, то есть $\varepsilon \in E_4 \cup B_5$.

Пусть $\varepsilon \in [0, \delta) \times (-\delta, \delta)$. Так как $\psi(\cdot, \varepsilon)$ – возрастающая функция, то из (32) и равенства $\psi(\varepsilon_1, \varepsilon) = \varepsilon_2$ следует, что $\psi(\cdot, \varepsilon)$ имеет нуль на $(\varepsilon_1, u_+(\varepsilon))$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon_2 < 0$, то есть при $\varepsilon \in B_6 \cup E_5$. При $\varepsilon \in B_7$ через каждую точку дуги $T_1[u_{12}(\varepsilon), u_{12}(\varepsilon) + \varepsilon_1]$ проходит периодическая траектория.

Через точку $T_1(u_{12}(\varepsilon) + u)$, где $u \in (u_-(\varepsilon), \varepsilon_1)$, $\varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)$, проходит периодическая траектория, тогда и только тогда, когда u нуль функции $\varphi(\cdot, \varepsilon) - \varepsilon_2$. Эта траектория содержит дугу $\tau_\varepsilon^1[\psi_1(u, \varepsilon), \psi_1(\varepsilon_1, \varepsilon)]$ неустойчивой линейной особенности. Вследствие (6) можно считать, что $\varphi(u_-(\varepsilon), \varepsilon) < \varepsilon_2$ для всех $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$. Отсюда, из (22) и возрастания $\varphi(\cdot, \varepsilon)$ следует, что $\varphi(u, \varepsilon) - \varepsilon_2 = 0$ для $u \in (u_-(\varepsilon), \varepsilon_1)$, $\varepsilon \in [0, \delta) \times (-\delta, \delta)$, тогда и только тогда, когда $\varepsilon_2 < \beta_3(\varepsilon_1)$, то есть, если $\varepsilon \in B_4 \cup E_3 \cup B_5 \cup E_4$.

При $\varepsilon = 0$ Γ_0 – единственная периодическая траектория в U . Все положительные (отрицательные) полутраектории, начинающиеся в U , либо выходят из U , либо, начиная с некоторого момента времени, совпадают с Γ_0 .

Для случая $\lambda > 1$ доказательство аналогично. \square

References

- [1] A.A. Andronov, A.A. Vitt A.A., S.E. Khaikin, *Theory of oscillations*, Moscow, 1937.
- [2] N.V. Butenin, Ju.I. Neymark, N.A. Fufaev, *Introduction to the theory of nonlinear oscillations*, Nauka, Moscow, 1976.
- [3] N.N. Bautin, E.A. Leontovich, *Methods and techniques for qualitative research of dynamical systems on the plane*, Nauka, Moscow, 1976.

- [4] A.F. Filippov, *Differential equations with a discontinuous right-hand side*, Nauka, Moscow, 1985.
- [5] M. Han, W. Zhang, *On Hopf bifurcation in non-smooth planar systems*, J. Differential Equations, **248** (2010), 2399–2416.
- [6] S.J. Hogan, M.E. Homer, M.R. Jeffrey, R. Szalai, *Piecewise Smooth Dynamical Systems Theory: The Case of the Missing Boundary Equilibrium Bifurcations*, J. Nonlinear Sci., **26** (2016), 1161–1173.
- [7] D.J.W. Simpson, *A compendium of Hopf-like bifurcations in piecewise-smooth dynamical systems*, arXiv: 1804.1109v1 [math DS] 30 Apr 2018. 11 p.
- [8] V.Sh. Roitenberg, *On the generation of a strange attractor from a joining point of lines of discontinuity of a vector field*, The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. Natural-Mathematical and Technical Sciences, **4** (2016), 53–59.
- [9] V.Sh. Roitenberg, *On bifurcations in the neighborhood of a singular point of triple sewn focus type*, University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences, **2** (2017), 18–31.
- [10] Ju.A. Kuznetsov, S. Rinaldi, A. Granini, *One-parameter bifurcations in planar Filippov systems*, International Journal of Bifurcations and Chaos, **13**:8 (2003), 2157–2188.
- [11] M. Guardia, T.M. Seara, M.A. Teixeira, *Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems*, J. of Differential Equations, **250**:4 (2011), 1967–2023.
- [12] M. di Bernardo, Ch.J. Budd, A.R. Capneys, P. Kowalczyk, *Piecewise smooth dynamical systems*, Appl. Math. Sci., **163**, Springer-Verlag, London, 2008.
- [13] V.Sh. Roitenberg, *On bifurcations of separatrix loops of singular points on the line of discontinuity*, Yaroslavl: Yaroslavl Polytechnic Institute, 1987, 26 p. Dep. in VINITI, 22.04.1987, No. 2795-B87.
- [14] V.Sh. Roitenberg, *On bifurcations of a piecewise-smooth vector field in a neighborhood of a separatrix loop of a singular point on a discontinuity line*, Mathematics and mathematical education. Theory and Practice: inter-higher school coll. of scientific works, **5** (2006), 49–52, YaSTU Publ., Yaroslavl.
- [15] V.Sh. Roitenberg, *On the birth of limit cycles from a contour formed by separatrices of a saddle and a sewn saddle-node of a piecewise-smooth vector field*, Vestnik of Nekrasov Kostroma State University, **20**:2 (2014), 26–30.
- [16] V.Sh. Roitenberg, *On the separatrix loop bifurcations of two-dimensional piecewise-smooth dynamical system*, University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences, **1** (2020), 36–50.
- [17] V.Sh. Roitenberg, *On bifurcations of periodic trajectory "eight" of piecewise smooth vector field with symmetry*, University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences, **3** (2020), 98–113.
- [18] A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Maier, *Qualitative theory of second-order dynamic system*, Halsted Press and Israel Program for Scientific Translations, New York, 1973.

VLADIMIR SHLEIMOVICH ROITENBERG
 YAROSLAVL STATE UNIVERSITY,
 PR. MOSKOVSKIY, 88,
 150023, YAROSLAVL, RUSSIA
 Email address: vroitenberg@mail.ru