S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 539.311, 517.958
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 35Q74, 35Q93

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ О СОПРЯЖЕНИИ ВКЛЮЧЕНИЙ БЕРНУЛЛИ – ЭЙЛЕРА И ТИМОШЕНКО В УПРУГОМ ТЕЛЕ

И.В. Фанкина

Представлено П.П. Петровым

Abstract: We consider the equilibrium problem for a 2D elastic body with two thin elastic inclusions with a junction at a point. It is assumed that a crack exists between the inclusions and the body. Inequality-type boundary conditions are imposed at the crack faces to prevent mutual penetration. The problem depends on rigidity parameter of one of the inclusions: we are talking about family of problems. A weak convergence of solutions of the family of problems in suitable functional spaces is proved. By this convergence, we pass to the limit in the problems and establish the form of limit problem. Strong convergence of solutions of family of problems is also established. On its basis, the existence of a solution of the optimal control problem is proved. The optimal control problem is formulated in accordance with the Griffiths failure criterion, the control parameter is the rigidity parameter of the inclusion.

Fankina, I.V., Asymptotic analysis of junction problem for Euler – Bernoulli and Timoshenko inclusions in elastic body.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение No 075-15-2022-282 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

Keywords: elastic body, thin inclusion, rigidity parameter, junction conditions, crack, non-penetration conditions, variational inequality, optimal control.

1 Введение

В современной индустрии широко распространено использование композиционных материалов, в том числе состоящих из связующей матрицы и армирующих волокон. Востребованность композитов обусловлена, в частности, их лучшими механическими характеристиками по сравнению с традиционными материалами. Свойства материалов, из которых состоит композит, могут существенно различаться. Это может стать причиной возникновения трещины отслоения включения от упругой матрицы. Современный подход к описанию трещин основывается на применении нелинейных краевых условий, исключающих взаимное проникновение их противоположных берегов. Задачи с условиями непроникания формулируются в области с заранее неизвестной границей (зоны контакта и расхождения берегов трещины находятся в процессе решения задачи) и в целом являются нелинейными. Последние десятилетия характеризуются активным изучением моделей, описывающих задачи равновесия для упругих тел с тонкими включениями и трещинами с нелинейными краевыми условиями. В работах [1, 2, 3, 4, 5] рассмотрены задачи о равновесии упругих тел с упругими включениями, поведение которых описывается в рамках моделей балок Бернулли – Эйлера и Тимошенко; исследованы разрешимость и свойства решений задач, получены формулы для производных функционалов энергии по длине трещины. Статьи [6, 7, 8] посвящены изучению задач равновесия упругих тел с жесткими и слабоискревленными упругими включениями. Различные подходы к описанию включений без отслоения можно найти в [9, 10, 11, 12, 13]. В работах [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22] сформулированы задачи сопряжения тонких включений различной природы в упругих телах. В этих работах предполагается, что включения могут контактировать в концевых точках. Получены результаты, связанные с разрешимостью задач, свойствами решений задач, численным анализом и другими вопросами. В [23, 24, 25, 26] можно найти изучение задач о сопряжении стержней.

В данной работе рассматривается задача о равновесии двумерного упругого тела с двумя тонкими упругими включениями при наличии отслоения. Поведение тонких включений описывается в рамках моделей балки Бернулли – Эйлера и балки Тимошенко. Предполагается, что включения контактируют в точке. В работе [27] получен полный набор краевых условий в точке сопряжения включений. Кроме того, установлено, что поставленная задача имеет решение, а также получены формулировки задач, отвечающих предельным значениям параметра жесткости включения Бернулли – Эйлера в изотропном случае. В настоящей работе получены результаты, связанные с предельным переходом в семействе задач указанного выше типа, зависящих от параметра α, пропорционального модулю сдвига включения Тимошенко. В семействе задач с помощью вариационного подхода осуществлен предельный переход при стремлении α к бесконечности; получены вариационная и дифференциальная формулировки предельной задачи. Кроме того, доказана сильная сходимость решений семейства задач равновесия, на основе которой установлено существование решения задачи оптимального управления. Указанная задача сформулирована в соответствии с критерием разрушения Гриффитса, и параметр α в ней является управляющим.

2 Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с липшицевой границей Γ (Рис. 1). Пусть $\gamma_b = (-1, 0) \times \{0\}$, $\gamma_t = (0, 1) \times \{0\}$; $\gamma = \gamma_b \cup \gamma_t \cup \{(0, 0)\}$, причем $\bar{\gamma} \subset \Omega$, $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$. Через $\nu = (0, 1)$ обозначается нормаль единичной длины к γ; $\tau = (1, 0)$ – касательный вектор. С помощью направления ν определяется знак берега $\gamma^\pm$: знаки $\pm$ соответствуют положительному и отрицательному направлению нормали. Будет использовано обозначение $[h] = h^+ - h^-$ для скачка функции h на γ, где $h^\pm$ – следы функции h на берегах $\gamma^\pm$. Область Ω_γ соответствует упругому телу, сегменты γ_b и γ_t представляют собой упругие включения, поведение которых описывается уравнениями балок Бернулли – Эйлера и Тимошенко соответственно. Предполагается, что включения отслаиваются на γ^+, т.е. между включениями и упругой матрицей имеется трещина.

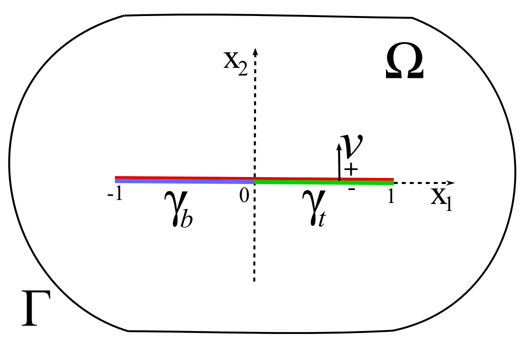

Рис. 1. Геометрия задачи.

Пусть $A = \{a_{ijkl}\}$ – тензор модулей упругости, обладающий свойствами симметрии и положительной определенности:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}, \;\; i, j, k, l = 1, 2,$$

$$a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq C|\xi|^2 \quad \text{для всех} \quad \xi_{ij}, \;\; \xi_{ij} = \xi_{ji}; \;\; C = \text{const} > 0.$$

Предполагается, что все величины с двумя нижними индексами симметричны по этим индексам, а также по повторяющимся индексам проводится суммирование. Полагаем, что $a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$.

Пусть $u = (u_1, u_2)$ – смещения точек упругого тела, $u_\nu = u_i\nu_i$, $u_\tau = u_i\tau_i$, $i = 1, 2$. Через $\varepsilon(u) = \{\varepsilon_{ij}(u)\}$ будет обозначаться тензор деформаций, $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), i, j = 1, 2$. Нижний индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей координате. Также вводится обозначение $\sigma = \sigma(u) = \{\sigma_{ij}(u)\}$ для тензора напряжений. Кроме того, $\sigma\nu = (\sigma_{1j}\nu_j, \sigma_{2j}\nu_j)$, $\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i$, $\sigma_\tau = \sigma_{ij}\nu_j\tau_i, i, j = 1, 2$. Пусть w, v – перемещения включений γ_b и γ_t вдоль осей x_1 и x_2 соответственно. Через φ обозначим угол поворота нормального сечения включения γ_t. Функции, определенные на γ_b и γ_t, отождествляются с функциями одной переменной x_1; $w,_1 = \frac{dw}{dx_1}$, $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Задача равновесия для упругого тела с отслоившимися тонкими включениями под действием заданных внешних сил $f \in L^2(\Omega)^2$ в дифференциальном виде формулируется следующим образом:
Найти такие функции $u = (u_1, u_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, w, v и φ, что

$$-\operatorname{div}\sigma = f, \;\; \sigma - A\varepsilon(u) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{1}$$

$$w,_{11} = \sigma_\tau^- \quad \text{на} \quad \gamma, \;\; v,_{1111} = [\sigma_\nu] \quad \text{на} \quad \gamma_b, \tag{2}$$

$$-\alpha v,_{11} - \alpha\varphi,_1 = [\sigma_\nu], \;\; -\varphi,_{11} + \alpha v,_1 + \alpha\varphi = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_t, \tag{3}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \;\; u_\tau^- = w, \;\; u_\nu^- = v \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{4}$$

$$[u_\nu] \ge 0, \;\; \sigma_\tau^+ = 0, \;\; \sigma_\nu^+ \le 0, \;\; \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{5}$$

$$w,_1 = v,_{111} = v,_{11} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = -1, \tag{6}$$

$$w,_1 = v,_1 + \varphi = \varphi,_1 = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 1, \tag{7}$$

$$w(0-) = w(0+), \;\; v(0-) = v(0+), \;\; v,_1(0-) = -\varphi(0+), \tag{8}$$

$$w,_1(0-) = w,_1(0+), \;\; -v,_{111}(0-) = (v,_1 + \varphi)(0+), \;\; v,_{11}(0-) = -\varphi,_1(0+). \tag{9}$$

Соотношения в (1) – это уравнение равновесия и уравнение состояния упругого тела. Уравнения в (2) и (3) описывают равновесие включений Бернулли – Эйлера и Тимошенко. Последние два условия в (4) означают, что вертикальные (вдоль оси x_2) и горизонтальные (вдоль оси x_1) перемещения упругого тела совпадают с соответствующими перемещениями включений γ_b и γ_t. Первое условие в (5) обеспечивает непроникание противоположных берегов $\gamma^\pm$ трещины отслоения. Условия (6), (7) означают равенство нулю продольных, поперечных сил и изгибающих моментов в концах балок Бернулли – Эйлера (при $x_1 = -1$) и Тимошенко (при $x_1 = 1$). Равенства (8), (9) – условия сопряжения включений в точке $(0, 0)$. Параметр $\alpha > 0$ пропорционален модулю сдвига включения Тимошенко.

В работе [27] рассмотрена близкая задача, описывающая сопряжение упругих включений в упругом теле при наличии трещины вдоль включения Бернулли – Эйлера. В соответствии с результатами, полученными в

[27], можно утверждать, что задача (1)-(9) эквивалентна на классе гладких решений следующей вариационной задаче:

$$\text{Найти такую } (u,w,v,\varphi)\in K, \text{ что} \tag{10}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u)\varepsilon(\bar u-u)+\int\limits_{\gamma}w,_1(\bar w,_1-w,_1)+\int\limits_{\gamma_b}v,_{11}(\bar v,_{11}-v,_{11})$$
$$+\int\limits_{\gamma_t}\varphi,_1(\bar\varphi,_1-\varphi,_1)+\alpha\int\limits_{\gamma_t}(v,_1+\varphi)(\bar v,_1+\bar\varphi-v,_1-\varphi)\geq\int\limits_{\Omega_\gamma}f(\bar u-u)$$
$$\text{для всех } (\bar u,\bar w,\bar v,\bar\varphi)\in K, \tag{11}$$

где множество допустимых перемещений имеет вид:

$$K=\{(\bar u,\bar w,\bar v,\bar\varphi)|\ \bar u\in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2,\ \bar w\in H^1(\gamma),\ \bar v\in H^1(\gamma_t),\ \bar v\in H^2(\gamma_b),$$
$$\bar\varphi\in H^1(\gamma_t);\ [\bar u_\nu]\geq 0,\ \bar u^-_\tau=\bar w,\ \bar u^-_\nu=\bar v \text{ на } \gamma;\ \bar v,_1(0-)=-\bar\varphi(0+)\},$$
$$H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)=\{\tilde u\in H^1(\Omega_\gamma)|\ \tilde u=0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Кроме того, существует решение задачи (10), (11) при $\alpha\in(0,\infty)$. Нетрудно заметить, что решение единственно.

3 Предельный переход при $\alpha\to\infty$

Рассмотрим семейство задач типа (10), (11), снабженных положительным параметром α:

$$\text{найти такую } (u^\alpha,w^\alpha,v^\alpha,\varphi^\alpha)\in K, \text{ что} \tag{12}$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u^\alpha)\varepsilon(\bar u-u^\alpha)+\int\limits_{\gamma}w^\alpha_{,1}(\bar w_{,1}-w^\alpha_{,1})+\int\limits_{\gamma_b}v^\alpha_{,11}(\bar v_{,11}-v^\alpha_{,11})+\int\limits_{\gamma_t}\varphi^\alpha_{,1}(\bar\varphi_{,1}-\varphi^\alpha_{,1})$$
$$+\alpha\int\limits_{\gamma_t}(v^\alpha_{,1}+\varphi^\alpha)(\bar v_{,1}+\bar\varphi-v^\alpha_{,1}-\varphi^\alpha)\geq\int\limits_{\Omega_\gamma}f(\bar u-u^\alpha)$$
$$\text{для всех } (\bar u,\bar w,\bar v,\bar\varphi)\in K. \tag{13}$$

Нас интересует, возможно ли перейти к пределу в семействе задач при $\alpha\to\infty$ и какой будет вид предельной задачи. С этой целью, покажем, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для подпоследовательности решений* $(u^\alpha,v^\alpha,w^\alpha,\varphi^\alpha)$ *семейства задач* (12), (13) *имеют место сходимости при* $\alpha\to\infty$*:*

$$u^\alpha\to u^\infty \quad \textit{слабо в} \quad H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2, \tag{14}$$
$$w^\alpha\to w^\infty \quad \textit{слабо в} \quad H^1(\gamma_b),\ v^\alpha\to v^\infty \quad \textit{слабо в} \quad H^2(\gamma_b), \tag{15}$$
$$w^\alpha\to w^\infty \quad \textit{слабо в} \quad H^1(\gamma_t),\ v^\alpha\to v^\infty \quad \textit{слабо в} \quad H^1(\gamma_t), \tag{16}$$
$$\varphi^\alpha\to\varphi^\infty \quad \textit{слабо в} \quad H^1(\gamma_t). \tag{17}$$

Доказательство. Выберем в качестве тестовой функции в неравенстве (13) поочередно $(\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{\varphi}) = 2(u^\alpha, w^\alpha, v^\alpha, \varphi^\alpha)$ и $(\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{\varphi}) = (0, 0, 0, 0)$. Тогда из вариационного неравенства следует равенство

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\alpha)\varepsilon(u^\alpha) + \int\limits_{\gamma} w^\alpha_{,1} w^\alpha_{,1} + \int\limits_{\gamma_b} v^\alpha_{,11} v^\alpha_{,11} + \int\limits_{\gamma_t} \varphi^\alpha_{,1}\varphi^\alpha_{,1} + \alpha \int\limits_{\gamma_t} (v^\alpha_{,1} + \varphi^\alpha)^2 = \int\limits_{\Omega_\gamma} f u^\alpha. \quad (18)$$

Обратимся к лемме [1, с. 4], в соответствии с которой

$$\delta \int\limits_{\gamma_t} ((v^\alpha)^2 + (w^\alpha)^2) + \int\limits_{\gamma_t} \varphi^\alpha_{,1}\varphi^\alpha_{,1} + \int\limits_{\gamma_t} w^\alpha_{,1} w^\alpha_{,1} + \int\limits_{\gamma_t} (v^\alpha_{,1} + \varphi^\alpha)^2 \geq c_0 \|(w^\alpha, v^\alpha, \varphi^\alpha)\|^2_{H^1(\gamma_t)^3}, \quad (19)$$

где $c_0 = \mathrm{const}$, δ – положительный малый параметр, который выбирается таким образом, чтобы была справедлива теорема о следе [28, гл. 3, § 5, п. 1] и, как следствие, выполнялись неравенства:

$$\frac{1}{4} \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\alpha)\varepsilon(u^\alpha) - \delta \int\limits_{\gamma_t} ((v^\alpha)^2 + (w^\alpha)^2) \geq 0, \quad (20)$$

$$\frac{1}{4} \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\alpha)\varepsilon(u^\alpha) - \delta \int\limits_{\gamma_b} ((v^\alpha)^2 + (w^\alpha)^2) \geq 0. \quad (21)$$

Запишем равенство (18) в виде

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\alpha)\varepsilon(u^\alpha) + \int\limits_{\gamma} w^\alpha_{,1} w^\alpha_{,1} + \int\limits_{\gamma_b} v^\alpha_{,11} v^\alpha_{,11} + \int\limits_{\gamma_t} \varphi^\alpha_{,1}\varphi^\alpha_{,1} + \alpha \int\limits_{\gamma_t} (v^\alpha_{,1} + \varphi^\alpha)^2 \pm \delta \int\limits_{\gamma_t} ((v^\alpha)^2 + (w^\alpha)^2) \pm \delta \int\limits_{\gamma_b} ((v^\alpha)^2 + (w^\alpha)^2) = \int\limits_{\Omega_\gamma} f u^\alpha.$$

Тогда, применяя здесь неравенство Коши – Буняковского для правой части равенства, первое неравенство Корна [29, гл. 1, § 1, п. 3], неравенства (19)-(21), можно получить оценки, равномерные по $\alpha \geq \alpha_0 > 0$:

$$\|u^\alpha\|_{H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2} \leq c, \ \|w^\alpha\|_{H^1(\gamma_b)} \leq c, \ \|v^\alpha\|_{H^2(\gamma_b)} \leq c, \quad (22)$$

$$\|(w^\alpha, v^\alpha, \varphi^\alpha)\|_{H^1(\gamma_t)^3} \leq c, \quad (23)$$

где c – постоянная, не зависящая от решения $(u^\alpha, w^\alpha, v^\alpha, \varphi^\alpha)$ и параметра α. Следствием полученных оценок является выполнение сходимостей (14)-(17). $\square$

Стоит отметить, что помимо оценок (22) и (23) из (18) следует неравенство
$$\alpha \int\limits_{\gamma_t} (v^\alpha_{,1} + \varphi^\alpha)^2 \le c. \tag{24}$$

В силу (24) для предельных функций в (16) и (17), справедливо равенство
$$\int\limits_{\gamma_t} (v^\infty_{,1} + \varphi^\infty)^2 = 0,$$
из которого следует, что
$$v^\infty_{,1} + \varphi^\infty = 0 \ \text{ на } \ \gamma_t, \ \ \text{т.е.} \ \ v^\infty(x_1) = c^\infty - \int\limits_0^{x_1} \varphi^\infty, \ c^\infty = \mathrm{const}. \tag{25}$$

Чтобы осуществить переход к пределу в (12), (13) при $\alpha \to \infty$, рассмотрим множество
$$K^\infty = \{(\bar u, \bar w, \bar v, \bar\varphi)|\ \bar u \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2,\ \bar w \in H^1(\gamma),\ \bar v \in H^2(\gamma_b),\ \bar\varphi \in H^1(\gamma_t);$$
$$[\bar u_\nu] \ge 0,\ \bar u^-_\tau = \bar w \text{ на } \gamma,\ \bar u^-_\nu = \bar v \text{ на } \gamma_b,$$
$$\bar u^-_\nu(x_1) = \bar c^\infty - \int\limits_0^{x_1} \bar\varphi \text{ на } \gamma_t,\ \bar c^\infty \in \mathbb{R};\ \bar v_{,1}(0-) = -\bar\varphi(0+)\}.$$

Пусть $(\bar u, \bar w, \bar v, \bar\varphi) \in K^\infty$. Тогда $(\bar u, \bar w, \bar v, \bar\varphi) \in K$ при $\bar v(x_1) = \bar c^\infty - \int\limits_0^{x_1} \bar\varphi$ на γ_t. Выбрав тестовую функцию в (13) такого вида, перейдем к нижнему пределу в (12), (13) при $\alpha \to \infty$ на основе сходимостей в лемме 1. В результате получим задачу:
$$\text{найти такую } (u^\infty, w^\infty, v^\infty, \varphi^\infty) \in K^\infty, \ \text{ что} \tag{26}$$
$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\infty)\varepsilon(\bar u - u^\infty) + \int\limits_\gamma w^\infty_{,1}(\bar w_{,1} - w^\infty_{,1})$$
$$+ \int\limits_{\gamma_b} v^\infty_{,11}(\bar v_{,11} - v^\infty_{,11}) + \int\limits_{\gamma_t} \varphi^\infty_{,1}(\bar\varphi_{,1} - \varphi^\infty_{,1}) \ge \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar u - u^\infty)$$
$$\text{для всех } (\bar u, \bar w, \bar v, \bar\varphi) \in K^\infty. \tag{27}$$

Несложно заметить, что решение задачи (26), (27) единственно. Это означает, что сходимости (14)-(17) справедливы для всей последовательности решений $(u^\alpha, w^\alpha, v^\alpha, \varphi^\alpha)$.

Получим дифференциальную постановку задачи (26), (27). Предположим, что решение задачи (26), (27) более гладкое. Рассмотрим сначала функцию $\xi \in C^\infty_0(\Omega_\gamma)^2$. Выбирая в (27) в качестве тестовой поочередно функции $(\bar u, \bar w, \bar v, \bar\varphi) = (u^\infty, v^\infty, w^\infty, \varphi^\infty) + (\xi, 0, 0, 0)$ и $(\bar u, \bar w, \bar v, \bar\varphi) =$

$(u^\infty, v^\infty, w^\infty, \varphi^\infty) - (\xi, 0, 0, 0)$, получим равенство, из которого в результате интегрирования по частям следует, что уравнение равновесия

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma$$

выполнено в смысле распределений.

Соотношения для компонент вектора напряжений на трещине отслоения

$$\sigma_\tau^+ = 0, \;\; \sigma_\nu^+ \le 0, \;\; \sigma_\nu^+ [u_\nu^\infty] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma \tag{28}$$

можно получить обычным для задач с условием непроникания способом, см. [1], [2].

Пусть в (27) пробная функция поочередно имеет вид $(\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{\varphi}) = (u^\infty, w^\infty, v^\infty, \varphi^\infty) + (\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{v}, \tilde{\varphi})$ и $(\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{\varphi}) = (u^\infty, w^\infty, v^\infty, \varphi^\infty) - (\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{v}, \tilde{\varphi})$, причем $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на γ, $(\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{v}, \tilde{\varphi}) \in K^\infty$. Тогда из (27) следует уравнение

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\infty) \varepsilon(\tilde{u}) + \int\limits_{\gamma} w^\infty_{,1} \tilde{w}_{,1} + \int\limits_{\gamma_b} v^\infty_{,11} \tilde{v}_{,11} + \int\limits_{\gamma_t} \varphi^\infty_{,1} \tilde{\varphi}_{,1} = \int\limits_{\Omega_\gamma} f \tilde{u}.$$

Интегрируя здесь по частям, получим равенство

$$\begin{aligned} -\int\limits_{\gamma} [\sigma\nu \cdot \tilde{u}] + \int\limits_{\gamma_b} v^\infty_{,1111} \tilde{v} - \int\limits_{\gamma_b} w^\infty_{,11} \tilde{w} - \int\limits_{\gamma_t} w^\infty_{,11} \tilde{w} - \int\limits_{\gamma_t} \varphi^\infty_{,11} \tilde{\varphi} \\ + v^\infty_{,11} \tilde{v}_{,1}\big|_{-1}^0 - v^\infty_{,111} \tilde{v}\big|_{-1}^0 + w^\infty_{,1} \tilde{w}\big|_{-1}^0 + w^\infty_{,1} \tilde{w}\big|_0^1 + \varphi^\infty_{,1} \tilde{\varphi}\big|_0^1 = 0, \end{aligned}$$

которое с учетом первого условия в (28) примет вид

$$\begin{aligned} -\int\limits_{\gamma_b} [\sigma_\nu] \tilde{u}_\nu + \int\limits_{\gamma_b} \sigma_\tau^- \tilde{u}_\tau^- - \int\limits_{\gamma_t} [\sigma_\nu] \tilde{u}_\nu + \int\limits_{\gamma_t} \sigma_\tau^- \tilde{u}_\tau^- \\ + \int\limits_{\gamma_b} v^\infty_{,1111} \tilde{v} - \int\limits_{\gamma_b} w^\infty_{,11} \tilde{w} - \int\limits_{\gamma_t} w^\infty_{,11} \tilde{w} - \int\limits_{\gamma_t} \varphi^\infty_{,11} \tilde{\varphi} \\ + v^\infty_{,11} \tilde{v}_{,1}\big|_{-1}^0 - v^\infty_{,111} \tilde{v}\big|_{-1}^0 + w^\infty_{,1} \tilde{w}\big|_{-1}^0 + w^\infty_{,1} \tilde{w}\big|_0^1 + \varphi^\infty_{,1} \tilde{\varphi}\big|_0^1 = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

В силу произвольности соответствующих тестовых функций получим уравнения, описывающие равновесие включений γ_b и γ_t:

$$v^\infty_{,1111} = [\sigma_\nu] \quad \text{на} \quad \gamma_b, \;\; w^\infty_{,11} = \sigma_\tau^- \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Кроме того, справедливы равенства

$$v^\infty_{,111} = v^\infty_{,11} = w^\infty_{,1} = 0 \quad \text{при} \quad x = -1,$$

$$w^\infty_{,1} = \varphi^\infty_{,1} = 0 \quad \text{при} \quad x = 1,$$

$$w^\infty_{,1}(0-) = w^\infty_{,1}(0+), \;\; v^\infty_{,11}(0-) = -\varphi^\infty_{,1}(0+).$$

Таким образом, в (29) остается равенство

$$-\int\limits_{\gamma_t} [\sigma_\nu] \left(\tilde{c}^\infty - \int\limits_0^{x_1} \tilde{\varphi} \right) - \int\limits_{\gamma_t} \varphi^\infty_{,11} \tilde{\varphi} - v^\infty_{,111}(0-) \tilde{v}(0-) = 0.$$

Поскольку $\tilde{v}(0-) = \tilde{c}^\infty$, из последнего равенства следует, что

$$\int\limits_{\gamma_t} [\sigma_\nu] + v^\infty_{,111}(0-) = 0,$$

$$\int\limits_{\gamma_t} [\sigma_\nu] \int\limits_0^{x_1} \tilde{\varphi} - \int\limits_{\gamma_t} \varphi^\infty_{,11} \tilde{\varphi} = 0 \quad \text{для всех} \quad \tilde{\varphi} \in H^1(\gamma_t).$$

Итак, дифференциальная постановка задачи (26), (27) заключается в следующем. Требуется найти такие функции $u^\infty = (u_1^\infty, u_2^\infty)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}(u^\infty)\}$, $i, j = 1, 2$, w^∞, v^∞, φ^∞ и $c^\infty \in \mathbb{R}$, что

$$-\operatorname{div} \sigma = f, \;\; \sigma - A\varepsilon(u^\infty) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \tag{30}$$

$$v^\infty_{,1111} = [\sigma_\nu] \quad \text{на} \quad \gamma_b, \;\; w^\infty_{,11} = \sigma_\tau^- \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{31}$$

$$u^\infty = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \;\; u_\nu^{\infty -} = v^\infty \quad \text{на} \quad \gamma_b, \;\; u_\tau^{\infty -} = w^\infty \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{32}$$

$$u_\nu^{\infty -}(x_1) = c^\infty - \int\limits_0^{x_1} \varphi^\infty \quad \text{на} \quad \gamma_t, \tag{33}$$

$$[u_\nu^\infty] \geq 0, \;\; \sigma_\tau^+ = 0, \;\; \sigma_\nu^+ \leq 0, \;\; \sigma_\nu^+ [u_\nu^\infty] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{34}$$

$$w^\infty_{,1} = v^\infty_{,111} = v^\infty_{,11} = 0 \quad \text{при} \quad x = -1, \tag{35}$$

$$\varphi^\infty_{,1} = w^\infty_{,1} = 0 \quad \text{при} \quad x = 1, \tag{36}$$

$$w^\infty(0-) = w^\infty(0+), \;\; v^\infty(0-) = v^\infty(0+), \;\; v^\infty_{,1}(0-) = -\varphi^\infty(0+), \tag{37}$$

$$w^\infty_{,1}(0-) = w^\infty_{,1}(0+), \;\; v^\infty_{,11}(0-) = -\varphi^\infty_{,1}(0+), \tag{38}$$

$$\int\limits_{\gamma_t} [\sigma_\nu] - v^\infty_{,111}(0-) = 0, \tag{39}$$

$$\int\limits_{\gamma_t} [\sigma_\nu] \int\limits_0^{x_1} \tilde{\varphi} + \int\limits_{\gamma_t} \varphi^\infty_{,11} \tilde{\varphi} = 0 \quad \text{для всех} \quad \tilde{\varphi} \in H^1(\gamma_t). \tag{40}$$

Покажем теперь, что из дифференциальной формулировки задачи (30)-(40) следует вариационная постановка (26), (27). Таким образом будет установлено, что формулировки (30)-(40) и (26), (27) являются эквивалентными на классе достаточно гладких решений.

Пусть $(\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{\varphi})$ – функция из множества K^∞. На основе уравнений (30), (31), (39) и (40) можно получить равенство

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} (-\operatorname{div} \sigma - f)(\bar{u} - u^\infty) + \int\limits_{\gamma_b} \left(v^\infty_{,1111} - [\sigma_\nu]\right)(\bar{v} - v^\infty) - \int\limits_{\gamma} \left(w^\infty_{,11} - \sigma_\tau^-\right)(\bar{w} - w^\infty)$$

$$-\left(\int\limits_{\gamma_t} \left([\sigma_\nu] + v^\infty_{,111}(0-)\right)\right)(\bar{c}^\infty - c^\infty) + \int\limits_{\gamma_t} [\sigma_\nu] \int\limits_0^{x_1} (\bar{\varphi} - \varphi^\infty) - \int\limits_{\gamma_t} \varphi^\infty_{,11} (\bar{\varphi} - \varphi^\infty) = 0,$$

которое после интегрирования по частям примет вид

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\infty)\varepsilon(\bar{u}-u^\infty) + \int\limits_{\gamma} [\sigma\nu(\bar{u}-u^\infty)] + \int\limits_{\gamma_b} v^\infty_{,11}(\bar{v}_{,11}-v^\infty_{,11})$$
$$+ v^\infty_{,111}(\bar{v}-v^\infty)|^0_{-1} - v^\infty_{,11}(\bar{v}_{,1}-v^\infty_{,1})|^0_{-1} - \int\limits_{\gamma_b}[\sigma_\nu](\bar{v}-v^\infty)$$
$$+ \int\limits_{\gamma} w^\infty_{,1}(\bar{w}_{,1}-w^\infty_{,1}) - w^\infty_{,1}(\bar{w}-w^\infty)|^1_0 - w^\infty_{,1}(\bar{w}-w^\infty)|^0_{-1}$$
$$+ \int\limits_{\gamma} \sigma^-_\tau(\bar{w}-w^\infty) - \int\limits_{\gamma_t}[\sigma_\nu]\left(\tilde{c}^\infty - \int\limits_0^{x_1}\tilde{\varphi} - (c^\infty - \int\limits_0^{x_1}\varphi^\infty)\right)$$
$$- v^\infty_{,111}(0-)(\bar{c}-c^\infty) + \int\limits_{\gamma_t} \varphi^\infty_{,1}(\bar{\varphi}_{,1}-\varphi^\infty_{,1}) - \varphi^\infty_{,1}(\bar{\varphi}-\varphi^\infty)|^1_0 = \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u}-u^\infty).$$

Далее, применяя к последнему равенству условия (32)-(38), получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\infty)\varepsilon(\bar{u}-u^\infty) + \int\limits_{\gamma_b} v^\infty_{,11}(\bar{v}_{,11}-v^\infty_{,11}) + \int\limits_{\gamma} w^\infty_{,1}(\bar{w}_{,1}-w^\infty_{,1})$$
$$+ \int\limits_{\gamma_t} \varphi^\infty_{,1}(\bar{\varphi}_{,1}-\varphi^\infty_{,1}) + \int\limits_{\gamma}\sigma^+_\nu[\bar{u}_\nu] = \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u}-u^\infty). \quad (41)$$

В силу первого и третьего условий в (34), последнее слагаемое в левой части (41) неположительное. Таким образом, вариационное неравенство

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\infty)\varepsilon(\bar{u}-u^\infty) + \int\limits_{\gamma_b} v^\infty_{,11}(\bar{v}_{,11}-v^\infty_{,11})$$
$$+ \int\limits_{\gamma} w^\infty_{,1}(\bar{w}_{,1}-w^\infty_{,1}) + \int\limits_{\gamma_t} \varphi^\infty_{,1}(\bar{\varphi}_{,1}-\varphi^\infty_{,1}) \geq \int\limits_{\Omega_\gamma} f(\bar{u}-u^\infty)$$

следует из задачи (30)-(40). Кроме того, решение задачи (30)-(40) содержится в множестве K^∞. Формулировки задачи равновесия (30)-(40) и (26), (27) эквивалентны на классе достаточно гладких решений.

Замечание. Можно привести другую дифференциальную формулировку предельной задачи. Учитывая соотношения для предельных функций (25), которые также справедливы для функций множества K^∞, и основываясь на условиях (39), (40), можно записать равенство

$$\int\limits_{\gamma_t}[\sigma_\nu](\bar{c}^\infty - \bar{v}) - \int\limits_{\gamma_t} v^\infty_{,111}\bar{v}_{,1} - \bar{c}^\infty\left(\int\limits_{\gamma_t}[\sigma_\nu] - v^\infty_{,111}(0-)\right) = 0.$$

Интегрируя здесь по частям, получим, что

$$v^{\infty}_{,1111} = [\sigma_\nu] \quad \text{на} \quad \gamma_t,\ \ v^{\infty}_{,111}(0-) = v^{\infty}_{,111}(0+),\ \ v^{\infty}_{,111} = 0 \quad \text{при} \quad x = 1.$$

Тогда дифференциальная постановка задачи примет следующий вид. Требуется найти такие функции $u^{\infty} = (u_1^{\infty}, u_2^{\infty})$, $\sigma = \{\sigma_{ij}(u^{\infty})\}$, $i, j = 1, 2$, w^{∞}, v^{∞}, что

$$- \operatorname{div} \sigma = f,\ \ \sigma - A\varepsilon(u^{\infty}) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma,$$

$$v^{\infty}_{,1111} = [\sigma_\nu] \quad \text{на} \quad \gamma,\ \ w^{\infty}_{,11} = \sigma_\tau^- \quad \text{на} \quad \gamma,$$

$$u^{\infty} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma,\ \ u_\nu^{\infty -} = v^{\infty} \quad \text{на} \quad \gamma,\ \ u_\tau^{\infty -} = w^{\infty} \quad \text{на} \quad \gamma,$$

$$[u_\nu^{\infty}] \geq 0,\ \ \sigma_\tau^+ = 0,\ \ \sigma_\nu^+ \leq 0,\ \ \sigma_\nu^+[u_\nu^{\infty}] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma,$$

$$w^{\infty}_{,1} = v^{\infty}_{,111} = v^{\infty}_{,11} = 0 \quad \text{при} \quad x = -1,$$

$$w^{\infty}_{,1} = v^{\infty}_{,111} = v^{\infty}_{,11} = 0 \quad \text{при} \quad x = 1,$$

$$w^{\infty}(0-) = w^{\infty}(0+),\ \ v^{\infty}(0-) = v^{\infty}(0+),\ \ v^{\infty}_{,1}(0-) = v^{\infty}_{,1}(0+),$$

$$w^{\infty}_{,1}(0-) = w^{\infty}_{,1}(0+),\ \ v^{\infty}_{,11}(0-) = v^{\infty}_{,11}(0+),\ \ v^{\infty}_{,111}(0-) = v^{\infty}_{,111}(0+).$$

Формулировка задачи в таком виде более наглядна: предельная задача является задачей сопряжения двух включений Бернулли – Эйлера в упругом теле с трещиной.

4 Сильная сходимость решений при $\alpha \to \infty$

В предыдущем пункте была получена слабая сходимость решений семейства задач (12), (13) при $\alpha \to \infty$. Оказывается, можно установить сильную сходимость последовательностей решений. Покажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для последовательности решений $(u^\alpha, w^\alpha, v^\alpha, \varphi^\alpha)$ семейства задач (12), (13) имеют место сходимости при $\alpha \to \infty$:*

$$u^\alpha \to u^\infty \quad \text{сильно в} \quad H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2, \tag{42}$$

$$w^\alpha \to w^\infty \quad \text{сильно в} \quad H^1(\gamma_b),\ \ v^\alpha \to v^\infty \quad \text{сильно в} \quad H^2(\gamma_b), \tag{43}$$

$$w^\alpha \to w^\infty \quad \text{сильно в} \quad H^1(\gamma_t),\ \ v^\alpha \to v^\infty \quad \text{сильно в} \quad H^1(\gamma_t), \tag{44}$$

$$\varphi^\alpha \to \varphi^\infty \quad \text{сильно в} \quad H^1(\gamma_t). \tag{45}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала пространство

$$\mathcal{H} = \{(\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{\varphi}) |\ \bar{u} \in H^1_\Gamma(\Omega_\gamma)^2,\ \bar{w} \in H^1(\gamma),\ \bar{v} \in H^1(\gamma_t),\ \bar{v} \in H^2(\gamma_b),$$
$$\bar{\varphi} \in H^1(\gamma_t); \bar{u}_\tau^- = \bar{w},\ \bar{u}_\nu^- = \bar{v} \text{ на } \gamma\}.$$

Покажем, что

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(\bar{u})\varepsilon(\bar{u}) + \int\limits_{\gamma} \bar{w}_{,1}\bar{w}_{,1} + \int\limits_{\gamma_b} \bar{v}_{,11}\bar{v}_{,11} + \int\limits_{\gamma_t} \bar{\varphi}_{,1}\bar{\varphi}_{,1} + \int\limits_{\gamma_t} (\bar{v}_{,1} + \bar{\varphi})^2 \tag{46}$$

является квадратом нормы функции $(\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{\varphi})$ в пространстве $\mathcal{H}$. Рассмотрим норму в пространстве $\mathcal{H}$, определяемую следующим образом:

$$\|(\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{\varphi})\|^2_{\mathcal{H}} \\ = \|\bar{u}\|^2_{H^1_\Gamma}(\Omega_\gamma)^2 + \|\bar{w}\|^2_{H^1(\gamma)} + \|\bar{v}\|^2_{H^2(\gamma_b)} + \|\bar{v}\|^2_{H^1(\gamma_t)} + \|\bar{\varphi}\|^2_{H^1(\gamma_t)}.$$

По первому неравенству Корна и неравенствам (19), (20) имеем оценку снизу:

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(\bar{u})\varepsilon(\bar{u}) + \int\limits_{\gamma} \bar{w}_{,1}\bar{w}_{,1} + \int\limits_{\gamma_b} \bar{v}_{,11}\bar{v}_{,11} + \int\limits_{\gamma_t} \bar{\varphi}_{,1}\bar{\varphi}_{,1} + \int\limits_{\gamma_t} (\bar{v}_{,1} + \bar{\varphi})^2$$
$$= \int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(\bar{u})\varepsilon(\bar{u}) + \int\limits_{\gamma_b} \bar{w}_{,1}\bar{w}_{,1} + \int\limits_{\gamma_b} \bar{v}_{,11}\bar{v}_{,11} + \int\limits_{\gamma_t} \bar{w}_{,1}\bar{w}_{,1} + \int\limits_{\gamma_t} \bar{\varphi}_{,1}\bar{\varphi}_{,1} + \int\limits_{\gamma_t} (\bar{v}_{,1} + \bar{\varphi})^2$$
$$\pm \delta \int\limits_{\gamma_b} (\bar{w}^2 + \bar{v}^2) \pm \delta \int\limits_{\gamma_t} (\bar{w}^2 + \bar{v}^2)$$
$$\geq \bar{c}\left(\|\bar{u}\|^2_{H^1_\Gamma}(\Omega_\gamma)^2 + \|\bar{w}\|^2_{H^1(\gamma)} + \|\bar{v}\|^2_{H^2(\gamma_b)} + \|\bar{v}\|^2_{H^1(\gamma_t)} + \|\bar{\varphi}\|^2_{H^1(\gamma_t)}\right), \quad (47)$$

где δ – малый параметр, $\bar{c}$ – постоянная. Нетрудно заметить, что неравенство выполняется в обратную сторону, а именно

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(\bar{u})\varepsilon(\bar{u}) + \int\limits_{\gamma} \bar{w}_{,1}\bar{w}_{,1} + \int\limits_{\gamma_b} \bar{v}_{,11}\bar{v}_{,11} + \int\limits_{\gamma_t} \bar{\varphi}_{,1}\bar{\varphi}_{,1} + \int\limits_{\gamma_t} (\bar{v}_{,1} + \bar{\varphi})^2$$
$$\leq \bar{C}\left(\|\bar{u}\|^2_{H^1_\Gamma}(\Omega_\gamma)^2 + \|\bar{w}\|^2_{H^1(\gamma)} + \|\bar{v}\|^2_{H^2(\gamma_b)} + \|\bar{v}\|^2_{H^1(\gamma_t)} + \|\bar{\varphi}\|^2_{H^1(\gamma_t)}\right), \quad (48)$$

где $\bar{C}$ – постоянная. Тогда в силу (47) и (48) выражение (46) определяет квадрат нормы в пространстве $\mathcal{H}$.

Теперь перейдем к доказательству утверждения теоремы. Поскольку выполняется равенство (18), можно утверждать, что верно неравенство

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\alpha)\varepsilon(u^\alpha) + \int\limits_{\gamma} w^\alpha_{,1}w^\alpha_{,1} + \int\limits_{\gamma_b} v^\alpha_{,11}v^\alpha_{,11} + \int\limits_{\gamma_t} \varphi^\alpha_{,1}\varphi^\alpha_{,1} \leq \int\limits_{\Omega_\gamma} fu^\alpha. \quad (49)$$

Из вариационного неравенства (27) следует равенство

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\infty)\varepsilon(u^\infty) + \int\limits_{\gamma} w^\infty_{,1}w^\infty_{,1} + \int\limits_{\gamma_b} v^\infty_{,11}v^\infty_{,11} + \int\limits_{\gamma_t} \varphi^\infty_{,1}\varphi^\infty_{,1} = \int\limits_{\Omega_\gamma} fu^\infty.$$

Перейдем к верхнему пределу в неравенстве (49) и получим цепочку соотношений:

$$\limsup_{\alpha\to\infty}\left\{\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u^\alpha)\varepsilon(u^\alpha)+\int\limits_{\gamma}w^\alpha_{,1}w^\alpha_{,1}+\int\limits_{\gamma_b}v^\alpha_{,11}v^\alpha_{,11}+\int\limits_{\gamma_t}\varphi^\alpha_{,1}\varphi^\alpha_{,1}\right\}$$
$$\le\limsup_{\alpha\to\infty}\int\limits_{\Omega_\gamma}fu^\alpha=\int\limits_{\Omega_\gamma}fu^\infty$$
$$=\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u^\infty)\varepsilon(u^\infty)+\int\limits_{\gamma}w^\infty_{,1}w^\infty_{,1}+\int\limits_{\gamma_b}v^\infty_{,11}v^\infty_{,11}+\int\limits_{\gamma_t}\varphi^\infty_{,1}\varphi^\infty_{,1}. \quad (50)$$

В то же время, слагаемые в левой части (49) являются слабо полунепрерывными снизу, поэтому

$$\liminf_{\alpha\to\infty}\left\{\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u^\alpha)\varepsilon(u^\alpha)+\int\limits_{\gamma}w^\alpha_{,1}w^\alpha_{,1}+\int\limits_{\gamma_b}v^\alpha_{,11}v^\alpha_{,11}+\int\limits_{\gamma_t}\varphi^\alpha_{,1}\varphi^\alpha_{,1}\right\}$$
$$\ge\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u^\infty)\varepsilon(u^\infty)+\int\limits_{\gamma}w^\infty_{,1}w^\infty_{,1}+\int\limits_{\gamma_b}v^\infty_{,11}v^\infty_{,11}+\int\limits_{\gamma_t}\varphi^\infty_{,1}\varphi^\infty_{,1}. \quad (51)$$

Далее, из неравенства (24) можно получить, что

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int\limits_{\gamma_t}(v^\alpha_{,1}+\varphi^\alpha)^2=0=\int\limits_{\gamma_t}(v^\infty_{,1}+\varphi^\infty)^2. \quad (52)$$

Таким образом, в силу (50), (51) и (52) выполняется предельное соотношение

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left\{\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u^\alpha)\varepsilon(u^\alpha)+\int\limits_{\gamma}w^\alpha_{,1}w^\alpha_{,1}+\int\limits_{\gamma_b}v^\alpha_{,11}v^\alpha_{,11}+\int\limits_{\gamma_t}\varphi^\alpha_{,1}\varphi^\alpha_{,1}+\int\limits_{\gamma_t}(v^\alpha_{,1}+\varphi^\alpha)^2\right\}$$
$$=\int\limits_{\Omega_\gamma}\sigma(u^\infty)\varepsilon(u^\infty)+\int\limits_{\gamma}w^\infty_{,1}w^\infty_{,1}+\int\limits_{\gamma_b}v^\infty_{,11}v^\infty_{,11}+\int\limits_{\gamma_t}\varphi^\infty_{,1}\varphi^\infty_{,1}+\int\limits_{\gamma_t}(v^\infty_{,1}+\varphi^\infty)^2,$$

из которого следует сходимость норм. Из слабой сходимости (14)-(17) и сходимости норм следуют сильные сходимости (42)-(45) при $\alpha\to\infty$. $\square$

5 Задача оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимального управления, которая формулируется в соответствии с критерием разрушения Гриффитса. Согласно критерию трещина в упругом теле начнет развиваться, когда производная функционала энергии по длине трещины достигнет критического значения κ (заданный параметр, определяемый свойствами материала). Параметр α в задаче будет управляющим. В этом пункте предполагается, что $a_{ijkl} \in C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\overline{\Omega})^2$.

При рассматриваемой геометрии задачи, то есть когда трещина в упругом теле расположена вдоль γ, производную функционала энергии по длине трещины получить не удается. Это связано с техническими трудностями при выводе формулы производной, [4]. Предположим, что трещине отслоения в упругом теле соответствует сегмент $\gamma_c = (-1, 1+a) \times \{0\}$, $a > 0$. Обозначим $\Omega_{\gamma_c} = \Omega \setminus \bar{\gamma}_c$. В этом случае вариационная задача, справедливая для каждого $\alpha \in (0, \infty)$, примет вид:

$$\text{найти такую } (u_c^\alpha, w_c^\alpha, v_c^\alpha, \varphi_c^\alpha) \in K_c, \text{ что} \tag{53}$$

$$\int\limits_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u_c^\alpha)\varepsilon(\bar{u} - u_c^\alpha) + \int\limits_{\gamma} w_{c,1}^\alpha(\bar{w}_{,1} - w_{c,1}^\alpha) + \int\limits_{\gamma_b} v_{c,11}^\alpha(\bar{v}_{,11} - v_{c,11}^\alpha)$$
$$+ \int\limits_{\gamma_t} \varphi_{c,1}^\alpha(\bar{\varphi}_{,1} - \varphi_{c,1}^\alpha) + \alpha \int\limits_{\gamma_t} (v_{c,1}^\alpha + \varphi_c^\alpha)(\bar{v}_{,1} + \bar{\varphi} - v_{c,1}^\alpha - \varphi_c^\alpha) \geq \int\limits_{\Omega_{\gamma_c}} f(\bar{u} - u_c^\alpha)$$
$$\text{для всех } (\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{\varphi}) \in K_c, \tag{54}$$

где множество допустимых перемещений имеет вид:

$$K_c = \{(\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{\varphi}) |\ \bar{u} \in H^1_\Gamma(\Omega_{\gamma_c})^2,\ \bar{w} \in H^1(\gamma),\ \bar{v} \in H^1(\gamma_t),\ \bar{v} \in H^2(\gamma_b),$$
$$\bar{\varphi} \in H^1(\gamma_t);\ [\bar{u}_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma_c,\ \bar{u}_\tau^- = \bar{w},\ \bar{u}_\nu^- = \bar{v} \text{ на } \gamma;\ \bar{v}_{,1}(0-) = -\bar{\varphi}(0+)\}.$$

Задача (53), (54) имеет единственное решение. Аналогично тому, как были получены сходимости (42)-(45), для последовательности решений $(u_c^\alpha, w_c^\alpha, v_c^\alpha, \varphi_c^\alpha)$ семейства задач (53), (54) при $\alpha \to \infty$ можно получить, в частности, сходимость

$$u_c^\alpha \to u_c^\infty \quad \text{сильно в} \quad H^1_\Gamma(\Omega_{\gamma_c})^2, \tag{55}$$

причем $(u_c^\infty, w_c^\infty, v_c^\infty, \varphi_c^\infty) \in K_c^\infty$ – решение вариационного неравенства

$$\int\limits_{\Omega_{\gamma_c}} \sigma(u_c^\infty)\varepsilon(\bar{u} - u_c^\infty) + \int\limits_{\gamma} w_{c,1}^\infty(\bar{w}_{,1} - w_{c,1}^\infty) + \int\limits_{\gamma_b} v_{c,11}^\infty(\bar{v}_{,11} - v_{c,11}^\infty)$$
$$+ \int\limits_{\gamma_t} \varphi_{c,1}^\infty(\bar{\varphi}_{,1} - \varphi_{c,1}^\infty) \geq \int\limits_{\Omega_{\gamma_c}} f(\bar{u} - u_c^\infty)$$
$$\text{для всех } (\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{\varphi}) \in K_c^\infty, \tag{56}$$

где множество K_c^∞ определяется следующим образом:

$$K_c^\infty = \{(\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{\varphi})|\ \bar{u} \in H^1_\Gamma(\Omega_{\gamma_c})^2,\ \bar{w} \in H^1(\gamma),\ \bar{v} \in H^2(\gamma_b),\ \bar{\varphi} \in H^1(\gamma_t);$$
$$[\bar{u}_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma_c,\ \bar{u}_\tau^- = \bar{w} \text{ на } \gamma,\ \bar{u}_\nu^- = \bar{v} \text{ на } \gamma_b,$$
$$\bar{u}_\nu^-(x_1) = \bar{c}^\infty - \int\limits_0^{x_1} \bar{\varphi} \text{ на } \gamma_t,\ \bar{c}^\infty \in \mathbb{R};\ \bar{v}_{,1}(0-) = -\bar{\varphi}(0+)\}.$$

Рассмотрим формулу производной функционала энергии по длине трещины [29, гл. 3, § 1, п. 1]:

$$G(\alpha) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{\gamma_c}} \{\operatorname{div}(V a_{ijkl})\varepsilon_{kl}(u_c^\alpha)\varepsilon_{ij}(u_c^\alpha) - 2\sigma_{ij}(u_c^\alpha)E_{ij}(V; u_c^\alpha)\}$$
$$- \int\limits_{\Omega_{\gamma_c}} \operatorname{div}(V f_i) u_{ci}^\alpha.$$

Здесь $E_{ij}(U;u) = (u_{i,k}U_{k,i} + u_{j,k}U_{k,j})/2$, $V = (V_1(x), 0)$. Функция V_1 – это гладкая срезающая функция с носителем вблизи вершины трещины $(1+a, 0)$, который не содержит точку $(1, 0)$, причем $V_1 = 1$ в малой окрестности точки $(1+a, 0)$. Формула производной справедлива при $\alpha \in [\alpha_0, \infty]$, $\alpha_0 > 0$, поскольку имеет локальный характер и не зависит явно от функций $w_c^\alpha, v_c^\alpha, \varphi_c^\alpha$.

Теорема 2. *Задача оптимального управления*

$$\sup_{\alpha \in [\alpha_0, \infty]} G(\alpha)$$

имеет решение.

Доказательство. Пусть $\alpha_n \in [\alpha_0, \infty]$ – максимизирующая последовательность. Существует сходящаяся подпоследовательность последовательности α_n, элементы которой обозначим так же через α_n; $\alpha_n \to \alpha_*$, $\alpha_* \in [\alpha_0, \infty]$. При $\alpha_* = \infty$, основываясь на сходимости (55), можно получить следующие предельные соотношения:

$$\sup_{\alpha \in [\alpha_0, \infty]} G(\alpha) = \lim_{\alpha_n \to \infty} G(\alpha_n) = G(\infty) \leq \sup_{\alpha \in [\alpha_0, \infty]} G(\alpha).$$

Рассмотрим случай, когда $\alpha_* = \alpha', \alpha' \in [\alpha_0, \infty)$. Таким же способом, как и при $\alpha \to \infty$, можно установить сходимость для последовательности решений $(u_c^\alpha, w_c^\alpha, v_c^\alpha, \varphi_c^\alpha)$ семейства задач (53), (54) при $\alpha \to \alpha'$, в частности,

$$u_c^\alpha \to u_c^{\alpha'} \quad \text{сильно в} \quad H^1_\Gamma(\Omega_{\gamma_c})^2,$$

где $(u_c^{\alpha'}, w_c^{\alpha'}, v_c^{\alpha'}, \varphi_c^{\alpha'})$ – решение задачи (53), (54) при $\alpha = \alpha'$. На основе этой сходимости можно получить цепочку соотношений

$$\sup_{\alpha \in [\alpha_0, \infty]} G(\alpha) = \lim_{\alpha_n \to \alpha'} G(\alpha_n) = G(\alpha') \leq \sup_{\alpha \in [\alpha_0, \infty]} G(\alpha).$$

Таким образом, теорема доказана. □

6 Заключение

Исследование задач сопряжения включений разного типа позволяет описать случаи, когда материалы и размеры включений различны. Так, теория балок Бернулли – Эйлера используется при моделировании поведения включений с преобладанием изгиба (или длинных включений); теория Тимошенко применяется для балок с преобладанием сдвига (или коротких включений). В работе рассмотрена задача сопряжения включений Бернулли – Эйлера и Тимошенко в упругом теле с трещиной. Исследован предельный переход в задаче при стремлении параметра, пропорционального модулю сдвига включения Тимошенко, к бесконечности. Получены вариационная и дифференциальная постановки, соответствующие предельной задаче, описывающей равновесие упругого тела с двумя сопрягающимися включениями Бернулли – Эйлера и трещиной. Кроме того, установлена сильная сходимость решений, с помощью которой доказана разрешимость задачи оптимального управления, формулируемой на основе критерия разрушения Гриффитса.

References

[1] H. Itou, A.M. Khludnev, *On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies*, Math. Method. Appl. Sci., **39**:17 (2014), 4980–4993.

[2] A. Khludnev, G. Leugering, *Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies*, Math. Mech. Complex Systems, **2**:1 (2014), 1–21.

[3] A.M. Khludnev, V.V. Shcherbakov, *Singular path-independent energy integrals for elastic bodies with Euler-Bernoulli inclusions*, Math. Mech. Solids, **22**:11 (2016).

[4] V.V. Shcherbakov, *The Griffith formula and J-integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions*, Z. Angew. Math. Mech. **96**:11 (2016), 1306–1317.

[5] A.M. Khludnev, I.V. Fankina, *Noncoercive problems for elastic bodies with thin elastic inclusions*, Math. Methods Appl. Sci., **46**:13 (2023), 14214–14228.

[6] A. Khludnev, G. Leugering, *On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks*, Math. Method. Appl. Sci., **33**:16 (2010), 1955–1967.

[7] N.P. Lazarev, V.A. Kovtunenko, *Problem of the equilibrium of a two-dimensional elastic body with two contacting thin rigid inclusions*, Itogi Nauki i Tekhniki. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., **227** (2023), 51–60.

[8] A.M. Khludnev, *A weakly curved inclusion in an elastic body with separation*, Mechanics of Solids, **50**:5 (2015), 591–601.

[9] P. Mallick, *Fiber-reinforced composites. Materials, manufacturing, and design*, Marcel Dekker, 1993.

[10] S.A. Nazarov, A.S. Slutskij, *One-dimensional equations of deformation of thin slightly curved rods. Asymptotical analysis and justification*, Izv. Math., **64**:3 (2000), 531–562.

[11] G.Saccomandi, M.F. Beatty, *Universal relations for fiber-reinforced elastic materials*, Math. Mech. Solids, **7**:1 (2002), 95–110.

[12] E.M. Rudoy, H. Itou, N.P. Lazarev, *Asymptotic justification of the models of thin inclusions in an elastic body in the antiplane shear problem*, J. Appl. Ind. Math., **15**:1 (2021), 129–140.

[13] E. Rudoy, S. Sazhenkov, *Variational approach to modeling of curvilinear thin inclusions with rough boundaries in elastic bodies: case of a rod-type inclusion*, Mathematics, **11**:16, (2023), 3447.
[14] A. Khludnev, T. Popova, *Junction problem for rigid and semirigid inclusions in elastic bodies*, Arch. Appl. Mech., **86** (2016), 1565–1577.
[15] A.M. Khludnev, L. Faella, T.S. Popova, *Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies*, Math. Mech. Solids, **22**:4 (2017), 737–750.
[16] A.M. Khludnev, T.S. Popova, *On the mechanical interplay between Timoshenko and semirigid inclusions embedded in elastic bodies*, Z. Angew. Math. Mech., **97**:11 (2017), 1406–1417.
[17] A. Khludnev, T. Popova, *Semirigid inclusions in elastic bodies: mechanical interplay and optimal control*, Comput. Math. Appl. **77**:1 (2019), 253–262.
[18] A.M. Khludnev, A.C. Esposito, L. Faella, *Optimal control of parameters for elastic body with thin inclusions*, J. Opt. Theory Appl., **184** (2020), 293–314.
[19] A.M. Khludnev, T.S. Popova, *On junction problem with damage parameter for Timoshenko and rigid inclusions inside elastic body*, Z. Angew. Math. Mech., **100**:8 (2020), e202000063.
[20] A.M. Khludnev, T.S. Popova, *The junction problem for two weakly curved inclusions in an elastic body*, Sib. Math. J., **61** (2020), 743–754.
[21] T.S. Popova, *On numerical solving of junction problem for the thin rigid and elastic inclusions in elastic body*, Lobachevskii J. Math., **44**:10 (2023), 4143–4156.
[22] N.A. Nikolaeva, *Equilibrium problems for elastic body with a crack and thin conjugated inclusions*, Far Eastern Math. Journal, **24**:1 (2024), 73–95.
[23] H. Le Dret, *Modeling of the junction between two rods*, J. Math. Pures Appl., **68** (1989), 365–397.
[24] A. Gaudiello, E. Zappale, *A model of joined beams as limit of a 2D plate*, J. Elasticity, **103** (2011), 205-233.
[25] N.V. Neustroeva, N.P. Lazarev, *Junction problem for Euler–Bernoulli and Timoshenko elastic beams*, Sib. Electron. Math. Reports, **13** (2016), 26–37.
[26] G. Leugering, S.A. Nazarov, A.S. Slutskij, *The asymptotic analysis of a junction of two elastic beams*, Z. Angew. Math. Mech., **99**:1 (2019), e201700192.
[27] A.M. Khludnev, T.S. Popova, *Junction problem for Euler-Bernoulli and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies*, Journal: Quart. Appl. Math., **74**:4 (2016), 705–718.
[28] V.P. Mikhailov, *Partial differential equations*, Nauka, Moscow, 1976.
[29] A.M. Khludnev, *Elasticity problems in nonsmooth domains*, Fizmatlit, Moscow, 2010.

Irina Vladimirovna Fankina
Novosibirsk State University,
ul. Pirogova, 1,
630090, Novosibirsk, Russia
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
pr. Lavrentyeva, 15,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: fankina.iv@gmail.com