

## О НЕБОЛЬШИХ ГРАФАХ ШИЛЛА

ЦЭНЬЧЖУЙ ЦАЙ, А.А. МАХНЁВ , AND К.С. ЕФИМОВ 

**Abstract:** Koolen and Park found admissible intersection arrays of Shilla graphs with  $b \leq 3$ . I.N. Belousov, A.A. Makhnev, and Tsenzhu Cai listed admissible intersection arrays of Shilla graphs with  $b = 4$ . I.N. Belousov, A.A. Makhnev, and Haiyan Li listed admissible intersection arrays of Shilla graphs with  $b = 5$ . Mingzhu Chen, A.A. Makhnev, and I.N. Belousov listed intersection arrays of Shilla graphs with  $b = 6$ .

In this article, we study small Shilla graphs with  $b \leq 5$ .

**Keywords:** distance regular graph, Shilla graph, triple intersection numbers.

### 1 Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины  $u$  графа  $\Gamma$  через  $\Gamma_i(u)$  обозначим  $i$ -окрестность вершины  $u$ , то есть, подграф, индуцированный  $\Gamma$  на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии  $i$  от  $u$ . Положим  $[u] = \Gamma_1(u)$ ,  $u^\perp = \{u\} \cup [u]$ .

Пусть  $\Gamma$  – граф,  $u, w \in \Gamma$ . Тогда число вершин в  $[u] \cap [w]$  обозначается через  $\mu(u, w)$  (через  $\lambda(u, w)$ ), если  $u, w$  находятся на расстоянии 2 (смежны) в  $\Gamma$ . Далее, индуцированный  $[u] \cap [w]$  подграф называется  $\mu$ -подграфом ( $\lambda$ -подграфом). Пусть  $\Gamma$  – граф диаметра  $d$ ,  $i \in \{1, 2, 3, \dots, d\}$ .

---

Работа поддержана Естественным научным фондом Китая (проект 12171126) и грантом Лаборатории инженерного моделирования и статистических вычислений провинции Хайнань.

Поступила 1 января 2024 г., опубликована 31 декабря 2024 г.

Граф  $\Gamma_i$  имеет то же самое множество вершин, и вершины  $u, w$  смежны в  $\Gamma_i$ , если  $d_\Gamma(u, w) = i$ .

Если вершины  $u, w$  находятся на расстоянии  $i$  в  $\Gamma$ , то через  $b_i(u, w)$  (через  $c_i(u, w)$ ) обозначим число вершин в пересечении  $\Gamma_{i+1}(u)$  ( $\Gamma_{i-1}(u)$ ) с  $[w]$ . Граф  $\Gamma$  диаметра  $d$  называется дистанционно регулярным с массивом пересечений  $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$ , если значения  $b_i(u, w)$  и  $c_i(u, w)$  не зависят от выбора вершин  $u, w$  на расстоянии  $i$  в  $\Gamma$  для любого  $i = 0, \dots, d$ . Положим  $a_i = k - b_i - c_i$ . Заметим, что для дистанционно регулярного графа  $b_0$  – это степень графа,  $c_1 = 1$ .

Далее, через  $p_{ij}^l(x, y)$  обозначим число вершин в подграфе  $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$  для вершин  $x, y$ , находящихся на расстоянии  $l$  в графе  $\Gamma$ . В дистанционно регулярном графе числа  $p_{ij}^l(x, y)$  не зависят от выбора вершин  $x, y$ , обозначаются  $p_{ij}^l$  и называются числами пересечений графа  $\Gamma$  (см. [1]).

Пусть  $\Gamma$  – дистанционно регулярный граф диаметра  $d \geq 3$  и  $\theta_1$  – второе собственное значение графа. Тогда  $\theta_1$  не меньше  $\min \left\{ \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}, a_3 \right\}$ ,

причем  $\theta_1 \geq \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$ , если  $d \geq 4$ . Кулен и Пак назвали графом Шилла дистанционно регулярный граф диаметра 3 с  $\theta_1 = a_3$ . В этом случае  $\theta_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4k}}{2}$  и  $a = a_3$  делит  $k$  [2, теорема 7]. Положим  $b = b(\Gamma) = k/a$ .

Кулен и Пак нашли допустимые массивы пересечений графов Шилла с  $b \leq 3$ . И.Н. Белоусов, А.А. Махнев и Цэньчжуй Цай перечислили допустимые массивы пересечений графов Шилла с  $b = 4$  [3]. И.Н. Белоусов, А.А. Махнев и Хайян Ли перечислили допустимые массивы пересечений графов Шилла с  $b = 5$  [4]. Минчжу Чень, А.А. Махнев, И.Н. Белоусов перечислили массивы пересечений графов Шилла с  $b = 6$  [5].

В работе изучаются небольшие графы Шилла с  $b \leq 5$ . Ввиду [2] дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{21, 16, 8; 1, 4, 14\}$  не существует ( $b = 3$ ). Дистанционно регулярный графы с массивами пересечений  $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$ ,  $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$  не существуют [6], [7].

**Теорема 1.** *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{20, 18, 6; 1, 1, 15\}$  не существует.*

**Теорема 2.** *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{25, 24, 3; 1, 3, 20\}$  не существует.*

**Теорема 3.** *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{25, 24, 9; 1, 1, 20\}$  не существует.*

## 2 Тройные числа пересечений

Пусть  $\Gamma$  – дистанционно регулярный граф диаметра  $d$ . Если  $u_1, u_2, u_3$  – вершины графа  $\Gamma$ ,  $r_1, r_2, r_3$  – неотрицательные целые числа, не большие  $d$ , то  $\left\{ \frac{u_1 u_2 u_3}{r_1 r_2 r_3} \right\}$  – множество вершин  $w \in \Gamma$  таких, что  $d(w, u_i) = r_i$ ,

$\begin{bmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{bmatrix} = \left| \left\{ \begin{matrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{matrix} \right\} \right|$ . Числа  $\begin{bmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{bmatrix}$  называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин  $u_1, u_2, u_3$  вместо  $\begin{bmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{bmatrix}$  будем писать  $[r_1 r_2 r_3]$ . К сожалению, для чисел  $[r_1 r_2 r_3]$  нет общих формул. Однако, в [6] предложен метод вычисления некоторых чисел  $[r_1 r_2 r_3]$ .

Пусть  $u, v, w$  — вершины графа  $\Gamma$ ,  $W = d(u, v), U = d(v, w), V = d(u, w)$ . Так как имеется точно одна вершина  $x = u$  такая, что  $d(x, u) = 0$ , то число  $[0jh]$  равно 0 или 1. Отсюда  $[0jh] = \delta_{jW} \delta_{hV}$ . Аналогично,  $[i0h] = \delta_{iW} \delta_{hU}$  и  $[ij0] = \delta_{iU} \delta_{jV}$ .

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из  $\{u, v, w\}$ , и сосчитав число вершин, находящихся на всех возможных расстояниях от третьей, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^d [ljh] &= p_{jh}^U - [0jh], \\ \sum_{l=1}^d [ilh] &= p_{ih}^V - [i0h], \quad (+) \\ \sum_{l=1}^d [ijl] &= p_{ij}^W - [ij0]. \end{aligned}$$

При этом некоторые тройки исчезают. При  $|i - j| > W$  или  $i + j < W$  имеем  $p_{ij}^W = 0$ , поэтому  $[ijh] = 0$  для всех  $h \in \{0, \dots, d\}$ .

Положим  $S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^d Q_{ri} Q_{sj} Q_{th} \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$ . Если параметр Крейна на  $q_{ij}^h = 0$ , то  $S_{ijh}(u, v, w) = 0$ .

Зафиксируем вершины  $u, v, w$  дистанционно регулярного графа  $\Gamma$  и положим  $\{ijh\} = \left\{ \begin{matrix} uvw \\ ijh \end{matrix} \right\}$ ,  $[ijh] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$ ,  $[ijh]' = \begin{bmatrix} uvw \\ ihj \end{bmatrix}$ ,  $[ijh]^* = \begin{bmatrix} uvw \\ jih \end{bmatrix}$  и  $[ijh]^\sim = \begin{bmatrix} uvw \\ hji \end{bmatrix}$ . Вычисление параметров  $[ijh]'$ ,  $[ijh]^*$  и  $[ijh]^\sim$  (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

### 3 Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{20, 18, 6; 1, 1, 15\}$

Пусть  $\Gamma$  является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений  $\{20, 18, 6; 1, 1, 15\}$ . Тогда  $\Gamma$  имеет  $1 + 20 + 360 + 144 = 525$  вершин, спектр  $20^1, 5^{210}, -1^{125}, -5^{189}$  и дуальную матрицу  $Q$  (см [1]) собственных значений

$$\begin{pmatrix} 1 & 210 & 125 & 189 \\ 1 & \frac{105}{2} & -\frac{25}{4} & -\frac{189}{4} \\ 1 & 0 & -\frac{25}{4} & \frac{21}{4} \\ 1 & -\frac{35}{4} & \frac{125}{8} & -\frac{63}{8} \end{pmatrix}.$$

**Лемма 1.** Числа пересечений равны

$$\begin{aligned} p_{11}^1 &= 1, p_{21}^1 = 18, p_{22}^1 = 234, p_{23}^1 = 108, p_{33}^1 = 36; \\ p_{11}^2 &= 1, p_{12}^2 = 13, p_{13}^2 = 6, p_{22}^2 = 244, p_{23}^2 = 102, p_{33}^2 = 36; \\ p_{12}^3 &= 15, p_{13}^3 = 5, p_{22}^3 = 255, p_{23}^3 = 90, p_{33}^3 = 48. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Прямые вычисления.

По лемме 1  $\Gamma_3$  – сильно регулярный граф с параметрами  $(525, 144, 48, 36)$ .

Зафиксируем вершины  $u, v, w$  графа  $\Gamma$  и положим  $\{ijh\} = \begin{Bmatrix} uvw \\ ijh \end{Bmatrix}$ ,  
 $[ijh] = \begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$ .

Пусть  $\Delta = \Gamma_3(u)$ ,  $\Lambda = \Delta_2$ . Тогда  $\Lambda$  – регулярный граф степени  $p_{32}^2 = 90$  на  $k_3 = 144$  вершинах.

**Лемма 2.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = 3, d(v, w) = 1$ . Тогда тройные числа пересечений равны:

$$\begin{aligned} [122] &= r_{10} + r_{12} - 93, [123] = [132] = -r_{10} - r_{12} + 108, [133] = r_{10} + r_{12} - 103; \\ [211] &= -r_{11} + 15, [212] = [221] = r_{11}, [222] = -r_{10} - r_{11} + 255, [223] = [232] = r_{10}, [233] = -r_{10} + 90; \\ [311] &= r_{11} - 14, [312] = [321] = -r_{11} + 18, [322] = r_{11} - r_{12} + 72, \\ [323] &= [332] = r_{12}, [333] = -r_{12} + 48, \\ &\text{где } 55 \leq r_{10} \leq 90, 14 \leq r_{11} \leq 15, 13 \leq r_{12} \leq 48, 103 \leq r_{10} + r_{12} \leq 108. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Упрощения формул (+).

По лемме 2 имеем  $14 \leq [322] = r_{11} - r_{12} + 72 \leq 149$ . Заметим, что  $\{v, w\} \cup \Lambda(v) \cup \Lambda(w)$  содержит  $182 - [322]$  вершин, поэтому  $38 \leq [322] \leq 90$ .

**Лемма 3.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 3$ . Тогда

$$\begin{aligned} [122] &= r_{32} + r_{33} - r_{34} + r_{35} - 75, [123] = [132] = -r_{32} - r_{33} + r_{34} - r_{35} + 90, \\ [133] &= r_{32} + r_{33} - r_{34} + r_{35} - 85, \\ [212] &= -r_{35} + 15, [213] = r_{35}, [221] = -r_{34} + 15, [222] = -r_{32} + r_{34} + 240, \\ [223] &= r_{32}, [231] = r_{34}, [232] = r_{32} - r_{34} + r_{35}, [233] = -r_{32} - r_{35} + 90; \\ [312] &= r_{35}, [313] = -r_{35} + 5, [321] = r_{34}, [322] = -r_{33} - r_{35} + 90, \\ [323] &= r_{33} - r_{34} + r_{35}, [331] = -r_{34} + 5, [332] = r_{33}, [333] = -r_{33} + r_{34} + 42, \\ &0 \leq r_{35} \leq 5, 0 \leq r_{34} \leq 5, 38 \leq r_{32} \leq 90, 0 \leq r_{33} \leq 47 \\ &\text{где } 38 \leq r_{32} \leq 90, 0 \leq r_{33} \leq 47, 0 \leq r_{34}, r_{35} \leq 5, r_{32} + r_{35} \leq 90. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Упрощения формул (+).

По лемме 3 имеем  $38 \leq [322] = -r_{33} - r_{35} + 90 \leq 90$ .

Напомним, что  $p_{13}^3 = 5, p_{23}^3 = 90, p_{33}^3 = 48$ . Пусть  $v, w$  – вершины из  $\Lambda$ . Тогда число  $d$  ребер между  $\Lambda(w)$  и  $\Lambda - (\{w\} \cup \Lambda(w))$  удовлетворяет неравенствам  $1554 = 5 \cdot 38 + 48 \cdot 38 \leq d \leq 5 \cdot 90 + 48 \cdot 90 = 4770$ .

С другой стороны,  $d = 90(89 - \lambda)$ , где  $\lambda$  – среднее значение параметра  $\lambda(\Lambda)$ . Поэтому  $259/15 \leq 89 - \lambda \leq 53$  и  $36 \leq \lambda \leq 72 - 4/15$ .

**Лемма 4.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = 3$ ,  $d(v, w) = 2$ . Тогда

$$[122] = r_{28} - r_{29} - r_{30} - r_{31} + 310, [123] = [132] = -r_{28} + r_{29} + r_{30} + r_{31} - 195,$$

$$[133] = r_{28} - r_{29} - r_{30} - r_{31} + 200,$$

$$[211] = -r_{27} - r_{31} + 15, [212] = r_{31}, [213] = r_{27}, [221] = r_{27} - r_{28} + r_{31},$$

$$[222] = r_{29}, [223] = -r_{27} + r_{28} - r_{29} - r_{31} + 255, [231] = r_{28}, [232] =$$

$$-r_{29} - r_{31} + 255, [233] = -r_{28} + r_{29} + r_{31} - 165;$$

$$[311] = r_{27} - r_{31} - 14, [312] = -r_{31} + 13, [313] = -r_{27} + 6, [321] =$$

$$-r_{27} + r_{28} - r_{31} + 13, [322] = -r_{28} + r_{30} + r_{31} + 34, [323] = r_{27} - r_{30} + 42,$$

$$[331] = -r_{28} + 6, [332] = r_{28} - r_{30} + 42, [333] = r_{30},$$

где  $1 \leq r_{27}, r_{28} \leq 6$ ,  $153 \leq r_{29} \leq 198$ ,  $0 \leq r_{30} \leq 35$ ,  $8 \leq r_{31} \leq 13$ ,  $r_{27} + r_{31} \leq 14$ .

**Доказательство.** Упрощения формул (+).

Симметризация  $[222] = r_{29} = r'_{29}$ ,  $[333] = r_{30} = r'_{30}$ .

Далее,  $[213] = r_{27} = [231]' = r'_{28}$ ,  $[212]' = r'_{31} = [221] = r_{27} - r_{28} + r_{31}$ ,  
поэтому  $r'_{31} + r_{28} = r_{27} + r_{31}$ ,  $[312]' = -r'_{31} + 13 = [321] = -r_{27} + r_{28} - r_{31} + 13$   
и  $r'_{31} - r_{27} + r_{28} - r_{31} + 13$

Аналогично,  $[223]' = r'_{28} = [232] = r_{29} - r_{31} + 15$ , поэтому  $r'_{28} - r_{29} + r_{31} = 15$ .

По лемме 4 имеем  $7 \leq [322] = r_{28} - r_{29} - r_{30} + 14 \leq 29$ .

Как и выше,  $12 \leq [322]$ .

Пусть  $d(u, v) = 3$ .

Подсчитаем число  $f_1$  пар вершин  $(s, t)$  на расстоянии 1, где  $s \in \left\{ \begin{smallmatrix} uv \\ 31 \end{smallmatrix} \right\}$   
и  $t \in \left\{ \begin{smallmatrix} uv \\ 32 \end{smallmatrix} \right\}$ . С одной стороны, по лемме 2 имеем  $[321] = -r_{11} + 18$ , где  
 $14 \leq r_{11} \leq 15$ , поэтому  $15 = 5 \cdot 3 \leq f_1 \leq 5 \cdot 4 = 20$ . С другой стороны, по  
лемме 4 имеем  $[311] = r_{27} - r_{31} - 14$ ,  $15 \leq f_1 = -\sum_i (-r_{27}^i + r_{31}^i) - 1260 \leq 20$ ,  
 $1240 \leq \sum_i (-r_{27}^i + r_{31}^i) \leq 1245$  и  $13 + 7/9 \leq \sum_i (-r_{27}^i + r_{31}^i)/90 \leq 13 + 5/6$ .

Так как  $1 \leq r_{27}, r_{28} \leq 6$ ,  $8 \leq r_{31} \leq 13$ , то  $-r_{27} + r_{31} \leq 12$ , противоречие.

Теорема 1 доказана.

#### 4 Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{25, 24, 3; 1, 3, 20\}$

В этом разделе  $\Gamma$  является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений  $\{25, 24, 3; 1, 3, 20\}$ . Тогда  $\Gamma$  имеет  $1 + 25 + 200 + 30 = 256$  вершин, спектр  $25^1, 5^{80}, 1^{100}, -7^{75}$  и дуальную матрицу  $Q$  (см [1]) собственных значений

$$\begin{pmatrix} 1 & 80 & 100 & 75 \\ 1 & 16 & 4 & -21 \\ 1 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & -16 & 20 & -5 \end{pmatrix}.$$

**Лемма 5.** Числа пересечений равны

$$p_{11}^1 = 0, p_{21}^1 = 24, p_{22}^1 = 152, p_{23}^1 = 24, p_{33}^1 = 6;$$

$$p_{11}^2 = 3, p_{12}^2 = 19, p_{13}^2 = 3, p_{22}^2 = 156, p_{23}^2 = 24, p_{33}^2 = 3;$$

$$p_{12}^3 = 20, p_{13}^3 = 5, p_{22}^3 = 160, p_{23}^3 = 20, p_{33}^3 = 4.$$

**Доказательство.** Прямые вычисления.

Зафиксируем вершины  $u, v, w$  графа  $\Gamma$  и положим  $\{ijh\} = \left\{ \begin{matrix} uvw \\ ijh \end{matrix} \right\}$ ,  
 $[ijh] = \left[ \begin{matrix} uvw \\ ijh \end{matrix} \right]$ .

Пусть  $\Delta = \Gamma_3(u)$ ,  $\Lambda = \Delta_2$ . Тогда  $\Lambda$  – регулярный граф степени  $p_{23}^3 = 20$  на  $k_3 = 30$  вершинах.

**Лемма 6.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = 3, d(v, w) = 1$ . Тогда тройные числа пересечений равны:

$$\begin{aligned} [122] &= -r_6 + 20, [123] = [132] = r_6, [133] = -r_6 + 5; \\ [212] &= [221] = 20, [222] = r_6 - r_7 + 132, [223] = [232] = -r_6 + r_7 + 8, \\ [233] &= r_6 - r_7 + 12; \\ [312] &= [321] = 4, [322] = r_7, [323] = [332] = -r_7 + 16, [333] = r_7 - 12, \end{aligned}$$

где  $0 \leq r_6 \leq 5, 12 \leq r_7 \leq 16$ .

**Доказательство.** Упрощения формул (+).

По лемме 6 имеем  $12 \leq [322] = r_7 \leq 16$ .

**Лемма 7.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 3$ . Тогда тройные числа пересечений равны:

$$\begin{aligned} [122] &= -r_{27} + r_{28} + r_{30}, [123] = [132] = r_{27} - r_{28} - r_{30} + 20, [133] = \\ &= -r_{27} + r_{28} + r_{30} - 15; \\ [212] &= r_{27} - r_{29} - r_{30} + 160, [213] = -r_{27} + r_{29} + r_{30} - 140, [221] = r_{30}, \\ [222] &= r_{29}, [223] = -r_{29} - r_{30} + 160, [231] = -r_{30} + 20, [232] = -r_{27} + r_{30}, \\ [233] &= r_{27}; \\ [312] &= -r_{27} + r_{29} + r_{30} - 140, [313] = r_{27} - r_{29} - r_{30} + 145, [321] = -r_{30} + 20, \\ [322] &= r_{27} - r_{28} - r_{29} - r_{30} + 160, [323] = -r_{27} + r_{28} + r_{29} + 2r_{30} - 160, \\ [331] &= r_{30} - 15, [332] = r_{28}, [333] = -r_{28} - r_{30} + 18, \end{aligned}$$

где  $0 \leq r_{27}, r_{28} \leq 3, 124 \leq r_{29} \leq 133, 15 \leq r_{30} \leq 18$ .

**Доказательство.** Упрощения формул (+).

Симметризация.  $[221] = r_{30} = r_{30}^*$ ,  $[222] = r_{29} = r_{29}' = r_{29}^* = r_{29}^{\sim}$ ,  
 $[233] = r_{27} = r_{27}'$ ,  $[332] = r_{28} = r_{28}^*$ .

Далее,  $[232] = -r_{27} + r_{30} = -r_{27}^{\sim} + r_{30}^{\sim}$ ,  $[333] = -r_{28} - r_{30} + 18$ , поэтому  
 $r_{28} + r_{30} = r_{28}' + r_{30}' = r_{28}^* + r_{30}^* = r_{28}^{\sim} + r_{30}^{\sim}$ ,  $[233] = r_{27} = [332]^{\sim} = r_{28}^{\sim}$ .

Аналогично,  $[122]^* = -r_{27}^* + r_{28}^* + r_{30}^* = [212] = r_{27} - r_{29} - r_{30} + 160$ ,  
 поэтому  $-r_{27} - r_{27}^* + r_{28} + r_{29} + 2r_{30} = 160$ .

По лемме 7 имеем  $6 \leq [322] = r_{27} - r_{28} - r_{29} - r_{30} + 160 \leq 24$ . Заметим,  
 что  $\{v, w\} \cup \Lambda(v) \cup \Lambda(w)$  содержит  $42 - [322]$  вершин, поэтому  $12 \leq [322] \leq 20$ .

Напомним, что  $p_{13}^3 = 5, p_{23}^3 = 20, p_{33}^3 = 4$ . Пусть  $v, w$  – вершины из  $\Lambda$ . Тогда число  $d$  ребер между  $\Lambda(w)$  и  $\Lambda - (\{w\} \cup \Lambda(w))$  удовлетворяет неравенствам  $108 = 5 \cdot 12 + 4 \cdot 12 \leq d \leq 5 \cdot 16 + 4 \cdot 20 = 160$ .

С другой стороны,  $d = 20(19 - \lambda)$ , где  $\lambda$  – среднее значение параметра  $\lambda(\Lambda)$ . Поэтому  $5.4 \leq 19 - \lambda \leq 8$  и  $11 \leq \lambda \leq 13.6$ .

**Лемма 8.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = 3, d(v, w) = 2$ . Тогда тройные числа пересечений равны:

$$\begin{aligned} [122] &= -r_{23} + 20, [123] = [132] = r_{23}, [133] = -r_{23} + 5; \\ [211] &= -r_{24} + r_{26} + 17, [212] = r_{24}, [213] = -r_{26} + 3, [221] = -r_{22} + 19, \\ [222] &= r_{23} - r_{24} + r_{25} + 136, [223] = r_{22} - r_{23} + r_{24} - r_{25} + 5, [231] = r_{22} + \\ &r_{24} - r_{26} - 16, [232] = -r_{23} - r_{25} + 24, [233] = -r_{22} + r_{23} - r_{24} + r_{25} - r_{26} + 12; \\ [311] &= r_{24} - r_{26} - 14, [312] = -r_{24} + 19, [313] = r_{26}, [321] = r_{22}, \\ [322] &= r_{24} - r_{25}, [323] = -r_{22} - r_{24} + r_{25} + 19, [331] = -r_{22} - r_{24} + r_{26} + 19, \\ [332] &= r_{25}, [333] = r_{22} + r_{24} - r_{25} - r_{26} - 15, \\ &\text{где } 0 \leq r_{22} \leq 5, 3 \leq r_{23} \leq 5, 14 \leq r_{24} \leq 19, 0 \leq r_{25} \leq 4, 0 \leq r_{26} \leq 3. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Упрощения формул (+).

Симметризация  $[122] = -r_{23} + 20$  влечет  $r_{23} = r'_{23}$ . Из равенств  $[311] = r_{24} - r_{26} - 14, [322] = r_{24} - r_{25}$  следует, что  $r_{24} - r_{26} = r'_{24} - r'_{26}, r_{24} - r_{25} = r'_{24} - r'_{25}$ .

Далее,  $[333] = r_{22} + r_{24} - r_{25} - r_{26} - 15$  влечет  $r_{22} - r_{25} = r'_{22} - r'_{25}, [323] = -r_{22} - r_{24} + r_{25} + 19 = [332]' = r'_{25}$ , поэтому  $r_{22} + r_{24} - r_{25} + r'_{25} = 19$ .

По лемме 8 имеем  $10 \leq [322] = r_{24} - r_{25} \leq 19$ .

Пусть  $d(u, v) = 3$ .

Подсчитаем число  $f_1$  пар вершин  $(s, t)$  на расстоянии 1, где  $s \in \left\{ \begin{smallmatrix} uv \\ 31 \end{smallmatrix} \right\}$  и  $t \in \left\{ \begin{smallmatrix} uv \\ 32 \end{smallmatrix} \right\}$ . С одной стороны, по лемме 6 имеем  $[321] = 4, f_1 = 5 \cdot 4 = 20$ . С другой стороны, по лемме 8 имеем  $[311] = r_{24} - r_{26} - 14, \sum_i (r_{24}^i - r_{26}^i) - 280 = 20$  и  $\sum_i (r_{24}^i - r_{26}^i)/20 = 15$ .

Отсюда  $15 \leq r_{24} \leq 19$

Подсчитаем число  $f_2$  пар вершин  $(s, t)$  на расстоянии 2, где  $s \in \left\{ \begin{smallmatrix} uv \\ 31 \end{smallmatrix} \right\}$  и  $t \in \left\{ \begin{smallmatrix} uv \\ 32 \end{smallmatrix} \right\}$ . С одной стороны, по лемме 6 имеем  $12 \leq [322] \leq 16$ , поэтому  $60 = 5 \cdot 12 \leq f_2 = 5 \cdot 16 = 80$ . С другой стороны, по лемме 8 имеем  $[312] = -r_{25} + 6, 60 \leq f_2 = -\sum_i r_{25}^i + 120 \leq 80, 40 \leq \sum_i r_{25}^i \leq 60$ , и  $2 \leq \sum_i r_{25}^i/20 \leq 3$ .

Подсчитаем число  $f_3$  пар вершин  $(s, t)$  на расстоянии 3, где  $s \in \left\{ \begin{smallmatrix} uv \\ 31 \end{smallmatrix} \right\}$  и  $t \in \left\{ \begin{smallmatrix} uv \\ 32 \end{smallmatrix} \right\}$ . С одной стороны, по лемме 6 имеем  $[323] = -r_7 + 16$ , где  $12 \leq r_7 \leq 16$ , поэтому  $0 \leq f_3 = 5 \cdot 4 = 20$ . С другой стороны, по лемме 8 имеем  $[313] = -r_{23} + r_{25}, 0 \leq f_3 = \sum_i (-r_{23}^i + r_{25}^i) \leq 20$ , и  $0 \leq \sum_i (-r_{23}^i + r_{25}^i)/20 \leq 1$ .

Так как  $2 \leq \sum_i r_{25}^i/20 \leq 3, 3 \leq r_{23} \leq 5$ , то  $\sum_i -r_{23}^i/20 = r_{25} = 3$ . Проведем обратные вычисления:  $\sum_i r_{25}^i = 60, f_2 = -\sum_i r_{25}^i + 120 = 60$  и в лемме 6 имеем  $[322] = 12$ . Аналогично,  $\sum_i (-r_{23}^i + r_{25}^i)/20 = 0, f_3 = \sum_i (-r_{23}^i + r_{25}^i) = 0$  и  $r_7 = 16$ . Противоречие с тем, что  $12 \leq [322] = r_7$ .

Теорема 2 доказана.

## 5 Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{25, 24, 9; 1, 1, 20\}$

В этом разделе  $\Gamma$  является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений  $\{25, 24, 9; 1, 1, 20\}$ . Тогда  $\Gamma$

имеет  $1 + 25 + 600 + 270 = 896$  вершин, спектр  $25^1, 5^{420}, -3^{300}, -7^{175}$  и дуальную матрицу  $Q$  (см [1]) собственных значений

$$\begin{pmatrix} 1 & 420 & 300 & 175 \\ 1 & 84 & -36 & -49 \\ 1 & 0 & -8 & 7 \\ 1 & -\frac{28}{3} & 20 & -\frac{35}{3} \end{pmatrix}.$$

**Лемма 9.** Числа пересечений равны

$$\begin{aligned} p_{11}^1 &= 0, p_{21}^1 = 24, p_{22}^1 = 360, p_{23}^1 = 216, p_{33}^1 = 54; \\ p_{11}^2 &= 1, p_{12}^2 = 15, p_{13}^2 = 9, p_{22}^2 = 404, p_{23}^2 = 180, p_{33}^2 = 81; \\ p_{12}^3 &= 20, p_{13}^3 = 5, p_{22}^3 = 400, p_{23}^3 = 180, p_{33}^3 = 84. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Прямые вычисления.

Зафиксируем вершины  $u, v, w$  графа  $\Gamma$  и положим  $\{ijh\} = \left\{ \begin{matrix} uvw \\ ijh \end{matrix} \right\}$ ,  $[ijh] = \left[ \begin{matrix} uvw \\ ijh \end{matrix} \right]$ .

Пусть  $\Delta = \Gamma_3(u)$ ,  $\Lambda = \Delta_2$ . Тогда  $\Lambda$  – регулярный граф степени  $p_{23}^3 = 180$  на  $k_3 = 270$  вершинах.

**Лемма 10.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = 3, d(v, w) = 1$ . Тогда тройные числа пересечений равны:

$$\begin{aligned} [122] &= r_6, [123] = [132] = -r_6 + 20, [133] = r_6 - 15; \\ [212] &= [221] = 20, [222] = r_7, [223] = [232] = -r_7 + 380, [233] = r_7 - 200; \\ [312] &= [321] = 4, [322] = -r_6 - r_7 + 360, [323] = [332] = r_6 + r_7 - 184, \\ [333] &= -r_6 - r_7 + 268, \\ &\text{где } 15 \leq r_6 \leq 20, 200 \leq r_7 \leq 253, 215 \leq r_6 + r_7 \leq 268. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Упрощения формул (+).

По лемме 10 имеем  $92 \leq [322] = -r_6 - r_7 + 360 \leq 145$ .

**Лемма 11.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 3$ . Тогда тройные числа пересечений равны:

$$\begin{aligned} [122] &= -r_{27} + r_{28} - r_{29} + r_{30} - 160, [123] = [132] = -r_{27} - r_{28} + r_{29} - \\ &r_{30} + 180, [133] = r_{27} + r_{28} - r_{29} + r_{30} - 175; \\ [212] &= -r_{30} + 20, [213] = r_{30}, [221] = -r_{29} + 20, [222] = -r_{27} + r_{29} + 380, \\ [223] &= r_{27}, [231] = r_{29}, [232] = r_{27} - r_{29} + r_{30}, [233] = -r_{27} - r_{30} + 180; \\ [312] &= r_{30}, [313] = -r_{30} + 5, [321] = r_{30}, [322] = -r_{28} - r_{30} + 180, \\ [323] &= r_{28} - r_{29} + r_{30}, [331] = -r_{29} + 5, [332] = r_{28}, [333] = -r_{28} + r_{29} + 78, \\ &\text{где } 92 \leq r_{27} \leq 180, 0 \leq r_{28} \leq 83, 0 \leq r_{29}, r_{30} \leq 5, -r_{28} + r_{29} + 175 \leq \\ &r_{27} + r_{30} \leq -r_{28} + r_{29} + 180. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Упрощения формул (+).

По лемме 11 имеем  $92 \leq [322] = -r_{28} - r_{30} + 180 \leq 180$ .

Напомним, что  $p_{13}^3 = 5, p_{23}^3 = 180, p_{33}^3 = 84$ . Пусть  $v, w$  – вершины из  $\Lambda$ . Тогда число  $d$  ребер между  $\Lambda(w)$  и  $\Lambda - (\{w\} \cup \Lambda(w))$  удовлетворяет неравенствам  $5 \cdot 92 + 84 \cdot 92 \leq d \leq 5 \cdot 145 + 84 \cdot 180 =$

С другой стороны,  $d = 180(179 - \lambda)$ , где  $\lambda$  — среднее значение параметра  $\lambda(\Lambda)$ . Поэтому  $74/15 \leq 179 - \lambda \leq 3169/36$  и  $179 - 3169/36 \leq \lambda \leq 179 - 74/15$ .

**Лемма 12.** Пусть  $d(u, v) = d(u, w) = 3, d(v, w) = 2$ . Тогда тройные числа пересечений равны:

$$\begin{aligned} [122] &= r_{22} + r_{23} - r_{24} - r_{26} + 300, [123] = [132] = -r_{22} - r_{23} + r_{24} + r_{26} - 280, \\ [133] &= r_{22} + r_{23} - r_{24} - r_{26} + 285; \\ [211] &= -r_{23} - r_{25} + 20, [212] = r_{25}, [213] = r_{23}, [221] = -r_{22} + 15, \\ [222] &= r_{26}, [223] = r_{22} - r_{26} + 385, [231] = r_{22} + r_{23} + r_{25} - 15, [232] = \\ &= -r_{25} - r_{26} + 400, [233] = -r_{22} - r_{23} + r_{26} - 205; \\ [311] &= r_{23} + r_{25} - 19, [312] = -r_{25} + 15, [313] = -r_{23} + 9, [321] = r_{22}, \\ [322] &= -r_{22} - r_{23} + r_{24} + 104, [323] = r_{23} - r_{24} + 75, [331] = -r_{22} - r_{23} - \\ &= r_{25} + 24, [332] = r_{22} + r_{23} - r_{24} + r_{25} + 60, [333] = r_{24}, \end{aligned}$$

где  $0 \leq r_{22} \leq 5, 4 \leq r_{23} \leq 9, 0 \leq r_{24} \leq 80, 10 \leq r_{25} \leq 15, 209 \leq r_{26} \leq 299, 19 \leq r_{23} + r_{25} \leq 20$ .

**Доказательство.** Упрощения формул (+).

Симметризация  $[222] = r_{26} = r'_{26}, [333] = r_{24} = r'_{24}, [212] = r_{25} = [221]' = -r'_{22} + 15$ , поэтому  $r_{25} + r'_{22} = 15$ .

По лемме 12 имеем  $90 \leq [322] = -r_{22} - r_{23} + r_{24} + 104 \leq 179$ .

Пусть  $d(u, v) = 3$ .

Подсчитаем число  $f_1$  пар вершин  $(s, t)$  на расстоянии 1, где  $s \in \left\{ \begin{smallmatrix} uv \\ 31 \end{smallmatrix} \right\}$  и  $t \in \left\{ \begin{smallmatrix} uv \\ 32 \end{smallmatrix} \right\}$ . С одной стороны, по лемме 10 имеем  $[321] = 4, f_1 = 5 \cdot 4 = 20$ . С другой стороны, по лемме 12 имеем  $[311] = r_{23} + r_{25} - 19, \sum_i (r_{23}^i + r_{25}^i) - 20 \cdot 171 = 20, \sum_i (r_{23}^i + r_{25}^i) = 20 \cdot 172 = 3440$  и  $\sum_i (r_{23}^i + r_{25}^i)/180 = 172/9$ .

Подсчитаем число  $f_2$  пар вершин  $(s, t)$  на расстоянии 2, где  $s \in \left\{ \begin{smallmatrix} uv \\ 31 \end{smallmatrix} \right\}$  и  $t \in \left\{ \begin{smallmatrix} uv \\ 32 \end{smallmatrix} \right\}$ . С одной стороны, по лемме 10 имеем  $92 \leq [322] \leq 145$ , поэтому  $460 = 5 \cdot 92 \leq f_2 = 5 \cdot 145 = 725$ . С другой стороны, по лемме 12 имеем  $[312] = -r_{25} + 15, 460 \leq f_2 = -\sum_i r_{25}^i + 2700 \leq 725, 1975 \leq \sum_i r_{25}^i \leq 2240$  и  $2 \leq \sum_i r_{25}^i/180 \leq 3$ .

Противоречие с тем, что  $10 \leq r_{25} \leq 15$ .

Теорема 3 доказана.

## References

- [1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.
- [2] J.H. Koolen, J. Park, *Shilla distance-regular graphs*, Europ. J. Comb., **31**:8 (2010), 2046–2073
- [3] I.N. Belousov, A.A. Makhnev, Jinzhuai Cai, *Some Shilla graphs with  $b = 4$  do not exist*, Vestnik Gomel University, **129**:6 (2021), 111–115.
- [4] I.N. Belousov, A.A. Makhnev, Haiyan Li, *Some Shilla graphs with  $b = 5$  do not exist*, Vestnik Perm University, **57** (2022), 40–45.
- [5] I.N. Belousov, M.P. Golubyatnikov, A.A. Makhnev, M.S. Nirova, *Three infinite series Shilla graphs do not exist*, Doklady RAN, **498**:1 (2021), 45–50.

- [6] Brouwer A.E., Sumaloj S., Worawannotai C., *The nonexistence of distance-regular graphs with intersection arrays  $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$  and  $\{36, 28, 4; 1, 2, 24\}$* , Australasian Journal of Combinatorics, **66**:2 (2016), 330–332.
- [7] K. Coolsaet, A. Jurishic, *Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, **115**:6 (2008), 1086–1095.

ALEXANDR A. MAKHNEV

INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS, URAL BRANCH OF THE RUSSIAN  
ACADEMY OF SCIENCES, HAINAN UNIVERSITY,  
S. KOVALEVSKOY STR., 4,  
625090, YEKATERINBURG, RUSSIA  
*Email address:* [makhnev@imm.uran.ru](mailto:makhnev@imm.uran.ru)

JINZHUAN CAI

SCHOOL OF SCIENCE, HAINAN UNIVERSITY,  
RENMIN AVENUE, 58,  
570228, HAIKOU, P.R. CHINA  
*Email address:* [caijzh12@163.com](mailto:caijzh12@163.com)

KONSTANTIN S. EFIMOV

INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS, URAL BRANCH OF THE RUSSIAN  
ACADEMY OF SCIENCES, URAL FEDERAL UNIVERSITY NAMED AFTER THE FIRST PRESIDENT  
OF RUSSIA B. N. YELTSIN, URAL STATE MINING UNIVERSITY,  
S. KOVALEVSKOY STR., 4,  
625090, YEKATERINBURG, RUSSIA  
*Email address:* [konstantin.s.efimov@gmail.com](mailto:konstantin.s.efimov@gmail.com)