S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

*Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023)* УДК 510.67, 512.544.33, 512.544.7
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 20F18,
20F36, 20E15, 03C05, 05C25

# О СВЯЗИ УРАВНЕНИЙ НАД ЧАСТИЧНО КОММУТАТИВНЫМИ ДВУСТУПЕННО НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ГРУППАМИ С УРАВНЕНИЯМИ НАД ГРАФАМИ

**И.М. Бучинский**

*Представлено* И.М. Бучинским

**Abstract:** The article proves the equivalence of the properties of being equationally Noethericity of a partially commutative two-step nilpotent group $G$ and being equationally Noethericity of its commutative graph $\Gamma_G$, considered in the category of graphs with loops. In particular, it is shown that to study the equationally Noethericity of a partially commutative two-step nilpotent group, it is sufficient to consider equations in one variable over this group. Using the concept of residualizability of groups, we prove that an arbitrary partially commutative two-step nilpotent group can be embedded in a countable direct power of a free two-step nilpotent group of rank 2. In addition, earlier in the works of A.J. Duncan, I.V. Kazachkov and V.N. Remeslennikov it was shown that the centralizer dimension of each finitely generated free partially commutative group coincides with the height of the lattice of canonical centralizers of this group. In our work we present some results relating the centralizer dimension and the height of the lattice of canonical

---

Buchinskiy, I.M., On the connection between equations over partially commutative two-step nilpotent groups and equations over graphs.



Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0003.

*Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.*

centralizers for the case of an infinitely generated free partially commutative group and generalize a similar result from the work of V. Blatherwick to the case of an infinitely generated partially commutative two-step nilpotent group.

**Keywords:** universal algebraic geometry, equations in one variable, equationally Noetherian property, class two nilpotent group, centralizer, centralizer dimension, partially commutative group, commutativity graph.

## 1 Введение

Алгебраическая система $\mathcal{A}$ называется нётеровой по уравнениям, если для любого целого положительного $n$ любая система уравнений $S(X)$ над $\mathcal{A}$ от $n$ переменных $X$ эквивалентна своей некоторой конечной подсистеме $S_0(X) \subseteq S(X)$. Аналогичным образом вводится понятие алгебраической системы, нетеровой по уравнениям от одной переменной. Имеется обширный список работ, посвященных исследованию нетеровых по уравнениям алгебраических систем: кроме (и среди) тех, что упомянуты в монографии Э.Ю. Данияровой, А.Г. Мясникова и В.Н. Ремесленникова [1], выделим, например, [2, 3, 4, 7, 8].

Понятие нетеровости по уравнениям является одним из центральных в универсальной алгебраической геометрии над алгебраическими системами. Данное направление математики занимается исследованием уравнений, алгебраических множеств, координатных алгебр над различными алгебраическими системами за рамками классической алгебраической геометрии – над различными группами, полугруппами, алгебрами, графами и пр. Для более подробного знакомства с универсальной алгебраической геометрией рекомендуем читателю, например, работы [1] и [12], вторая из которых представляет собой подход Б.И. Плоткина, существенно отличающийся от описанного в [1].

Как следует из определения, одним из преимуществ нетеровых по уравнениям алгебраических систем является возможность изучения только конечных систем уравнений. Описание общего теоретического подхода, позволяющего взглянуть на алгебраические множества над нетеровыми по уравнениям алгебраическими системами с разных точек зрения, можно найти в [1, Теоремы 2.5.21, 2.5.22] и [5] (объединяющие теоремы). Также известно, что в нетеровых по уравнениям алгебраических системах произвольное алгебраическое множество представимо в виде конечного объединения неприводимых алгебраических множеств [1, Следствие 2.5.6].

Всюду далее будем обозначать через $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ коммутатор двух элементов $x, y$ из группы $G$. Многообразие двуступенно нильпотентных групп $N_2$ определяется тождеством: $[x, y, z] = [[x, y], z] = 1$ для любых $x, y, z \in G$ для любой группы $G$ из $N_2$. Из, например, [3, 4, 8] известно, что все конечно порожденные двуступенно нильпотентные группы нетеровы по уравнениям.

В данной работе под «бесконечностью» мы всегда будем иметь ввиду счетную мощность. Соответственно, фраза «бесконечно порожденная группа» будет означать группу со счетным множеством порождающих.

**Определение 1** ([13]). *Пусть $\Gamma$ – неориентированный простой граф (возможно бесконечный) с множеством вершин $X = V(\Gamma)$, $F(X)$ – свободная группа с множеством порождающих $X$, и пусть*

$$R = \{[x_i, x_j] \in F(X) \mid x_i, x_j \in X \text{ и } x_i \text{ и } x_j \text{ смежны в графе } \Gamma\}.$$

*Тогда группа $G_\Gamma = \langle X \mid R\rangle$ называется свободной частично коммутативной группой, а граф $\Gamma$ – графом коммутативности свободной частично коммутативной группы $G_\Gamma$.*

Слово «свободная» из данного определения зачастую мы будем опускать, все равно имея ввиду свободную частично коммутативную группу. Соответственно, под фразой «частично коммутативная двуступенно нильпотентная группа» мы будем подразумевать свободную частично коммутативную группу из многообразия $N_2$ двуступенно нильпотентных групп. Частично коммутативные группы, или графовые группы, или правоугольные группы Артина (right-angled Artin groups), имеют множество замечательных свойств (удобные нормальные формы элементов, разрешимость основных алгоритмических задач, богатая структура подгрупп и многое другое; [13, 14, 15]), список которых продолжает пополняться. Не стала исключением и данная работа, один из результатов которой (*теорема 5*) устанавливает связь между универсальной алгебраической геометрией над такими группами (в проекции на двуступенно нильпотентный случай) и универсальной алгебраической геометрией над неориентированными (ненаправленными) графами.

Централизатором множества $A$ элементов группы $G$ называется множество всех таких элементов группы $G$, которые коммутируют сразу со всеми элементами из $A$. Согласно [16], централизаторная размерность есть максимальная длина среди всех строго убывающих цепочек централизаторов. Кроме того, как было показано, например, в [13], централизаторы образуют решетку, называемую централизаторной решеткой. Понятие централизаторной размерности группы совпадает с понятием высоты централизаторной решетки данной группы. Приведем некоторые важные результаты, связанные с этими понятиями, из работ [13, 16]. В [16] было показано, что класс групп, имеющих централизаторную решетку конечной высоты, универсально аксиоматизируем, а в [13] был предложен эффективный алгоритм вычисления централизаторной размерности для класса свободных частично коммутативных групп, обоснование которого в последствии было упрощено в [17] на языке параболических и квазипараболических подгрупп. Кроме того, в работе [18] было показано, что произвольная конечно порожденная частично коммутативная двуступенно нильпотентная группа с некоторым графом коммутативности имеет ту же централизаторную размерность, что и свободная частично коммутативная группа с тем же графом коммутативности. В нашей работе мы обобщаем результаты [13, 18] на случай бесконечно порожденных групп (см. *теорему 2*). Кроме того, отметим, что в доказательстве *леммы 3* присутствуют идеи, связанные с блоками и блоковым разложением, подробнее с которыми в случае конечно порожденных двуступенно нильпотентных групп можно ознакомиться, например, в [19, 20].

В статье [11] автором были сформулированы некоторые утверждения без доказательств. Настоящая работа содержит доказательства этих утверждений и новые результаты.

Данная работа посвящена ответу на вопрос о том, как связаны свойство нетеровости по уравнениям от одной переменной частично коммутативной двуступенно нильпотентной группы $G$ и высота решетки канонических централизаторов $G$. Кроме того, на основе полученных результатов выявлена связь с нетеровостью по уравнениям графа коммутативности $\Gamma_G$ группы $G$, рассматриваемого в категории графов с петлями. Основным результатом данной работы является *теорема 5*, приводящая для произвольной частично коммутативной двуступенно нильпотентной группы $G_\Gamma$ шесть эквивалентных условий. На пути к доказательству *теоремы 5* был получен ряд результатов, среди которых также отметим *лемму 4*. Она говорит нам о том, что свободная двуступенно нильпотентная группа $F_2$ в счетной прямой степени содержит в качестве подгрупп все частично коммутативные двуступенно нильпотентные группы, то есть $F_2^\omega$ является своего рода «универсумом» класса всех частично коммутативных двуступенно нильпотентных групп. Пункт 1 *леммы 4* обобщает результат [21, Лемма 1] об аппроксимируемости конечно порожденных частично коммутативных двуступенно нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп на случай произвольных частично коммутативных двуступенно нильпотентных $A$-степенных групп. Понятие $A$-степенной группы, или $A$-группы, или степенной MR-группы, было введено в работе [22] с использованием списка аксиом из [23] (степенная $A$-группа по Линдону) и еще одной аксиомы, называемой MR-аксиомой. Данное понятие впоследствии исследовалось и разрабатывалось во многих работах, среди которых для нильпотентного случая отметим, к примеру, [24, 25, 26]. В текущей работе мы по умолчанию будем рассматривать $\mathbb{Z}$-группы, то есть такие группы, элементы которых можно возводить только в целочисленные степени.

Ранее в работе [3] был сформулирован следующий вопрос: для каких групп из нетеровости по уравнениям от одной переменной следует нетеровость по уравнениям? Как оказалось, для случая частично коммутативных двуступенно нильпотентных групп имеет место положительный ответ на этот вопрос. В данной работе он представлен и доказан в виде *теоремы 3*. Отметим, что в общем случае для двуступенно нильпотентных групп ответ на вопрос из [3] отрицательный. В работе [10] был построен пример двуступенно нильпотентной группы, являющейся нетеровой по уравнениям от одной переменной, но в которой существует бесконечная система уравнений от двух переменных, не эквивалентная никакой своей конечной подсистеме.

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность своему научному руководителю, Трейеру Александру Викторовичу, за поставленную задачу и помощь в ее решении.

## 2 Предварительные сведения

Для ознакомления с теоретической базой данной статьи рекомендуем читателю следующие работы: [1, 13, 15, 16, 27, 28]. Следуя им, приведем основные необходимые нам понятия.

**Определение 2** ([16]). *Если существует такое целое число $d$, что группа $G$ имеет строго убывающую цепочку длины $d$ централизаторов и не имеет цепочки длины большей, чем $d$, то говорят, что $G$ имеет централизаторную размерность $cdim(G) = d$. Если такого целого числа $d$ не существует, то положим $cdim(G) = \infty$ и будем говорить, что группа $G$ имеет бесконечную централизаторную размерность.*

Отметим, что равенство $cdim(G) = \infty$ справедливо при хотя бы одном из следующих условий:

- $G$ имеет сколь угодно длинные строго убывающие цепочки централизаторов;
- $G$ имеет бесконечную строго убывающую цепочку централизаторов.

Централизатор подмножества порождающих частично коммутативной группы мы будем называть *каноническим централизатором.*

Группа $G$ называется группой *без кручения*, если для любого неединичного элемента $g$ группы $G$ из равенства $g^m = 1$ всегда следует равенство $m = 0$.

**Замечание 1.** *Каждая частично коммутативная группа является группой без кручения.*

Говорят, что группа $G$ *аппроксимируется* группой $H$, если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует такой гомоморфизм $h : G \to H$, что $h(g) \neq 1$.

Пусть $g \in G$ – некоторый элемент группы $G$. Обозначим через $\alpha(g)$ – множество всех порождающих группы $G$, участвующих в записи элемента $g$.

Пусть $G_\Gamma$ – частично коммутативная группа с графом коммутативности $\Gamma$. Рассмотрим граф $\Delta$ – двойственный граф к графу $\Gamma$, $V(\Delta) = V(\Gamma)$ и вершины $x_i, x_j \in V(\Delta)$ смежны тогда и только тогда, когда $[x_i, x_j] \neq 1$.

Легко заметить, что если $\Delta = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_k$, где $I_1, \ldots, I_k$ – компоненты связности графа $\Delta$, то для любых $x_1 \in I_i$ и $x_2 \in I_j$, $i \neq j$, $[x_i, x_j] = 1$ в графе $\Gamma$. Для элемента $g \in G_\Gamma$ обозначим через $\Delta(\alpha(g))$ – максимальный подграф (то есть индуцированный подграф) графа $\Delta$ на множестве вершин $\alpha(g)$.

*Групповой язык* $\mathcal{L}_{gr}$ – это язык, состоящий из двухместного функционального символа $\cdot$ для обозначения групповой операции умножения, одноместного функционального символа $^{-1}$ (обращение) и константного символа $e$ (единица группы): $\mathcal{L}_{gr} = \{\cdot, ^{-1}, e\}$. Расширение языка $\mathcal{L}$ множеством элементов группы $G$: $\mathcal{L}_{gr,G} = \mathcal{L} \cup G$, назовем *групповым языком с константами из* $G$. В текущей работе мы будем рассматривать только случай языка $\mathcal{L}_{gr,G}$ (так называемый диофантов случай).

Зная общий вид элементов в двуступенно нильпотентной группе, мы имеем общий вид уравнения от одной переменной $x$ с коэффициентами $g$ и $a$ над двуступенно нильпотентной группой: $x^\alpha g[x, a] = 1$, где $\alpha \in \mathbb{Z}$. Под системой уравнений над двуступенно нильпотентной группой мы будем понимать произвольное непустое множество уравнений над этой группой.

Точка $A \in G^n$ называется *решением уравнения* $s(X)$ языка $\mathcal{L}_{gr,G}$ от $n$ переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ над группой $G$, если $G \models s(A)$. Точка $A \in G^n$ называется *решением системы уравнений* $S(X)$ над группой $G$, если $A$ является решением каждого уравнения системы $S(X)$. Множество всех решений системы уравнений $S(X)$ называют *алгебраическим множеством* над $G$ и обозначают через $V_G(S(X))$. Две системы уравнений $S_1(X)$ и $S_2(X)$ языка $\mathcal{L}_{gr,G}$ называются *эквивалентными* над группой $G$, если их множества решений совпадают.

Группа $G$ называется *нётеровой по уравнениям*, если для любого целого положительного $n$ любая система уравнений $S(X)$ от $n$ переменных $X$ эквивалентна своей некоторой конечной подсистеме $S_0(X) \subseteq S(X)$. Группа $G$ называется *нётеровой по уравнениям от одной переменной*, или *1-нётеровой по уравнениям*, если любая система уравнений $S(x)$ от одной переменной эквивалентна своей некоторой конечной подсистеме $S_0(x) \subseteq S(x)$. Будем говорить, что система уравнений не является нётеровой по уравнениям, если она не эквивалентна никакой своей конечной подсистеме.

В [6, Лемма 1] представлен критерий нетеровости по уравнениям для функциональных алгебраических систем. Без существенных изменений эта лемма справедлива и для произвольных алгебраических систем (см., например, [9, Лемма 1]). Приведем ее формулировку для произвольной алгебраической системы.

**Лемма 1.** *Алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{L} \rangle$ не является нетеровой по уравнениям тогда и только тогда, когда найдутся последовательность элементов $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $a_i \in A^n$, и последовательность уравнений*

$\{s_i(X)\}_{i\in\mathbb{N}}$, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, *языка* $\mathcal{L}$ *такие, что* $\mathcal{A} \not\models s_i(a_i)$ *для всех* $i \in \mathbb{N}$ *и* $\mathcal{A} \models s_i(a_j)$ *для всех* $j > i$.

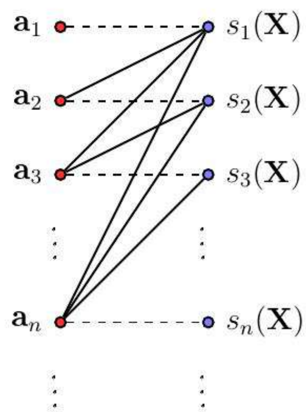


Рис. 1. Иллюстрация к *лемме 1*. Пунктирная линия между $a_i$ и $s_i(X)$ означает, что $\mathcal{A} \not\models s_i(a_i)$. Сплошная линия между $a_j$ и $s_i(X)$ при $j > i$ означает, что $\mathcal{A} \models s_i(a_j)$.

*Неориентированным графом* называется пара множеств $(V, E)$, где $V$ — непустое множество вершин, а $E$ — множество неупорядоченных пар элементов из $V$, называемых ребрами. Произвольный граф является алгебраической системой над языком $\{E^{(2)}\}$, где бинарный предикат $E$ истинен на паре вершин $u$ и $v$ тогда и только тогда, когда $u$ и $v$ смежны. В работе, например, [9] можно ознакомиться с некоторыми понятиями из универсальной алгебраической геометрии, приведенными в адаптации на язык теории графов.

**Определение 3** ([15])**.** *Пусть* $A$ *— подмножество вершин в графе* $\Gamma$. *Тогда ортогональное дополнение* $A$ *определяется следующим образом:*

$$A^{\perp} = \{u \in \Gamma \mid \forall a \in A \ d(u, a) \leq 1\},$$

*где* $d(u, a)$ *определяется как минимум среди всех длин путей, соединяющих вершины* $u$ *и* $a$. *Если* $u$ *и* $a$ *находятся в разных компонентах связности, то* $d(u, a) = \infty$. *Положим по определению* $\emptyset^{\perp} = \Gamma$.

Формулировка [11, Теорема 1] говорит нам лишь о наличии бесконечной строго убывающей цепочки централизаторов. Оказывается, справедлив более общий результат, показывающий, например, существование такой цепочки на конечных множествах элементов группы. Кроме того, имеется еще и ряд полезных для нас свойств, связывающих полученную цепочку централизаторов с исходной ненетеровой системой уравнений. Сформулируем все это и докажем в виде следующей леммы.

**Лемма 2.** *Пусть $G$ – двуступенно нильпотентная группа без кручения. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$G$ не является нетеровой по уравнениям от одной переменной;*
(2) *в $G$ существуют последовательности уравнений от одной переменной общего вида $\{x^{\alpha_i} g_i[x, a_i] = 1\}_{i\in\mathbb{N}}$ и элементов $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющие лемме 1;*
(3) *в $G$ существуют последовательности уравнений от одной переменной вида $\{[x, a_i] = 1\}_{i\in\mathbb{N}}$ и элементов $\{\tilde{b}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющие лемме 1;*
(4) *в $G$ существует бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов $C(A_1) \supsetneq C(A_2) \supsetneq \ldots \supsetneq C(A_i) \supsetneq \ldots$, где $A_i = \{a_1, \ldots, a_i\}$.*

*Доказательство.* Эквивалентность «$1 \iff 2$» представляет собой *лемму 1*. Следствие «$3 \Rightarrow 1$» справедливо также в силу *леммы 1*. Следствие же «$4 \Rightarrow 1$» имеет место исходя из, например, [11, Лемма 2].

Перейдем к доказательству «$2 \Rightarrow 4$». Пусть в $G$ существуют последовательность уравнений $S(x) = \{x^{\alpha_i} g_i[x, a_i] = 1\}_{i\in\mathbb{N}}$ и последовательность элементов $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ такие, что $b_i^{\alpha_i} g_i[b_i, a_i] \neq 1$ для всех $i$ и $b_j^{\alpha_i} g_i[b_j, a_i] = 1$ для всех $j > i$. Рассмотрим произвольное уравнение $x^{\alpha_i} g_i[x, a_i] = 1$ системы $S(x)$ и $b_{i+1}$ – его решение. Сделаем во всей системе $S(x)$ замену переменной $x = b_{i+1}y$. Тогда $(b_{i+1}y)^{\alpha_i} g_i[b_{i+1}y, a_i] = 1$. Возведя первую скобку в степень и расписав коммутатор, используя свойства группы $G$, для некоторого $\gamma$ получим $y^{\alpha_i} b_{i+1}^{\alpha_i} g_i[b_{i+1}, a_i][y, a_i][b_{i+1}, y]^{\gamma} = 1$. Так как $b_{i+1}$ является решением этого уравнения, то $b_{i+1}^{\alpha_i} g_i[b_{i+1}, a_i] = 1$. Тогда $y^{\alpha_i}[y, a_i][b_{i+1}, y]^{\gamma} = 1$. Получаем, что $y^{\alpha_i} = [a_i, y][y, b_{i+1}]^{\gamma}$. Судя по последнему равенству и исходя из того, что коммутант любой группы без кручения изолирован, значение переменной $y$ обязано быть из коммутанта группы $G$. Из определения двуступенно нильпотентной группы ($[[f_1, f_2], f_3] = 1$ для всех $f_1, f_2, f_3 \in G$) получаем, что $y^{\alpha_i} = 1$ и, следовательно, так как $G$ – группа без кручения, $\alpha_i = 0$. Тогда каждое уравнение системы $S(x)$ имеет вид $g_i[x, a_i] = 1$.

Рассмотрим первое уравнение $g_1[x, a_1] = 1$ системы $S(x)$. Сделаем во всей системе $S(x)$ замену переменной $x = b_2 y$. Тогда первое уравнение примет вид $g_1[b_2 y, a_1] = 1$. Отсюда $g_1[b_2, a_1][y, a_1] = 1$. Так как $b_2$ является решением этого уравнения, то $g_1[b_2, a_1] = 1$. Таким образом, мы пришли к уравнению $[y, a_1] = 1$. Переименуем в полученной системе $S_1(y)$ переменную $y$ в $x$. Отметим, что система $S_1(x)$ не является нетеровой по уравнениям.

Перейдем ко второму уравнению $g_{2,1}[x, a_2] = 1$ системы $S_1(x)$. Отметим, что оно, вообще говоря, могло измениться в результате предыдущей замены переменной – отсюда и параметр $g_{2,1}$. Рассмотрим $b_{3,1}$ – решение первых двух уравнений (исходное $b_3$ уже может не быть таким решением), которое существует в силу *леммы 1* для системы $S_1(x)$, не являющейся нетеровой по уравнениям. Сделаем в $S_1(x)$ замену $x = b_{3,1} y$.

Тогда, аналогичными рассуждениями, второе уравнение возможно привести к виду $[y, a_2] = 1$. Заметим, что вид первого уравнения при данной замене не изменится. Действительно, имеем $[b_{3,1}y, a_1] = 1$. Тогда $[b_{3,1}, a_1][y, a_1] = 1$. Из того, что $b_{3,1}$ является решением первого уравнения, то есть $[b_{3,1}, a_1] = 1$, получаем $[y, a_1] = 1$.

Таким образом, продолжая данную процедуру, мы получим последовательность конечных систем $\{S_{\leq i}(x)\}_{i\in\mathbb{N}} = \{\{[x, a_j] = 1\}_{j\leq i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ и последовательность элементов $\{\{b_{j,i}\}_{j\leq i+2}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Рассмотрим для произвольного $i$ конечную цепочку множеств $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \ldots \subsetneq A_i$, где $A_i = \{a_1, \ldots, a_i\}$. Покажем, что справедлива следующая конечная цепочка вложений централизаторов: $C(A_1) \supsetneq C(A_2) \supsetneq \ldots \supsetneq C(A_i)$. Действительно, для произвольного $j < i$ известно, что $C(A_j) \supseteq C(A_{j+1})$. Однако $C(A_j) \ni b_{j+1,j-1} \notin C(A_{j+1})$. При этом заметим, что если $A_{i+1} = A_i \cup \{a_{i+1}\}$, то $C(A_{i+1})$ непусто и $C(A_i) \supsetneq C(A_{i+1})$. Таким образом, так как $i$ произвольное, было показано наличие бесконечной строго убывающей цепочки централизаторов $C(A_1) \supsetneq C(A_2) \supsetneq \ldots \supsetneq C(A_i) \supsetneq \ldots$.

«$4 \Rightarrow 3$». Пусть в $G$ имеет место бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов $C(A_1) \supsetneq C(A_2) \supsetneq \ldots \supsetneq C(A_i) \supsetneq \ldots$, где $A_i = \{a_1, \ldots, a_i\}$. Пусть $\tilde{b}_1 \in C(A_1) \setminus C(A_2)$. Тогда найдется элемент $a_1 \in A_2 \setminus A_1$ такой, что $[\tilde{b}_1, a_1] \neq 1$. Пусть $\tilde{b}_2 \in C(A_2) \setminus C(A_3)$. Тогда найдется элемент $a_2 \in A_3 \setminus A_2$ такой, что $[\tilde{b}_2, a_2] \neq 1$. Несложно заметить, что при этом $[\tilde{b}_2, a_1] = 1$. Таким образом, продолжая данную процедуру, мы замечаем, что существует пара последовательностей элементов $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{\tilde{b}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ такая, что $[\tilde{b}_i, a_i] \neq 1$ для всех $i$ и $[\tilde{b}_j, a_i] = 1$ для всех $j > i$. □

## 3 Цепочки централизаторов в бесконечно порожденных частично коммутативных группах

Ранее в работах [13] и [17] было показано, что существование строго убывающей цепочки централизаторов максимальной длины $d$ в произвольной свободной конечно порожденной частично коммутативной группе эквивалентно существованию строго убывающей цепочки длины $d$ канонических централизаторов. На основе этих работ в [18] был получен аналогичный результат для конечно порожденных частично коммутативных двуступенно нильпотентных групп. Объединим и напомним оба эти результата в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — конечно порожденная группа. Тогда централизаторная размерность группы $G$ равна высоте решетки канонических централизаторов в следующих случаях:*

(1) [13, Теорема 3.3] *$G$ — свободная частично коммутативная группа;*
(2) [18] *$G$ — двуступенно нильпотентная частично коммутативная группа.*

Используя эту теорему докажем следствие, говорящее нам о том, что для любой строго убывающей цепочки централизаторов произвольной длины (не обязательно максимальной) существует строго убывающая цепочка канонических централизаторов такой же длины.

**Следствие 1.** *Пусть $G$ — конечно порожденная группа. Тогда для любой строго убывающей цепочки централизаторов конечных множеств элементов из $G$ существует строго убывающая цепочка канонических централизаторов такой же длины в следующих случаях:*

(1) *$G$ — свободная частично коммутативная группа;*
(2) *$G$ — двуступенно нильпотентная частично коммутативная группа.*

*Доказательство.* Из [29] известно, что все конечно порожденные частично коммутативные группы линейны, а из [16] — что все конечно порожденные линейные группы имеют конечную централизаторную размерность. Поэтому в данном доказательстве нам достаточно рассматривать только цепочки конечной длины.

Пусть в группе $G$ имеет место цепочка централизаторов $C(A_1) \supsetneq \ldots \supsetneq C(A_l)$. Если эта цепочка централизаторов максимальной длины, то, по *теореме 1*, в $G$ существует цепочка централизаторов $C(X_1) \supsetneq \ldots \supsetneq C(X_l)$ такой же длины на подмножествах порождающих группы $G$.

Пусть цепочка $C(A_1) \supsetneq \ldots \supsetneq C(A_l)$ не максимальной длины в $G$. Тогда в $G$ существует цепочка централизаторов максимальной длины: $C(B_1) \supsetneq \ldots \supsetneq C(B_d)$, где $d > l$. Как было уже отмечено выше, $d$ — конечное число. Тогда, согласно *теореме 1*, в $G$ существует цепочка централизаторов $C(X_1) \supsetneq \ldots \supsetneq C(X_d)$ такой же длины на подмножествах порождающих группы $G$. В цепочке $C(X_1) \supsetneq \ldots \supsetneq C(X_d)$ мы можем рассмотреть подцепочку $C(X_1) \supsetneq \ldots \supsetneq C(X_l)$ такой же длины, что и исходная цепочка $C(A_1) \supsetneq \ldots \supsetneq C(A_l)$. □

Далее в этом пункте мы покажем, что *теорема 1* справедлива и в случае бесконечного множества порождающих. Более того, отметим, что если в группе существует сколь угодно длинная (бесконечная) строго убывающая цепочка централизаторов, то значит в этой группе существует и сколь угодно длинная (бесконечная) строго убывающая цепочка канонических централизаторов. С другой стороны, нам в данной работе необходим лишь случай, когда централизатор берется по конечным множествам (см. пункт 4 *леммы 2*). С целью избежания технических трудностей мы ограничимся этим.

Заметим, что разность между двумя различными каноническими централизаторами всегда содержит хотя бы один порождающий группы. Сформулируем и докажем этот факт, который пригодится нам далее, в виде следующего предложения.

**Предложение 1.** *Пусть $X_1, X_2$ – подмножества порождающих частично коммутативной группы $G$ (возможно бесконечно порожденной) такие, что $C(X_1) \supsetneq C(X_2)$. Тогда можно найти такой порождающий $x$ группы $G$, что $x \in C(X_2) \setminus C(X_1)$.*

*Доказательство.* Рассмотрим элемент $w \in C(X_2) \setminus C(X_1)$. Тогда для любых $y \in X_2$ справедливо равенство $[y, w] = 1$ и следовательно, так как $G$ частично коммутативная группа, для любых порождающих $x$ группы $G$, участвующих в записи элемента $w$, $[x, y] = 1$. С другой стороны, существует такой $z \in X_1$, что $[z, w] \neq 1$, а значит, опять же в силу того, что $G$ частично коммутативная группа, существует такой порождающий $x$ группы $G$, участвующий в записи элемента $w$, что $[x, z] \neq 1$. Таким образом, существует такой порождающий $x$ группы $G$, что $x \in C(X_2) \setminus C(X_1)$. □

**Замечание 2.** *Исходя из предложения 1, каждой строго убывающей цепочке канонических централизаторов частично коммутативной группы можно взаимно однозначно сопоставить строго убывающую цепочку ортогональных дополнений в ее графе коммутативности. Действительно, подмножествам порождающих $X_1$ и $X_2$ частично коммутативной группы $G_\Gamma$ соответствуют подмножества вершин $X_1$ и $X_2$ в графе коммутативности $\Gamma$. А значит, что если $C(X_1) \supsetneq C(X_2)$, то $X_1^\perp \supsetneq X_2^\perp$.*

Следующее предложение говорит нам о том, что при наличии бесконечной строго убывающей цепочки централизаторов, взятых по подмножествам элементов, мы можем рассматривать бесконечную строго убывающую цепочку централизаторов, взятых по представителям из каждого подмножества элементов.

**Предложение 2.** *Пусть $G$ – двуступенно нильпотентная частично коммутативная группа, и в $G$ существует бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов*

$$C(D_1) \supsetneq C(D_2) \supsetneq \ldots \supsetneq C(D_n) \supsetneq \ldots,$$

*где $D_i \subsetneq D_{i+1}$. Тогда для некоторых $a_1 \in D_1$ и $a_i \in D_i \setminus D_{i-1}$ в $G$ справедлива бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов*

$$C(a_1) \supsetneq C(a_1, a_2) \supsetneq \ldots \supsetneq C(a_1, a_2, \ldots, a_n) \supsetneq \ldots.$$

*Доказательство.* Для каждого $i$ существует такой $b_i$, что для всех $a_{i-1} \in D_{i-1}$ справедливо равенство $[b_i, a_{i-1}] = 1$ и $[b_i, a_i] \neq 1$ для некоторого $a_i \in D_i$ (очевидно, что $a_i$ должен быть из $D_i \setminus D_{i-1}$). Выберем $a_1$ в множестве $D_1$ произвольным образом. Элемент $a_2$ из $D_2 \setminus D_1$ выберем таким, чтобы $[b_2, a_2] \neq 1$. Продолжая данную процедуру, получим такую последовательность $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, что в группе $G$ справедлива бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов $C(a_1) \supsetneq C(a_1, a_2) \supsetneq \ldots C(a_1, a_2, \ldots, a_n) \supsetneq \ldots$. □

Из *предложения 2* в частности вытекает

**Следствие 2.** *Пусть $G$ – двуступенно нильпотентная частично коммутативная группа, и $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – такая последовательность элементов группы $G$, что в $G$ справедлива бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов*

$$C(a_1) \supsetneqq C(a_1, a_2) \supsetneqq \ldots \supsetneqq C(a_1, a_2, \ldots, a_n) \supsetneqq \ldots.$$

*Тогда для любой монотонно возрастающей последовательности $\{i_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ в $G$ справедлива бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов*

$$C(a_{i_1}) \supsetneqq C(a_{i_1}, a_{i_2}) \supsetneqq \ldots C(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}) \supsetneqq \ldots.$$

Докажем следующую лемму, являющуюся ключевой в данном пункте.

**Лемма 3.** *Пусть $G$ – двуступенно нильпотентная частично коммутативная группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$G$ не является нетеровой по уравнениям от одной переменной;*
(2) *в $G$ существуют последовательности уравнений от одной переменной вида $\{[x, d_i] = 1\}_{i\in\mathbb{N}}$ и элементов $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющие лемме 1, где $d_i$ и $r_i$ – порождающие группы $G$;*
(3) *в $G$ существует бесконечная строго убывающая цепочка канонических централизаторов $C(D_1) \supsetneqq C(D_2) \supsetneqq \ldots \supsetneqq C(D_i) \supsetneqq \ldots$, где $D_i = \{d_1, \ldots, d_i\}$ – подмножества порождающих группы $G$.*

*Доказательство.* Следствие «2 $\Rightarrow$ 3» справедливо в силу следствия «3 $\Rightarrow$ 4» из *леммы 2*. Обратное утверждение «3 $\Rightarrow$ 2» имеет место в силу «4 $\Rightarrow$ 3» из *леммы 2* и *предложения 1*. Следствие «3 $\Rightarrow$ 1» вытекает из «4 $\Rightarrow$ 1» *леммы 2*.

Докажем оставшееся «1 $\Rightarrow$ 3». Пусть $G$ не является нетеровой по уравнениям от одной переменной. Тогда, в силу *леммы 2*, в $G$ существует бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов

$$C(a_1) \supsetneqq C(a_1, a_2) \supsetneqq \ldots \supsetneqq C(a_1, a_2, \ldots, a_n) \supsetneqq \ldots.$$

Пусть $c : G \ni a \mapsto \{c_1, c_2, \ldots, c_{n_a}\} \subseteq \alpha(a)$, где $c_i$ – такие порождающие группы $G$ из записи элемента $a$, что $[c_i, q] = 1$ для всех $q \in \alpha(a)$. Отметим, что если $c(a_i) = \alpha(a_i)$, то $C(a_i) = C(\alpha(a_i))$.

1. Если существует такая бесконечная подпоследовательность $I \subseteq \mathbb{N}$, что для всех $i \in I$ $c(a_i) = \alpha(a_i)$, то с помощью *следствия 2* перейдем к рассмотрению в $G$ бесконечной цепочки $C(a_{i_1}) \supsetneqq C(a_{i_1}, a_{i_2}) \supsetneqq \ldots \supsetneqq C(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}) \supsetneqq \ldots$, где $i_j \in I$, $j \in \mathbb{N}$ и для всех $i \in I$ $c(a_i) = \alpha(a_i)$. В целях упрощения обозначений и без ограничения общности будем считать что $I = \mathbb{N}$ и что такая цепочка централизаторов была у нас изначально. Рассмотрим этот случай позднее.

2. Пусть такой подпоследовательности $I$ не существует. Тогда существует такая бесконечная подпоследовательность $J \subseteq \mathbb{N}$, что для всех $j \in J$ $c(a_j) \neq \alpha(a_j)$. Аналогично будем считать, что $J = \mathbb{N}$, и что

следующая бесконечная цепочка в $G$ была у нас изначально: $C(a_1) \supsetneq C(a_1, a_2) \supsetneq \ldots \supsetneq C(a_1, a_2, \ldots, a_n) \supsetneq \ldots$, где $c(a_i) \neq \alpha(a_i)$ для всех $i$. Тогда каждый элемент $a_i$ можно записать в следующем виде: $a_i = c_i \cdot q_{i,1} \cdot q_{i,2} \cdot \ldots \cdot q_{i,n_i}$, где $c_i = \prod\limits_{w \in c(a_i)} w$ (если $c(a_i)$ пусто, то положим $c_i = 1$), а $q_{i,j}$ – такое слово, что $[q_{i,j}, q_{i,k}] = 1$ для всех $j, k = \overline{1, n_i}$, и $\Delta(\alpha(q_{i,j}))$ – связный граф. Более подробно с данной темой, связанной с блоками и блоковым разложением, можно ознакомиться, например, в [19, 20]. Отметим, что $C(a_i) = C(c_i, q_{i,1}, q_{i,2}, \ldots, q_{i,n_i})$. Так как $C(a_1, a_2, \ldots, a_i) \supsetneq C(a_1, a_2, \ldots, a_i, a_{i+1})$, то существует такой $b_{i+1}$, что $[b_{i+1}, a_j] = 1$ для всех $j \leq i$, и $[b_{i+1}, a_{i+1}] \neq 1$. Следовательно, $[b_{i+1}, c_i] = 1$ и $[b_{i+1}, q_{i,j}] = 1$ для всех $j = \overline{1, n_i}$. Кроме того, имеет место хотя бы один вариант из следующих двух: $[b_{i+1}, c_{i+1}] \neq 1$, или $[b_{i+1}, q_{i+1,j}] \neq 1$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n_{i+1}\}$. Для каждого $b_i$ обозначим через $p_i$ такой элемент из множества $\{c_i, q_{i,1}, \ldots, q_{i,n_i}\}$, что $[b_i, p_i] \neq 1$. Тогда в $G$ имеет место бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов $C(p_1) \supsetneq C(p_1, p_2) \supsetneq \ldots \supsetneq C(p_1, p_2, \ldots, p_n) \supsetneq \ldots$.

2.1. Если существует такая бесконечная подпоследовательность $I \subseteq \mathbb{N}$, что для всех $i \in I$ $p_i = c_i$, то с помощью *следствия 2* перейдем к рассмотрению в $G$ бесконечной строго убывающей цепочки $C(p_{i_1}) \supsetneq C(p_{i_1}, p_{i_2}) \supsetneq \ldots \supsetneq C(p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n}) \supsetneq \ldots$, где $i_j \in I$. Для упрощения обозначений и не ограничивая общности будем считать, что такая цепочка у нас была изначально и обозначим ее через $C(a_1) \supsetneq C(a_1, a_2) \supsetneq \ldots \supsetneq C(a_1, a_2, \ldots, a_n) \supsetneq \ldots$. Очевидно, что в данном случае $c(a_i) = \alpha(a_i)$ и, таким образом, мы пришли к случаю 1 выше.

2.2. Пусть такой подпоследовательности $I$ не существует. Тогда существует такая бесконечная подпоследовательность $J \subseteq \mathbb{N}$, что для всех $j \in J$ $p_j \neq c_j$. С помощью *следствия 2* перейдем к рассмотрению в $G$ бесконечной цепочки $C(p_{j_1}) \supsetneq C(p_{j_1}, p_{j_2}) \supsetneq \ldots \supsetneq C(p_{j_1}, p_{j_2}, \ldots, p_{j_n}) \supsetneq \ldots$, где $j_i \in J$. Аналогично будем считать, что $J = \mathbb{N}$, и что такая цепочка у нас была с самого начала и обозначим ее через $C(a_1) \supsetneq C(a_1, a_2) \supsetneq \ldots \supsetneq C(a_1, a_2, \ldots, a_n) \supsetneq \ldots$. Отметим, что в данном случае $c(a_i) \neq \alpha(a_i)$ и $\Delta(\alpha(a_i))$ – связный граф.

Таким образом, для бесконечной строго убывающей цепочки централизаторов $C(a_1) \supsetneq C(a_1, a_2) \supsetneq \ldots \supsetneq C(a_1, a_2, \ldots, a_n) \supsetneq \ldots$ имеем два взаимоисключающих случая:

- для любого $i \in \mathbb{N}$ $c(a_i) = \alpha(a_i)$ (1 и 2.1);
- для любого $i \in \mathbb{N}$ $c(a_i) \neq \alpha(a_i)$ и $\Delta(\alpha(a_i))$ – связный граф (2.2).

В первом случае положим $\tilde{D}_1 := \alpha(a_1)$ и $\tilde{D}_i := \tilde{D}_{i-1} \cup \alpha(a_i)$. Так как $C(a_1, a_2, \ldots, a_i) \supsetneq C(a_1, a_2, \ldots, a_i, a_{i+1})$, то существует такой $b_{i+1}$, что $[b_{i+1}, a_j] = 1$ для всех $j \leq i$, и $[b_{i+1}, a_{i+1}] \neq 1$. Учитывая, что для каждого $i \in \mathbb{N}$ $c(a_i) = \alpha(a_i)$, получаем: $[b_{i+1}, c_i] = 1$ для всех $c_i \in \alpha(a_1) \cup \alpha(a_2) \cup \ldots \cup \alpha(a_i)$ и $[b_{i+1}, c_{i+1}] \neq 1$ для некоторого $c_{i+1} \in \alpha(a_{i+1})$. Таким образом, в $G$ справедлива бесконечная строго убывающая цепочка канонических централизаторов $C(\tilde{D}_1) \supsetneq C(\tilde{D}_2) \supsetneq \ldots \supsetneq C(\tilde{D}_i) \supsetneq \ldots$. По *предложению 2* в $G$ существует и бесконечная строго убывающая цепочка канонических централизаторов $C(D_1) \supsetneq C(D_2) \supsetneq \ldots \supsetneq C(D_i) \supsetneq \ldots$, где $D_i = \{d_1, \ldots, d_i\}$.

Перейдем ко второму случаю. По «$4 \Rightarrow 3$» из *леммы 2* в $G$ существует такая последовательность элементов $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, что для любого $i \in \mathbb{N}$ $[a_i, b_i] \neq 1$ и для любых $j < i$ $[a_j, b_i] = 1$. Положим $D_1 := \{d_1\}$, где $d_1 \in \alpha(a_1)$ такой, что $[d_1, b_1] \neq 1$. Если существует такая бесконечная подпоследовательность $I \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1\}$, что $[d_1, b_i] = 1$ для всех $i \in I$, то перейдем к ней и проделаем такую же процедуру для следующего $a_{minI}$.

Пусть такой подпоследовательности $I$ нет. Тогда рассмотрим бесконечную подпоследовательность $J \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1\}$ такую, что $[d_1, b_j] \neq 1$ для всех $j \in J$, и перейдем к ней. Без ограничения общности будем считать, что $J = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Заметим, что $\alpha(a_1) \subseteq \alpha(b_i)$ для всех $i > 1$. Действительно, ведь $[a_1, b_i] = 1$ и $[d_1, b_i] \neq 1$ для всех $i > 1$, а это значит, что $b_i$ можно записать в виде $b_i = a_1^k \cdot w_i$, где $k \in \mathbb{N}$ и $[w_i, a_1] = 1$. Тогда обозначим через $\tilde{b}_i$ элемент, полученный из $b_i$ удалением из его записи всех порождающих из множества $\alpha(a_1) \setminus \{d_1\}$ с сохранением всей остальной записи. Заметим, что для любого $i > 2$ невозможна ситуация $[a_2, \tilde{b}_i] \neq 1$, ведь тогда выходило бы что $a_2 = a_1^l$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$, а это невозможно, так как $[a_2, b_2] \neq 1$ и $[a_1, b_2] = 1$. Кроме того, невозможна и ситуация $[a_2, \tilde{b}_2] = 1$: в таком случае выходило бы что $[a_2, q] \neq 1$ для некоторого $q \in \alpha(a_1) \setminus \{d_1\}$, а ведь $[a_2, b_i] = 1$ для всех $i > 2$, и при этом $\alpha(a_1) \subseteq \alpha(b_i)$.

Продолжая данную процедуру, мы получим такую последовательность порождающих $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, для которой в $G$ справедлива бесконечная цепочка строго убывающих канонических централизаторов $C(D_1) \supsetneq C(D_2) \supsetneq \ldots \supsetneq C(D_n) \supsetneq \ldots$, где $D_i = \{d_1, \ldots, d_i\}$. □

В работе [18] из доказательства основной теоремы следует, что для конечно порожденных частично коммутативных групп строгое включение централизаторов, как подмножеств элементов, в свободном случае и в случае двуступенно нильпотентного многообразия эквивалентны. Сформулируем и докажем аналогичное утверждение для бесконечно порожденных групп.

**Предложение 3.** *Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, $G$ — бесконечно порожденная свободная частично коммутативная группа с множеством порождающих $X$ и графом коммутативности $\Gamma$, и $G_{N_2}$ — бесконечно порожденная частично коммутативная двуступенно нильпотентная группа с тем же множеством порождающих $X$ и тем же графом коммутативности $\Gamma$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ и любых элементов $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}, x_{i_{m+1}} \in X$*

$$C_G(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) \supsetneq C_G(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}, x_{i_{m+1}}) \iff$$

$$C_{G_{N_2}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) \supsetneq C_{G_{N_2}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}, x_{i_{m+1}}).$$

*Доказательство.* «$\Leftarrow$». Пусть $C_{G_{N_2}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) \supsetneq C_{G_{N_2}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}, x_{i_{m+1}})$ для некоторых элементов $x_{i_j} \in X$ и для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда существует такой элемент $g \in G_{N_2}$, что

- $[g, x_{i_j}]_{G_{N_2}} = 1$ для всех $1 \leq j \leq m$; и
- $[g, x_{i_{m+1}}]_{G_{N_2}} \neq 1$.

Для $x \in X$ мы имеем

$$C_{G_{N_2}}(x) = \{x_{j_1}^{r_1} x_{j_2}^{r_2} \ldots x_{j_n}^{r_n} \Pi [x_p, x_t]_{G_{N_2}}^{s_{p,t}} | x_{j_i} \in X, r_i, s_{p,t} \in \mathbb{Z}, r_i = 0 \text{ если } [x, x_i]_{G_{N_2}} \neq 1\}.$$

Тогда если $g$ имеет нормальную форму $g = x_{j_1}^{r_1} x_{j_2}^{r_2} \ldots x_{j_n}^{r_n} \Pi [x_p, x_t]_{G_{N_2}}^{s_{p,t}}$, то

- $r_i = 0$ для всех таких $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, что $[x_i, x_{i_k}]_{G_{N_2}} \neq 1$ для некоторого $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$; и
- $r_l \neq 0$ для таких $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, что $[x_l, x_{i_{m+1}}]_{G_{N_2}} \neq 1$.

Заметим, что неравенство $r_l \neq 0$ влечет $[x_l, x_{i_j}]_{G_{N_2}} = 1$ для всех $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Поскольку $G$ и $G_{N_2}$ имеют один граф коммутативности, $x_l \in C_G(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$ и $x_l \notin C_G(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}, x_{i_{m+1}})$. Таким образом, $C_G(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) \supsetneq C_G(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}, x_{i_{m+1}})$.

«$\Rightarrow$». Пусть $C_G(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) \supsetneq C_G(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}, x_{i_{m+1}})$ для некоторых элементов $x_{i_j} \in X$ и для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда существует такой элемент $g \in G$, что

- $[g, x_{i_j}]_G = 1$ для всех $1 \leq j \leq m$; и
- $[g, x_{i_{m+1}}]_G \neq 1$.

Из, например, [30] нам известно, что если $H$ свободная частично коммутативная группа и $x, h \in H$ и $x$ — порождающий, то $[x, h]_H = 1$ тогда и только тогда, когда $[x, x']_H = 1$ для всех порождающих $x'$, встречающихся в записи $h$ минимальной длины. Тогда существует такой порождающий $y \in X$, что

- $[y, x_{i_j}]_G = 1$ для всех $1 \leq j \leq m$; и
- $[y, x_{i_{m+1}}]_G \neq 1$.

Поскольку $G$ и $G_{N_2}$ имеют один граф коммутативности, заметим, что

- $[y, x_{i_j}]_{G_{N_2}} = 1$ для всех $1 \leq j \leq m$; и
- $[y, x_{i_{m+1}}]_{G_{N_2}} \neq 1$.

Таким образом, $y \in C_{G_{N_2}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$ и $y \notin C_{G_{N_2}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}, x_{i_{m+1}})$, так что $C_{G_{N_2}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}) \supsetneq C_{G_{N_2}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}, x_{i_{m+1}})$. □

Следующая теорема является обобщением *следствия 1* и, соответственно, *теоремы 1* на случай бесконечно порожденных частично коммутативных групп.

**Теорема 2.** *Пусть $G$ — конечно (или бесконечно) порожденная свободная (или двуступенно нильпотентная) частично коммутативная* *группа, $d$ — конечное положительное целое число. Тогда если в $G$ существует строго убывающая цепочка централизаторов конечной длины*

$$C(A_1) \supsetneqq \ldots \supsetneqq C(A_d),$$

*где $A_i$ — конечные множества элементов группы $G$,*

*то в $G$ имеется строго убывающая цепочка канонических централизаторов такой же длины*

$$C(X_1) \supsetneqq \ldots \supsetneqq C(X_d),$$

*где $X_i$ — конечные подмножества порождающих группы $G$.*

*Кроме того, если в $G$ существует бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов*

$$C(A_1) \supsetneqq \ldots \supsetneqq C(A_d) \supsetneqq \ldots,$$

*где $A_i$ — конечные множества элементов группы $G$,*

*то в $G$ имеется бесконечная строго убывающая цепочка канонических централизаторов*

$$C(X_1) \supsetneqq \ldots \supsetneqq C(X_d) \supsetneqq \ldots,$$

*где $X_i$ — конечные подмножества порождающих группы $G$.*

*Доказательство.* Разобьем доказательство на два пункта: первый мы посвятим строго убывающей цепочке централизаторов конечной длины, а второй — бесконечной строго убывающей цепочке централизаторов.

1. Пусть в $G$ существует цепочка централизаторов $C(A_1) \supsetneqq \ldots \supsetneqq C(A_d)$ конечной длины, где все $A_i$ — конечные множества элементов из $G$, и пусть $\tilde{A} = \bigcup\limits_{i=1}^{d} A_i$ и $\alpha(\tilde{A})$ — множество всех порождающих группы $G$, которые участвуют в записях элементов из $\tilde{A}$. Очевидно, что $\alpha(\tilde{A})$ конечно. Построим $\alpha_{comp}(\tilde{A})$ по следующему алгоритму. В начале положим $\alpha_{comp}(\tilde{A}) = \alpha(\tilde{A})$. Рассмотрим множество $D_1 = C(A_2) \setminus C(A_1) \neq \emptyset$. Если в $D_1$ не существует такого элемента $d_1$, что $\alpha(d_1) \subseteq \alpha(\tilde{A})$, то положим $\alpha_{comp}(\tilde{A}) = \alpha_{comp}(\tilde{A}) \cup \alpha(d_1)$ для некоторого $d_1 \in D$, иначе оставим $\alpha_{comp}(\tilde{A})$ без изменения. Для всех последующих $i$ по множествам $D_i = C(A_{i+1}) \setminus C(A_i) \neq \emptyset$ мы расширяем $\alpha_{comp}(\tilde{A})$ описанными выше действиями. В результате будет построено подмножество $\alpha_{comp}(\tilde{A})$ порождающих группы $G$, которое пригодится нам далее.

Рассмотрим конечно порожденную частично коммутативную подгруппу $\tilde{G} < G$ на множестве порождающих $\alpha_{comp}(\tilde{A})$. Из построения $\alpha_{comp}(\tilde{A})$ в подгруппе $\tilde{G}$ имеет место цепочка централизаторов $C_{\tilde{G}}(A_1) \supsetneqq \ldots \supsetneqq C_{\tilde{G}}(A_d)$. Тогда по *следствию 1* в $\tilde{G}$ существует цепочка централизаторов $C_{\tilde{G}}(X_1) \supsetneqq \ldots \supsetneqq C_{\tilde{G}}(X_d)$ той же длины на подмножествах порождающих группы $\tilde{G}$, то есть подмножествах $\alpha_{comp}(\tilde{A})$, а значит и подмножествах множества всех порождающих группы $G$.

2. Пусть $G$ — двуступенно нильпотентная группа, и в $G$ имеется цепочка централизаторов $C(A_1) \supsetneq \ldots \supsetneq C(A_d) \supsetneq \ldots$ бесконечной длины, где все $A_i$ — конечные множества элементов из $G$. Согласно *лемме 2*, группа $G$ не является нетеровой по уравнениям от одной переменной. Тогда по *лемме 3* в $G$ существует бесконечная цепочка строго убывающих канонических централизаторов конечных подмножеств порождающих. Аналогичный результат для свободной частично коммутативной группы мы имеем посредством *предложения 3*. □

## 4 Нетеровость по уравнениям для частично коммутативных двуступенно нильпотентных групп

**Определение 4** ([22])**.** *Пусть $A$ – произвольное ассоциативное кольцо с единицей. Результат действия $\alpha \in A$ на $g \in G$ будем записывать в виде $g^\alpha$. Группа $G$ называется $A$-степенной группой, или $A$-группой, если на $G$ задано действие кольца $A$, удовлетворяющее следующим аксиомам:*

$$g^1 = g,\ g^0 = 1,\ 1^\alpha = 1,$$
$$g^{\alpha+\beta} = g^\alpha g^\beta,\ g^{\alpha\beta} = (g^\alpha)^\beta,$$
$$(h^{-1}gh)^\alpha = h^{-1}g^\alpha h,$$
$$[g,h] = 1 \Rightarrow (gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha,$$

*для всех $g, h \in G$ и $\alpha, \beta \in A$. Последнюю аксиому, введенную в [22], называют MR-аксиомой. Если выполнены все аксиомы, кроме MR-аксиомы, то группу $G$ называют степенной $A$-группой по Линдону [23].*

Говорят, что ненулевой элемент $\alpha$ кольца $A$ *действует точно* на $G$, если $G^\alpha \neq 1$. Кольцо скаляров $A$ действует точно на $G$, если каждый ненулевой элемент из $A$ действует точно на $G$.

Пусть $G$ и $H$ – $A$-группы. Тогда гомоморфизм $\psi : G \to H$ называется *$A$-гомоморфизмом*, если $\psi(g^\alpha) = (\psi(g))^\alpha$ для любых $g \in G$ и $\alpha \in A$.

Будем говорить, что $A$-группа $G$ аппроксимируется $A$-группой $H$, если для любого неединичного элемента $g \in G$ существует $A$-гомоморфизм $\psi : G_\Gamma \to H$ такой, что $\psi(g) \neq 1$.

Всюду далее через $F_2$ мы будем обозначать свободную двуступенно нильпотентную группу ранга 2, а через $F_2^\omega$ — счетную прямую степень $F_2$.

Из [21, Лемма 1] нам известно об аппроксимируемости произвольной конечно порожденной частично коммутативной двуступенно нильпотентной $\mathbb{Q}$-группы группой $F_2$. Обобщим этот результат на случаи бесконечного множества порождающих и произвольных колец скаляров:

**Лемма 4.** *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *всякая (в том числе и бесконечно порожденная) частично коммутативная двуступенно нильпотентная $A$-группа $G_\Gamma$ аппроксимируется $A$-группой $F_2$ тогда и только тогда, когда кольцо*

*скаляров $A$ такое, что верна следующая пара импликаций:*

$$\forall \alpha \in A(\exists g \in G_\Gamma(g^\alpha \neq 1) \Rightarrow \exists w \in F_2(w^\alpha \neq 1)),$$

$$\forall \alpha \in A(\exists g \in G'_\Gamma(g^\alpha \neq 1) \Rightarrow \exists w_1, w_2 \in F_2([w_1, w_2]^\alpha \neq 1)),$$

*где $G'_\Gamma$ – коммутант группы $G_\Gamma$;*

(2) *всякая (в том числе и бесконечно порожденная) частично коммутативная двуступенно нильпотентная $\mathbb{Z}$-группа аппроксимируется свободной двуступенно нильпотентной $\mathbb{Z}$-группой ранга 2;*

(3) *всякая (в том числе и бесконечно порожденная) частично коммутативная двуступенно нильпотентная $\mathbb{Z}$-группа является подгруппой $F_2^\omega$.*

Пару импликаций из пункта 1 можно переформулировать, например, следующим образом: «каждый элемент кольца $A$, действующий точно на группе $G_\Gamma$, действует точно и на $F_2$» и «каждый элемент кольца $A$, действующий точно на коммутанте группы $G_\Gamma$, действует точно и на коммутанте группы $F_2$». Докажем эту лемму.

*Доказательство.* 1. $\Rightarrow$. Доказательство в эту сторону в целом повторяет схему доказательства [21, Лемма 1]. Пусть $\Gamma$ — произвольный граф, $G_\Gamma$ — частично коммутативная двуступенно нильпотентная $A$-группа, построенная по графу $\Gamma$, $F_2$ порождается множеством $\{y_1, y_2\}$. Необходимо показать, что для любого неединичного элемента $g \in G_\Gamma$ существует $A$-гомоморфизм $\psi : G_\Gamma \to F_2$ такой, что $\psi(g) \neq 1$. Пусть $G_\Gamma$ порождается множеством $X$ (возможно бесконечным), и неединичный элемент $g \in G_\Gamma$ имеет вид $g = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} [x_i, x_j]^{\beta_{ij}}$, где $x_1, \dots, x_n$ — элементы из $X$.

Рассмотрим два случая.

1) Пусть существует $\alpha_k \neq 0$ такое, что $x_k^{\alpha_k} \neq 1$. Тогда по первой импликации из условия существует слово $w(y_1, y_2) \in F_2$ такое, что $w^{\alpha_k} \neq 1$. Определим отображение $\psi$ следующим образом:

$$x_k \mapsto w, \ x_i \mapsto 1 \text{ для } i \neq k.$$

Очевидно, что образ элемента $g$ неединичен. Нетрудно проверить, что это отображение является $A$-гомоморфизмом.

2) Пусть $\alpha_i = 0$ или $x_i^{\alpha_i} = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда элемент $g$ имеет вид $g = \prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} [x_i, x_j]^{\beta_{ij}}$. Следовательно, существует $\beta_{kt} \neq 0$ такое, что $[x_k, x_t]^{\beta_{kt}} \neq 1$. Тогда по второй импликации из условия существуют слова $w_1(y_1, y_2), w_2(y_1, y_2) \in F_2$ такие, что $[w_1, w_2]^{\beta_{kt}} \neq 1$. Построим отображение $\psi$ следующим образом:

$$x_k \mapsto w_1, \ x_t \mapsto w_2, \ x_i \mapsto 1 \text{ для } i \neq k \text{ и } i \neq t.$$

Данное отображение переводит $[x_k, x_t]^{\beta_{kt}}$ в $[w_1, w_2]^{\beta_{kt}} \neq 1$. Нетрудно проверить, что оно является $A$-гомоморфизмом.

$\Leftarrow$. Пусть ложна первая импликация, то есть, существуют $\alpha \in A$ и $g \in G_\Gamma$ такие, что $g^\alpha \neq 1$, но при этом для любого $w \in F_2$ $w^\alpha = 1$. Тогда для любого $A$-гомоморфизма $\psi : G_\Gamma \to F_2$, очевидно, $\psi(g^\alpha) = (\psi(g))^\alpha = 1$. Следовательно, $A$-группа $G_\Gamma$ не аппроксимируется $A$-группой $F_2$.

Пусть ложна вторая импликация, то есть, существуют $\alpha \in A$ и $g \in G'_\Gamma$ такие, что $g^\alpha \neq 1$, но при этом для любых слов $w_1, w_2 \in F_2$ $[w_1, w_2]^\alpha = 1$. Так как $G_\Gamma$ – частично коммутативная двуступенно нильпотентная $A$-группа, то $g = \prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} [x_i, x_j]^{\beta_{ij}}$, где $x_1, \dots, x_n$ – элементы из множества порождающих группы $G_\Gamma$. Предположим, что $\psi : G_\Gamma \to F_2$ – такой $A$-гомоморфизм, что $\psi(g) \neq 1$. Тогда для некоторых пар $x_i, x_j$ $(1 \leq i < j \leq n)$ порождающих группы $G_\Gamma$ $\psi(x_i) = w_i$, $\psi(x_j) = w_j$ и $[w_i, w_j]^{\beta_{ij}} \neq 1$, где $w_i, w_j \in F_2$. Тогда, с использованием MR-аксиомы, хотя бы для одной пары $i, j$ $([w_i, w_j]^{\beta_{ij}})^\alpha \neq 1$. С другой стороны, так как $G_\Gamma$ двуступенно нильпотентна, $[w_i, w_j]^{\beta_{ij}} = [w_i, w_j^{\beta_{ij}}]$ и, учитывая ранее полученное неравенство, $[w_i, w_j^{\beta_{ij}}]^\alpha \neq 1$. Получили противоречие с тем, что мы изначально предполагали, что не существует пары слов $w_1, w_2 \in F_2$ такой, что $[w_1, w_2]^\alpha \neq 1$.

Таким образом, пункт 1 данной леммы доказан.

2. Кольцо скаляров $\mathbb{Z}$, очевидно, действует точно на группе $F_2$, поэтому справедлива первая импликация из утверждения пункта 1. Кроме того, в качестве элементов $w_1, w_2 \in F_2$ из второй импликации можем взять $y_1, y_2$ – порождающие группы $F_2$. Таким образом, утверждение пункта 2 следует из пункта 1, доказанного выше.

3. Результат [1, Лемма 1.6.2] по сути говорит нам о том, что произвольная группа $G$ аппроксимируется группой $H$ тогда и только тогда, когда $G$ вкладывается в некоторую прямую (возможно бесконечную) степень группы $H$. Из этого факта и уже доказанного выше пункта 2 непосредственно следует пункт 3. □

**Замечание 3.** *Если двуступенно нильпотентная группа $G$ является подгруппой $F_2^n$ для некоторого конечного натурального $n$, то $G$ нетерова по уравнениям. Действительно, группа $F_2^n$ конечно порождена, а значит и нетерова по уравнениям (см., например, [3, 4, 8]). Любая подгруппа нетеровой по уравнениям группы в свою очередь также нетерова по уравнениям (см., например, [3]). Таким образом, если частично коммутативная двуступенно нильпотентная группа не является нетеровой по уравнениям, то она не является подгруппой в группах $F_2^n$ для всех конечных натуральных $n$, и, по пункту 3 леммы 4, является подгруппой именно в $F_2^\omega$.*

Как было отмечено во введении, из работы [3] нам известен следующий вопрос: для каких групп из нетеровости по уравнениям от одной переменной следует нетеровость по уравнениям? Следующая теорема дает положительный ответ на этот вопрос для случая частично коммутативных двуступенно нильпотентных групп и позволяет при исследовании вопроса нетеровости по уравнениям для таких групп рассматривать только системы уравнений от одной переменной. Более того, с учетом *леммы 2*, она сводит распознавание нетеровости по уравнениям к вопросу существования бесконечной строго убывающей цепочки централизаторов.

**Теорема 3.** *Всякая частично коммутативная двуступенно нильпотентная группа является нетеровой по уравнениям тогда и только тогда, когда она является нетеровой по уравнениям от одной переменной.*

*Доказательство.* Если группа нетерова по уравнениям, то, по определению, она и 1-нетерова по уравнениям. Из, например, [1] известно, что конечно порожденные двуступенно нильпотентные группы нетеровы по уравнениям. Пусть $G$ – бесконечно порожденная частично коммутативная двуступенно нильпотентная группа. По пункту 3 *леммы 4*, $G$ является подгруппой $F_2^\omega$. Пусть $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ – порождающие группы $F_2^\omega$ ($[a_i, b_i] \neq 1$), $g_1, g_2, \dots$ – порождающие группы $G$, и в группе $F_2^\omega$ они имеют представления $g_i = a_{i_1}^{\alpha_{i_1}} b_{i_1}^{\beta_{i_1}} a_{i_2}^{\alpha_{i_2}} b_{i_2}^{\beta_{i_2}} \dots a_{i_{n_i}}^{\alpha_{i n_i}} b_{i_{n_i}}^{\beta_{i n_i}} \cdot c_i$, где $c_i$ – элемент коммутанта $F_2^\omega$. Далее опишем процедуру, идейно вдохновленную методом Гаусса приведения матрицы к верхнетреугольной форме.

Рассмотрим порождающий $g_1$ группы $G$. Без ограничения общности будем считать, что он имеет представление $g_1 = a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} a_2^{\alpha_2} b_2^{\beta_2} \dots a_{n_1}^{\alpha_{n_1}} b_{n_1}^{\beta_{n_1}} \cdot c_1$. Пусть $\alpha_1$ не равен нулю (иначе переименуем порождающие $a_i$ в $b_i$ и $b_i$ в $a_i$), и $g_i$ (где $i > 1$) – порождающий, в представлении которого присутствует $a_1$ с ненулевой степенью $\gamma_i$. Запишем на месте $g_i$ элемент $y_i = g_1^{-\gamma_i} \cdot g_i^{\alpha_1}$, приведенный к нормальной форме. Отметим, что в представлении элемента $y_i$ порождающего $a_1$ уже нет, и что $[g_1, g_i] = 1 \iff [g_1, y_i] = 1$. Если $y_i$ оказался равен единице или элементу из коммутанта, то удалим его из списка. Повторим эту процедуру до тех пор, пока $a_1$ не останется только в $g_1$. Переименуем все получившиеся элементы $y_i$ в $g_i$.

Пусть $g_j$ – первый элемент после $g_1$, в представлении которого присутствует $b_1$ с ненулевой степенью. Отметим, что $g_j$ не коммутирует с $g_1$. Возможны два случая: либо такой элемент $g_j$ существует, либо его нет. Если он есть, то поменяем его местами (и названиями) с $g_2$ и повторим процедуру с $g_2$ и $b_1$ и в результате избавимся от присутствия порождающего $b_1$ во всех $g_i$ ($i > 2$). В результате $g_2$ останется единственным элементом из текущего списка, который не коммутирует с $g_1$. Очевидно, что $C(g_1) \supsetneq C(g_1, g_2)$. Далее повторим процедуру для подсписка, начинающегося с $g_3$, и пары порождающих $a_2, b_2$.

Пусть такого $g_j$ нет, то есть и $a_1$, и $b_1$, коммутируют со всеми $g_i$ при $i > 1$. Тогда удалим из представления $g_1$ порождающие $a_1$ и $b_1$, а индексы оставшихся $a_i, b_i$ уменьшим на единицу: $a_2$ станет играть роль $a_1$, $b_2$ —

$b_1$, $a_3$ – $a_2$ и так далее. Если $g_1$ не стал равен единице или элементу из коммутанта, то повторим всю процедуру, начав с $a_1$, место которого по сути занял $a_2$. Если же $g_1$ оказался равным единице или элементу из коммутанта, то значит $g_1$ коммутирует со всеми остальными элементами из текущего списка. Тогда удалим его из списка и уменьшим номера оставшихся элементов на единицу: $g_2$ займет место $g_1$, $g_3$ займет место $g_2$ и так далее. Повторим процедуру для списка с обновленными метками элементов, начиная с $g_1$ и пары порождающих $a_2, b_2$.

Отметим, что на $i$-м шаге процедуры, когда мы избавляемся от $a_k$ или $b_k$ из записи элементов $g_j$ при $j > i$, элементы $g_t$, где $t \le i$, не меняются.

В результате выполнения описанной выше процедуры мы можем получить в списке либо конечное множество элементов, либо бесконечное. Пусть их конечное число. Заметим, что после каждого шага выполнения описанной выше процедуры истинность свойства некоммутативности пар элементов из списка остается неизменной. Действительно, если $[g_i, g_j] \neq 1$, где $i, j > 1$, то

$$[y_i, y_j] = [g_1^{-\gamma_i} \cdot g_i^{\alpha_1}, g_1^{-\gamma_j} \cdot g_j^{\alpha_1}] = [g_1^{-\gamma_i}, g_j^{\alpha_1}][g_i^{\alpha_1}, g_1^{-\gamma_j}][g_i^{\alpha_1}, g_j^{\alpha_1}] = \\ = [g_1^{-\gamma_i}, g_j^{\alpha_1}][g_i^{\alpha_1}, g_1^{-\gamma_j}][g_i, g_j]^{\alpha_1^2} \neq 1,$$

так как $G$ – частично коммутативная группа. Удаление же элемента $y_i$ на некотором шаге процедуры происходило только в случае, если $y_i$ (а значит и $g_i$) коммутировал со всеми остальными элементами. Следовательно, группа $G$ представляет собой прямое произведение $H \times A$, где $H$ – конечно порожденная двуступенно нильпотентная группа, а $A$ – бесконечно порожденная абелева группа. Группа $H$ является нетеровой по уравнениям [1]. Из, например, [1] известно, что абелевы группы нетеровы по уравнениям, соответственно и группа $A$ нетерова по уравнениям. Кроме того, из результатов работы [7] известно, что прямое произведение двух нетеровых по уравнениям групп нетерово по уравнениям. Таким образом, $G$ является нетеровой по уравнениям.

Рассмотрим случай, когда в результате описанной выше процедуры мы имеем бесконечное множество элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n \ldots$. Заметим, что для каждого нечетного $i$ в представлении $g_i$ имеется порождающий $a_i$ группы $F_2^{\omega}$, который при этом отсутствует в представлении $g_{i+1}$, а в $g_{i+1}$ при этом есть такой порождающий $b_i$, что $[a_i, b_i] \neq 1$. Тогда для любого нечетного $i$ справедливо, что $[g_i, g_{i+1}] \neq 1$. Кроме того отметим, что для любых $j > i+1$: $[g_i, g_j] = [g_{i+1}, g_j] = 1$. Таким образом, в группе $G$ имеет место следующая бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов: $C(g_1) \supsetneq C(g_1, g_3) \supsetneq \ldots \supsetneq C(g_1, g_3, \ldots, g_{2n-1}) \supsetneq \ldots$. Тогда по *лемме 2* группа $G$ не является 1-нетеровой по уравнениям. □

Как было отмечено во введении, в общем же случае нетеровость по уравнениям двуступенно нильпотентной группы не эквивалентна ее нетеровости по уравнениям от одной переменной. Приведем соответствующий пример группы, построенной в работе [10].

**Пример 1.** *Пусть* $G = \langle a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots, d_1, d_2, \ldots \mid [a_i, b_j] = [c_j, d_i], i > j, i, j \in \mathbb{N}\rangle$ *– двуступенно нильпотентная* $\mathbb{Z}$*-группа. Отметим, что* $G$ *не является частично коммутативной группой и не имеет кручения.*

*Группа* $G$ *не является нетеровой по уравнениям, так как для следующей последовательности уравнений от двух переменных* $x$ *и* $y$ *и последовательности пар элементов из* $G$ *выполнены условия леммы 1:*

$$\begin{cases} [x, b_1][y, c_1] = 1 \qquad (a_1, d_1) \\ [x, b_2][y, c_2] = 1 \qquad (a_2, d_2) \\ \qquad \vdots \\ [x, b_n][y, c_n] = 1 \qquad (a_n, d_n) \\ \qquad \vdots \end{cases}$$

*Кроме того, несложно заметить, что для группы* $G$ *справедливы выкладки из доказательства леммы 4 и потому она аппроксимируется группой* $F_2$*. Таким образом,* $G$ *является примером подгруппы в* $F_2^\omega$*, нетеровой по уравнениям от одной переменной, но не являющейся нетеровой по уравнениям (от двух переменных).*

## 5 О связи нетеровости по уравнениям частично коммутативной двуступенно нильпотентной группы с нетеровостью по уравнениям графа коммутативности

Ранее в [9, Теорема 1] было показано, что при исследовании вопроса нетеровости по уравнениям в языке графов достаточно рассматривать только уравнения вида $E(x, u)$, где $x$ — переменная, а $u$ — константный символ. На основе этого результата в [9, Теорема 3] на языке запрещенных подграфов были описаны все нетеровы по уравнениям простые графы и графы с петлями. Данное описание основано на понятии *совершенно ненётерова графа.*

**Определение 5** ([9])**.** *Граф называется совершенно ненетеровым, если он содержит бесконечную последовательность попарно различных вершин* $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ *такую, что каждая из вершин* $a_i$ *смежна со всеми вершинами* $b_j$ *при* $j < i$*, но не смежна с* $b_i$*.*

Напомним, что бесконечный простой граф называется *надкликой*, если он содержит в качестве индуцированного подграфа клику на счетном числе вершин. Понятие надклики для конечных графов при описании нетеровых по уравнениям графов не использовалось по причине того, что каждый конечный граф является нетеровым по уравнениям.

Результат [9, Теорема 3] в оригинальной формулировке выглядит следующим образом:

**Теорема 4.** *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Простой граф ненётеров по уравнениям тогда и только тогда, когда он либо совершенно ненётеров, либо является надкликой.*
(2) *Граф с петлями ненётеров по уравнениям тогда и только тогда, когда он совершенно ненётеров.*

Рассмотрим пару примеров из [11].

**Пример 2.** *Граф, изображенный на рис. 2, не является ни надкликой, ни совершенно ненетеровым, а потому он нетеров по уравнениям как в случае простого графа, так и в случае добавления петель в каждую из его вершин.*

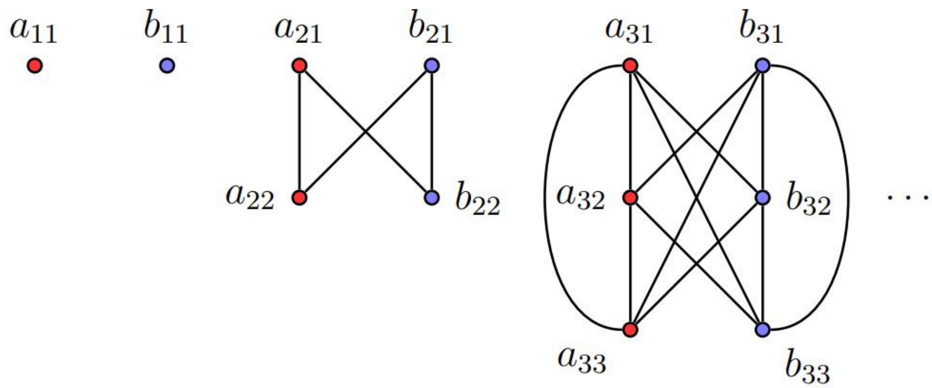


Рис. 2. Граф из *примера 2*.

**Пример 3.** *Граф, изображенный на рис. 3, является совершенно ненетеровым. Отсюда следует его ненетеровость как в случае простого графа, так и в случае графа с петлями.*

**Замечание 4.** *Простой граф* $\Gamma$ *совершенно ненетеров тогда и только тогда, когда граф с петлями* $\Gamma$ *совершенно ненетеров. Действительно, в определении совершенно ненетерова графа имеются лишь условия на отношения (или отсутствия отношений) смежности между попарно различными вершинами. Поэтому наличие или отсутствие петель не влияет на свойство совершенно ненетеровости графа.*

**Лемма 5.** *Граф* $\Gamma$ *(как простой, так и с петлями) совершенно ненетеров тогда и только тогда, когда в нем существует бесконечная строго убывающая цепочка ортогональных дополнений, то есть найдется последовательность вершин* $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, *для которой справедлива следующая бесконечная цепочка вложений:*

$$\Gamma = \emptyset^\perp \supsetneq \{b_1\}^\perp \supsetneq \{b_1, b_2\}^\perp \supsetneq \ldots \supsetneq \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}^\perp \supsetneq \ldots .$$

*Доказательство.* Доказательство проведем для графа с петлями. Истинность для простого графа будет следовать из рассуждений, приведенных в *замечании 4*.

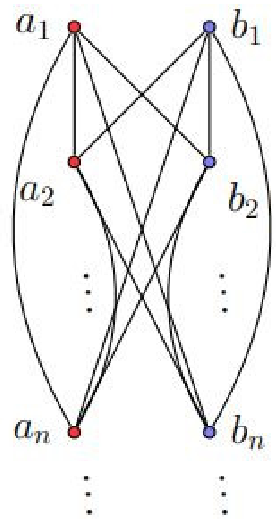


Рис. 3. Граф из *примера 3*.

Пусть граф с петлями $\Gamma$ совершенно ненетеров, то есть он содержит бесконечную последовательность попарно различных вершин $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ такую, что каждая из вершин $a_i$ смежна со всеми вершинами $b_j$ при $j < i$, но не смежна с $b_i$. Тогда $a_i \notin \{b_i\}^\perp$ и для всех $j < i$ $a_i \in \{b_j\}^\perp$, а значит для любого $i$ $\{b_1, b_2, \dots, b_i\}^\perp \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_i, b_{i+1}\}^\perp \ni a_{i+1}$. Таким образом, справедлива указанная в лемме бесконечная цепочка вложений.

Обратно. Заметим, что в произвольном графе с петлями для любых двух вершин $x$ и $y$ справедлива эквивалентность: $d(x,y) \le 1 \iff E(x,y)$. Тогда для произвольного подмножества вершин $A$ в графе с петлями $\Gamma$ ортогональное дополнение можно переписать следующим образом:

$$A^\perp = \{u \in \Gamma \mid \forall a \in A \ \Gamma \models E(u,a)\}.$$

Тогда получается, что в графе с петлями ортогональное дополнение $A^\perp$ представляет собой алгебраическое множество системы уравнений $S(x) = \{E(x,a) \mid a \in A\}$ над этим графом. Таким образом, мы имеем в $\Gamma$ бесконечную строго убывающую цепочку алгебраических множеств. Тогда, по [1, Теорема 2.5.4], $\Gamma$ не является нетеровым по уравнениям. Следовательно, по *теореме 4*, $\Gamma$ совершенно ненетеров. □

Исходя из *теоремы 2, замечания 2 и леммы 5*, существование бесконечной строго убывающей цепочки централизаторов в группе $G$ эквивалентно существованию бесконечной строго убывающей цепочки ортогональных дополнений в ее графе коммутативности $\Gamma_G$. При этом, исходя из *замечания 4*, граф $\Gamma_G$ можно рассматривать в категории графов с петлями.

Подытожим основной результат данной работы в виде следующей теоремы.

**Теорема 5.** *Пусть $G$ – двуступенно нильпотентная группа без кручения. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *$G$ не является нетеровой по уравнениям от одной переменной;*
(2) *в группе $G$ существует бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов конечных множеств элементов из $G$.*

*Если $G$ к тому же является частично коммутативной группой, то каждое из этих условий по отдельности эквивалентно каждому из следующих условий:*

(3) *$G$ не является нетеровой по уравнениям;*
(4) *существует последовательность попарно различных $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ порождающих группы $G$ такая, что для любых $i$ $[a_i, b_i] \neq 1$ и для всех $j < i$ $[a_i, b_j] = 1$;*
(5) *граф коммутативности с петлями группы $G$ не является нетеровым по уравнениям;*
(6) *граф коммутативности группы $G$ является совершенно ненетеровым.*

*Доказательство.* Для любой двуступенно нильпотентной группы без кручения имеем «1 $\iff$ 2» в силу *леммы 2*.

Пусть $G$ – частично коммутативная двуступенно нильпотентная группа. Эквивалентность «4 $\iff$ 1» истинна в силу *теоремы 3*. «2 $\iff$ 7», как тоже уже было отмечено, справедлива в силу *теоремы 2*, *замечания 2* и *леммы 5*. «7 $\iff$ 5» очевидна из определений совершенно ненетерова графа и частично коммутативной группы, а именно: две различные вершины $a$ и $b$ из графа $\Gamma$ смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им порождающие не коммутируют. Вытекающая из *замечания 4* и *теоремы 4* эквивалентность «7 $\iff$ 6» завершает доказательство. □

**Замечание 5.** *В случае, когда граф коммутативности является кликой, соответствующая частично коммутативная группа абелева. Из, например, [1] известно, что абелевы группы нетеровы по уравнениям. Таким образом, нетеровость по уравнениям графа коммутативности, рассматриваемого в категории простых графов, не эквивалентна нетеровости по уравнениям соответствующей ему частично коммутативной группы.*

Продемонстрируем применение *теоремы 5* на той же паре примеров из [11].

**Пример 4.** *Частично коммутативная двуступенно нильпотентная группа $G = \langle a_{11}, b_{11}, a_{21}, b_{21}, a_{22}, b_{22}, \ldots, a_{n1}, b_{n1}, \ldots, a_{nn}, b_{nn}, \ldots \mid [a_{ij}, b_{ik}] = 1$ для всех $j \neq k\rangle$, построенная по графу коммутативности из примера*

*2, содержит сколь угодно длинные (но не бесконечные) строго убывающие цепочки канонических централизаторов, а потому, по теореме 5, она является нетеровой по уравнениям.*

**Пример 5.** *Частично коммутативная двуступенно нильпотентная группа* $H = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots \mid [a_i, b_j] = 1$ *для всех* $i \neq j\rangle$, *построенная по графу коммутативности из примера 3, не является 1-нетеровой по уравнениям группой, так как в ней имеется бесконечная строго убывающая цепочка централизаторов. Систему уравнений над* $H$, *не эквивалентную никакой своей конечной подсистеме, можно найти, например, одним из следующих способов:*

(1) *по бесконечной строго убывающей цепочке канонических централизаторов в* $H$;
(2) *по последовательности попарно различных вершин, определяющих совершенную ненетеровость графа коммутативности группы* $H$;
(3) *по бесконечной строго убывающей цепочке ортогональных дополнений в графе коммутативности группы* $H$ *(лемма 5).*

*В данном примере такой системой уравнений является*

$$S(x) = \{[x, b_i] = 1\}_{i \in \mathbb{N}}.$$

## References

[1] E. Daniyarova, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, *Algebraic geometry over algebraic systems*, Publishing House of SB RAS, Novosibirsk, 2016.

[2] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Roman'kov, *Two Theorems about Equationally Noetherian Groups*, Journal of Algebra, **194**:2 (1997), 654–664.

[3] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, *Algebraic geometry over groups I: Algebraic sets and ideal theory*, Journal of Algebra, **219**:1 (1999), 16–79.

[4] R. Bryant, *The verbal topology of a group*, Journal of Algebra, **48** (1977), 340—346.

[5] E. Daniyarova, A. Miasnikov, V. Remeslennikov, *Unification theorems in algebraic geometry*, Conference: Aspects of Infinite Groups - A Festschrift in Honor of Anthony Gaglione (2008), 80—111.

[6] M.V. Kotov, *Several remarks on equationally Noetherian property*, Herald of Omsk University, **2013**:2 (2013), 24–28.

[7] M. Shahryari, A. Shevlyakov, *Direct products, varieties, and compactness conditions*, Groups, Complexity, Cryptology, **9**:2 (2017), 159–166.

[8] M. Valiunas, *On equationally Noetherian and residually finite groups*, Journal of Algebra, **587** (2021), 638–677.

[9] I.M. Buchinskiy, A.V. Treyer, *On graphs that are not equationally Noetherian*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **20**:2 (2023), 580–587.

[10] A.V. Treier, *Noethericity by equations and chains of centralizers in groups*, Herald of Omsk University, **2024**:1 (2024), 4–7.

[11] I.M. Buchinskiy, *Equations in one variable over two-step nilpotent groups and chains of centralizers*, Herald of Omsk University, **2024**:1 (2024), 33–41.

[12] B. Plotkin, *Varieties of algebras and algebraic varieties*, Israel Journal of Mathematics, **96** (1996), 511–522.

[13] A.J. Duncan, I.V. Kazachkov, V.N. Remeslennikov, *Centraliser Dimension of Partially Commutative Groups*, Geometriae Dedicata, **120** (2006), 73—97.
[14] A.J. Duncan, I.V. Kazachkov, V.N. Remeslennikov, *Centraliser dimension and universal classes of groups*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **3** (2006), 197—215.
[15] A.J. Duncan, I.V. Kazachkov, V.N. Remeslennikov, *Orthogonal systems in finite graphs*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **5** (2008), 151–176.
[16] A. Myasnikov, P. Shumyatsky, *Discriminating groups and c-dimension*, Journal of Group Theory, **7**:1 (2004), 135–142.
[17] A.J. Duncan, I.V. Kazachkov, V.N. Remeslennikov, *Parabolic and quasiparabolic subgroups of free partially commutative groups*, Journal of Algebra, **318**:2 (2007), 918—932.
[18] V. Blatherwick, *Centraliser dimension of free partially commutative nilpotent groups of class 2*, Glasgow Mathematical Journal, **50**:2 (2008), 251–269.
[19] A.A. Mishchenko, A.V. Treier, *Structure of centralizers for a partially commutative nilpotent $\mathbb{Q}$-group of class two*, Herald of Omsk University, Special edition (2007), 98–102.
[20] V.N. Remeslennikov, A.V. Treier, Structure of the automorphism group for partially commutative class two nilpotent groups, Algebra and Logic, **49**:1 (2010), 43–67.
[21] A.A. Mishchenko, *Structure of coordinate groups for algebraic sets in partially commutative nilpotent groups*, Algebra and Logic, **48**:2 (2009), 378–399.
[22] A.G. Myasnikov, V.N. Remeslennikov , *Groups with exponents I. Fundamentals of the theory and tensor completions*, Siberian Mathematical Journal, **35**:5 (1994), 1106–1118.
[23] R.C. Lyndon, *Groups with parametric exponents*, Trans. Amer. Math. Soc., **96** (1960), 518–533.
[24] M.G. Amaglobeli, V.N. Remeslennikov, *Extension of a centralizer in nilpotent groups*, Siberian Mathematical Journal, **54**:1 (2013), 8–19.
[25] M.G. Amaglobeli, T. Bokelavadze, *On nilpotent power MR-groups*, Itogi Nauki i Tekhniki. Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory, **177** (2020), 3–9.
[26] M.G. Amaglobeli, *Varieties of exponential MR-groups*, Doklady Rossijskoj Akademii Nauk. Mathematika, Informatika, Processy Upravlenia, **490** (2020), 5–8.
[27] R. Diestel *Graph theory*, Springer Berlin, Heidelberg, 2017.
[28] M.I. Kargapolov , Ju.I. Merzljakov, *Fundamentals of the Theory of Groups*, Springer New York, NY, 1979.
[29] S. Humphries, *On representations of Artin groups and the Tits conjecture*, Journal of Algebra, **169**:3 (1994), 847–862.
[30] E.S. Esyp, I.V. Kazatchkov, V.N. Remeslennikov, *Divisibility Theory and Complexity of Algorithms for Free Partially Commutative Groups*, Groups, Languages, Algorithms. Contemporary Mathematics, **378** (2005), 319–348.

Ivan Mikhailovich Buchinskiy
Omsk branch of Sobolev Institute of Mathematics,
Pevtsova street, 13,
644043, Omsk, Russia
*Email address*: buchvan@mail.ru