S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 22, стр. XXX–YYY (2025) УДК 519.174.5
DOI 10.17377/semi.2025.01.xx MSC 05C70

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ НЭШ-ВИЛЬЯМСА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

А.Н. ГЛЕБОВ

Abstract. The famous Nash-Williams' Theorem states that the edge set of a multigraph $G = (V, E)$ can be decomposed into k forests iff for every subset $X \subseteq V$ the induced subgraph $G[X]$ contains at most $k(|X|-1)$ edges. In 2017, Glebov conjectured that if a graph G satisfies the conditions of Nash-Williams' Theorem and has minimum degree $\delta(G) \geq k+1$, then its edge set can be decomposed into k forests such that none of these forests has an isolated vertex. Here we prove this conjecture. Moreover, we present a new proof of Nash-Williams' Theorem which allows us to prove a more general result on edge decomposition of a multigraph into k forests such that the size of connected components in these forests is greater than a given constant.

Keywords: graph, multigraph, tree, forest, decomposition, arboricity, Nash-Williams' Theorem, cover index.

1. Введение

В настоящей работе через $G = (V, E)$ обозначается конечный неориентированный мультиграф с множеством вершин V и множеством рёбер E, Через $v(G) = |V|$ и $e(G) = |E|$ обозначается число вершин и число рёбер мультиграфа G соответственно. Будем говорить, что ребро $e \in E$ *инцидентно* вершине $v \in V$ (или что e *покрывает* v), если вершина v является концом ребра e. *Степенью* $d(v)$ вершины $v \in V$ в G называется число инцидентных v рёбер.

Glebov, A.N., A new proof of Nash-Williams' Theorem and its applications.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0017).

Поступила ?? декабря 2024 г., опубликована X Y 2025 г.

Через $\delta(G)$ и $\Delta(G)$ обозначается минимальная и максимальная степень вершины мультиграфа G соответственно. Для каждой пары вершин $u, v \in V$ через $\mu(uv)$ обозначается *кратность мультиребра* uv в G, то есть количество рёбер в E с концами u и v. Через $\mu(G)$ обозначается максимальная кратность мультиребра в мультиграфе G. Ясно, что G является простым графом тогда и только тогда, когда $\mu(G) \leq 1$.

Лесом называется простой граф без циклов. Для каждого подмножества вершин $X \subseteq V$ мультиграфа G через $G[X]$ обозначается подграф в G, *порождённый* множеством вершин X. Для каждого подмножества рёбер $F \subseteq E$ через $G < F >= (V, F)$ обозначается подграф в G с множеством вершин V и множеством рёбер F.

Раскраской рёбер мультиграфа $G = (V, E)$ в k цветов (или *k-раскраской рёбер G*) называется произвольное отображение $c : E \to K$, где $K = \{1, 2, \ldots, k\}$ называется *множеством цветов*. Для каждого ребра $e \in E$ число $c(e)$ называется *цветом* ребра e. Для каждого цвета $i \in K$ через E_i обозначается соответствующий ему *цветовой класс*, то есть множество $E_i = c^{-1}(i)$ всех рёбер цвета i в G. Раскраску рёбер мультиграфа G назовём *древесной*, если для каждого цветового класса E_i соответствующий подграф $G < E_i >$ является лесом.

Раскраску рёбер G назовём *покрывающей*, если каждая вершина мультиграфа G покрыта рёбрами всех цветов, то есть каждый цветовой класс E_i является *рёберным покрытием* G. Далее мы рассмотрим более общее понятие t-покрывающей раскраски рёбер. Пусть t — натуральное число. Раскраску рёбер мультиграфа G назовём *t-покрывающей*, если для любого цвета $i \in K$ каждая компонента связности соответствующего подграфа $G < E_i >$ содержит не менее t вершин. Из данных определений следует, что покрывающая раскраска рёбер мультиграфа является частным случаем t-покрывающей раскраски при $t = 2$.

Иногда при изучении раскрасок рёбер графов и мультиграфов бывает полезно рассматривать ситуации, когда одновременно выполняются два важных свойства, каждое из которых заслуживает быть предметом самостоятельного исследования. Так в работе [1] изучались раскраски рёбер мультиграфов, которые одновременно являются древесными и покрывающими. Иными словами, в [1] исследовались такие древесные раскраски рёбер мультиграфов, что множество рёбер каждого цвета порождает лес без изолированных вершин.

Хорошо известен следующий критерий существования древесной раскраски рёбер мультиграфа в k цветов:

Теорема 1. *(Нэш-Вильямс)* [4, 5] *Для мультиграфа $G = (V, E)$ существует древесная k-раскраска рёбер, если и только если для любого подмножества вершин $X \subseteq V$ число рёбер в порождённом подграфе $G[X]$ не превосходит $k(|X| - 1)$.*

Наименьшее число k, для которого существует древесная k-раскраска рёбер мультиграфа G называется его *древесностью* и обозначется через $\gamma(G)$. Из теоремы Нэш-Вильямса следует явная формула для вычисления древесности мультиграфа: $\gamma(G) = \lceil Arb(G) \rceil$, где число

$$Arb(G) = \max\left\{ \frac{e(G[X])}{|X| - 1} \mid X \subseteq V,\ |X| > 1 \right\}$$

называется *дробной древесностью* мультиграфа G.

Что касается покрывающей раскраски рёбер мультиграфа, Гуптой [2, 3] были получены следующие достаточные условия её существования.

Теорема 2. [2, 3] *Пусть G — мультиграф с минимальной степенью $\delta(G)$ и максимальной кратностью мультиребра $\mu(G)$. Тогда существует покрывающая раскраска рёбер G в $\delta(G) - \mu(G)$ цветов. При этом если G — двудольный граф, то существует покрывающая раскраска рёбер G в $\delta(G)$ цветов.*

В [1] было доказано, что при определённых условиях одновременное выполненеие требований из теорем 1 и 2 влечёт существование такой k-раскраски рёбер мультиграфа, которая одновременно является древесной и покрывающей.

Теорема 3. [1] *Пусть $k \geq 2$ — целое число, и $G = (V, E)$ — мультиграф с древесностью $\gamma(G) \leq k$, удовлетворяющий одному из условий:*

(1) G — двудольный и $\delta(G) \geq k$;

(2) $k = 2$ и $\delta(G) \geq 3$.

Тогда существует древесная покрывающая k-раскраска рёбер G.

Также в [1] была сформулирована следующая

Гипотеза 1. [1] *Для любого графа G с древесностью $\gamma(G) \leq k$ и минимальной степенью $\delta(G) \geq k+1$ существует древесная покрывающая k-раскраска рёбер.*

В [1] было отмечено, что оценка на минимальную степень графа в гипотезе 1 является неулучшаемой, что следует из существования k-регулярного графа G с $\chi'(G) = k+1$. В настояшей работе подтверждается справедливость гипотезы 1 и доказывается следующий более общий факт:

Теорема 4. *Пусть для мультиграфа G существует древесная k-раскраска его рёбер (т.е. $\gamma(G) \leq k$) и существует t-покрывающая k-раскраска рёбер G. Тогда существует древесная t-покрывающая k-раскраска рёбер G.*

Заметим, что из теорем 2 и 4 (при $t = 2$) следует справедливость гипотезы 1 а также тот факт, что для двудольного графа G с древесностью $\gamma(G) \leq k$ и минимальной степенью $\delta(G) \geq k$ существует древесная покрывающая k-раскраска рёбер.

Предложенное ниже доказательство теоремы 4 основано на преобразовании произвольной k-раскраски рёбер мультиграфа в его древесную k-раскраску путём последовательной перекраски рёбер. Назовём перекраску ребра $e = uv$ из цвета i в цвет j *цикловой перекраской*, если в подграфе $G < E_i >$ ребро e принадлежит какому-либо циклу. Заметим, что после цикловой перекраски ребра e все множества вершин компонент связности подграфа $G < E_i >$ не меняются, а множества вершин компонент связности подграфа $G < E_j >$ либо не меняются (если в этом подграфе вершины u и v принадлежат одной компоненте), либо два таких подмножества (содержащие вершины u и v соответственно) объединяются в одно подмножество. Таким образом, при любой последовательности цикловых перекрасок множества вершин всех компонент связности во всех подграфах $G < E_m >$ $(m = 1, \ldots, k)$ могут только увеличиваться. Отсюда следует, что если начальная k-раскраска рёбер мультиграфа G является t-покрывающей, то и полученная в конце k-раскраска рёбер G также является t-покрывающей.

Наш основной результат о цикловой перекраске рёбер состоит в следующем:

Теорема 5. *Пусть для мультиграфа G существует древесная k-раскраска его рёбер (т.е. $\gamma(G) \leq k$). Тогда из любой начальной k-раскраски рёбер G последовательностью цикловых перекрасок можно получить древесную k-раскраску рёбер G.*

Заметим, что из теоремы 5 следует как теорема 1 (Нэш-Вильямса), так и теорема 4. Последний факт следует из того, что если в качестве начальной k-раскраски рёбер G в теореме 5 выбрать t-покрывающую раскраску, то согласно сделанному выше замечанию, эта раскраска будет преобразована в древесную t-покрывающую k-раскраску рёбер G.

Таким образом, для доказательства теоремы 4 и гипотезы 1 достаточно доказать теорему 5. Этому доказательству посвящена оставшаяся часть статьи.

2. Доказательство теоремы о цикловой перекраске рёбер

Пусть мультиграф $G = (V, E)$ является контрпримером к теореме 5 с минимальным числом рёбер. Очевидно, что $|E| > 1$. Рассмотрим произвольную начальную k-раскраску $c_0 : E \to K = \{1, 2, \ldots, k\}$ рёбер G. Выберем произвольное ребро $e_0 = ab \in E$. Без ограничения общности будем считать, что $c_0(e_0) = 1$. Рассмотрим в G подграф $G' = G - e_0$ с множеством вершин V и множеством рёбер $E' = E \setminus \{e_0\}$. Обозначим через c'_0 ограничение k-раскраски c_0 на множество рёбер E'. Из минимальности контрпримера G следует, что раскраска c'_0 может быть последовательностью цикловых перекрасок преобразована в древесную k-раскраску c' рёбер подграфа G'. Очевидно, что все указанные перекраски являются также цикловыми перекрасками рёбер мультиграфа G, где в качестве начальной раскраски выбрана c_0. Таким образом, раскраска c_0 с помощью указанной последовательности цикловых перекрасок преобразуется в такую k-раскраску c_1 рёбер G, что все подграфы $G < E_i >$ при $i = 2, \ldots, k$ являются лесами, а подграф $G < E_1 >$ либо является лесом, либо содержит единственный цикл C_0, включающий в себя ребро e_0. Если $G < E_1 >$ — лес, то раскраска c_1 является искомой древесной k-раскраской рёбер G.

Допустим, что подграф $G < E_1 >$ содержит единственный цикл $C_0 = (V_0, E_0)$, где $e_0 \in E_0$. Тогда при любой цикловой перекраске произвольного ребра $e \in E_0$ в любой цвет $j \in \{2, \ldots, k\}$ подграф $G < E_1 >$ становится лесом, а подграф $G < E_j >$ либо остаётся лесом, либо в нём появляется единственный цикл C, включающий в себя ребро e. В первом случае цикловую перекраску ребра e назовём *успешной*. Ясно, что после успешной перекраски образуется искомая древесная k-раскраска рёбер G.

Допустим, что перекраска ребра e в цвет j не является успешной. Тогда подграф $G < E_j >$ содержит единственный цикл C, а все другие подграфы $G < E_m >$ при $m \neq j$ являются лесами. В таком случае последовательность цикловых перекрасок можно продолжить, перекрашивая любое ребро $e' \in C$ в любой цвет $m \neq j$. Если эту последовательность перекрасок можно продолжить таким образом, что в какой-то момент она оканчивается успешной перекраской, то получаем искомую древесную k-раскраску рёбер G.

Допустим, что никакая последовательность цикловых перекрасок рёбер G, начинающаяся с раскраски c_1, не оканчивается успешной перекраской. Тогда для любой k-раскраски рёбер G, полученной из раскраски c_1 путём последовательных цикловых перекрасок рёбер, в точности один подграф $G < E_i >$ содержит единственный цикл C, а все другие подграфы $G < E_m >$ при $m \neq i$ являются лесами. Будем говорить, что вершина $v \in V$ является C-*достижимой*, если из раскраски c_1 последовательностью цикловых перекрасок можно получить такую k-раскраску рёбер G, что вершина v принадлежит единственному циклу C в соответствующем подграфе $G < E_i >$. Обозначим множество всех C-достижимых вершин мультиграфа G через Z, а порождённый ими подграф $G[Z]$ — через $H = (Z, E_H)$.

Для каждого $j = 1, \dots, k$ положим $E'_j = E_j \cap E_H$, где E_j — множество всех рёбер цвета j в раскраске c_1. Рассмотрим в H подграфы $H_j = H < E'_j >= (Z, E'_j)$, где $j = 1, \dots, k$. Будем считать, что при цикловой перекраске ребра $e \in E'_i$ из цвета i в любой другой цвет m ребро e переносится из множества E'_i в множество E'_m (а также из множества E_i в E_m). Тогда после любой последовательности цикловых перекрасок для каждого $j = 1, \dots, k$ выполняется равенство $E'_j = E_j \cap E_H$. Таким образом, множества рёбер всех подграфов H_j в любой момент образуют разбиение множества рёбер мультиграфа H, то есть выполняется равенство $E_H = E'_1 \cup E'_2 \cup \ldots \cup E'_k$.

Из существования древесной k-раскраски рёбер G и из теоремы 1, применённой к множеству $X = Z$, следует неравенство

$$k(|Z| - 1) \geq |E_H| = |E'_1| + |E'_2| + \ldots + |E'_k|. \tag{1}$$

Из определения множеств Z и E'_1 следует, что $V_0 \subseteq Z$, $E_0 \subseteq E'_1$. Следовательно, цикл C_0 содержится в подграфе H_1. Аналогично, после любой последовательности цикловых перекрасок, начинающейся с раскраски c_1, все вершины полученного цикла C принадлежат Z, а все его рёбра — одному из подмножеств E'_i, где $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Тогда цикл C содержится в подграфе H_i.

Докажем, что для некоторого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ подграф H_j является несвязным. Предположим, что для каждого $j = 1, 2, \dots, k$ подграф H_j связен. Тогда $|E'_j| \geq |Z| - 1$ и $|E'_1| \geq |Z|$, так как подграф H_1 содержит цикл C_0. Отсюда следует, что $|E'_1| + |E'_2| + \ldots + |E'_k| > k(|Z| - 1)$, что противоречит (1). Следовательно, существует $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, для которого подграф H_j не является связным. Обозначим через Z_1 множество вершин какой-либо компоненты связности в H_j. Положим $Z_2 = Z \setminus Z_1$. Тогда $Z_2 \neq \emptyset$ и в H_j (а значит, и в E_j) нет рёбер, соединяющих вершины из Z_1 с вершинами из Z_2.

Случай 1. Цикл C_0 содержит хотя бы одну вершину из Z_1 и хотя бы одну вершину из Z_2. В этом случае в C_0 есть ребро $e = xy$ такое, что $x \in Z_1$, $y \in Z_2$. Следовательно, $j \neq 1$. Докажем, что цикловая перекраска ребра e из цвета 1 в цвет j является успешной. Допустим, что после указанной перекраски в подграфе $G < E_j >$ образуется цикл C. Тогда $e \in C$. Из определения множества Z следует, что все вершины цикла C принадлежат Z. Поэтому цикл C содержится в подграфе H_j. Тогда до перекраски ребра e в цвет j в подграфе H_j имеется (x, y)-цепь $P = C - e$, где $x \in Z_1$, $y \in Z_2$. Это противоречит определению множеств Z_1 и Z_2. Следовательно, перекраска ребра e в цвет j является успешной.

Случай 2. Все вершины цикла C_0 содержатся в одном из множеств Z_1 или Z_2. Предположим, что $V_0 \subseteq Z_1$. Случай $V_0 \subseteq Z_2$ рассматривается аналогично. Из определения множества Z следует, что существует такая последовательность цикловых перекрасок рёбер, начинающаяся с раскраски c_1, что для полученного цикла C в подграфе H_i какая-то его вершина z принадлежит множеству Z_2. Рассмотрим минимальную такую последовательность цикловых перекрасок. Тогда при последней из этих перекрасок какое-то ребро $e' = x'y'$, принадлежащее циклу C' в некотором подграфе H_m, перекрашивается в цвет i. При этом все вершины цикла C' принадлежат множеству Z_1. Так как после перекраски ребра $e' = x'y'$ в цвет i это ребро принадлежит циклу C в подграфе H_i, то цикл C содержит вершины $x', y' \in Z_1$, а также вершину $z \in Z_2$. Отсюда следует, что в цикле C имеется такое ребро $e = xy$, что $x \in Z_1$, $y \in Z_2$. Получили ситуацию, аналогичную случаю 1, где вместо цикла C_0 рассматривается цикл C. Аналогично случаю 1, доказывается, что цикловая перекраска ребра e в цвет j является успешной. Теорема 5 доказана.

References

[1] A.N.Glebov, *An enhancement of Nash-Williams' Theorem on edge arboricity of graphs*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **11** (2017), 1324–1329.

[2] R.P. Gupta, *Studies in the theory of graphs*, Ph.D. Thesis, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1967).

[3] R.P. Gupta, *On the chromatic index and the cover index of a multigraph*, In: Y. Alavi, D.R. Lick (eds) Theory and Applications of Graphs. Lecture Notes in Mathematics, **642**. Springer, Berlin, Heidelberg (1978), 204–215.

[4] C.St.J.A. Nash-Williams, *Edge-disjoint spanning trees of finite graphs*, J. London Math. Soc., **36** (1961), 445–450.

[5] C.St.J.A. Nash-Williams, *Decomposition of finite graphs into forests*, J. London Math. Soc., **39** (1964), 12.

Aleksey Nikolaevich Glebov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: angle@math.nsc.ru