S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 00, № 0, стр. 000–000 (2024) УДК 512.55
https://doi.org/10.33048/semi.2024.20.... MSC 16P10,16W20

О КЛАССИФИКАЦИИ КОНЕЧНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ КОЛЕЦ С 3-НИЛЬПОТЕНТНЫМ РАДИКАЛОМ ДЖЕКОБСОНА

Е.В. Журавлев, О.А. Минниахметова

Представлено

Abstract: In this article we classified up to isomorphism some finite local rings R with Jacobson radical J and conditions:
$$\dim_F J/J^2 = 2, \dim_F J^2 = 3, J^3 = 0.$$

Keywords: finite rings, local rings.

1 Введение

Всюду далее мы будем рассматривать только конечные ассоциативные кольца с единицей. Всякое конечное кольцо R порядка $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, где p_i – различные простые числа, $i = \overline{1,k}$, однозначно представимо в виде прямой суммы колец порядков $p_i^{\alpha_i}$. Антипкин В.Г. и Елизаров В.П. описали кольца порядка p^n при $n \leq 3$ (см. [2,3]). Дерр Д., Орр Г., Пек П. впервые указали исчерпывающий список некоммутативных колец порядка p^4 (см. [4]). Горбас Б. и Уильямс Г. в работах [5,6] классифицировали с точностью до изоморфизма все кольца порядка p^n, $n \leq 5$. Вопрос о

Zhuravlev, E.V., Minniakhmetova O.A., On the classification of finite local rings with 3-nilpotent Jacobson radical.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00155, https://rscf.ru/project/24-21-00155/.

Поступила .. 2024 г., опубликована .. 2024 г.

классификации колец порядка p^6 остается открытым. Некоторые из таких колец, с ограничениями на радикал Джекобсона $J = J(R)$, классифицированы в работах [7–9]. Важно заметить, что классификация колец сводится к классификации локальных колец (см. [5]), то есть таких колец R, что $R/J \cong GF(p^r) = F$ – конечное поле. Например, известно, что всякое коммутативное кольцо является прямой суммой локальных колец (см. [1], стр. 36).

Все делители нуля локального кольца R образуют радикал J, имеющий некоторый индекс нильпотентности N ($J^N = 0$, $J^{N+1} \neq 0$). Кроме того, справедливы следующие свойства таких колец.

Теорема 1. [10, 11] *Пусть R – локальное кольцо. Тогда существует простое число p и натуральные числа n, r, такие, что справедливы следующие утверждения.*

(1) $|R| = p^{nr}$, $|J| = p^{(n-1)r}$.
(2) *Если* $\operatorname{char} R = p^k$, $1 \leq k \leq N$, *то R содержит максимальное подкольцо Галуа* $R_0 = GR(p^{kr}, p^k) = Z_{p^k}[b]$, *где b – элемент R мультипликативного порядка $p^r - 1$. Всякий элемент R_0 единственным образом представим в виде* $\sum_{i=0}^{k-1} p^i \lambda_i$, *где* $\lambda_i \in K_0 = \langle b \rangle \cup \{0\}$. *Причем $R = R_0$, при $n = k$.*
(3) *Существуют* $m_1, \ldots, m_h \in J$ *и* $\sigma_1, \ldots, \sigma_h \in \operatorname{Aut}(R_0)$, *такие, что R раскладывается в прямую сумму левых R_0 - модулей*

$$R = R_0 \oplus R_0 m_1 \oplus \ldots \oplus R_0 m_h,$$

где $m_i r_0 = r_0^{\sigma_i} m_i$, *для всех* $i = 1, \ldots, h$ *и для любого* $r_0 \in R_0$. *В частности,* $J = pR_0 \oplus R_0 m_1 \oplus \ldots \oplus R_0 m_h$.

Если R – локальное кольцо, то относительно умножения

$$(s + J)(x + J^{i+1}) = sx + J^{i+1},$$

$s \in R$, $x \in J^i$, $i \in \mathbb{N}$, факторкольцо J^i/J^{i+1} – векторное пространство над F. Пусть $s_i = \dim_F J^i/J^{i+1}$ и $\operatorname{char} R = p^k$. Будем обозначать R как $R[k, r, s_1, \ldots, s_{n-1}]$, указывая только ненулевые s_i. При $|R| = p^{nr}$ заметим, что $n = 1 + \sum_{i=1}^{N-1} s_i$. Поэтому, например, для классификации конечных колец порядка p^{6r} необходимо рассмотреть конечное множество значений k и s_i. В работе [7] классифицированы $R[1,1,1]$, $R[1,2]$, $R[2,1,1]$, $R[2,2]$, при $r = 2$, и $R[k,1,1,1,1,1]$, $k = \overline{1,6}$, $R[k,2,1,1,1]$, $k \in \{1,4,5\}$, $R[3,4,1]$, $R[4,3,1,1]$, $R[4,2,2,1]$, при $r = 1$. Кольца $R[1,2,2,1]$, $R[1,3,1,1]$ классифицированы в работах [8, 9]. В [12] изучены кольца типа $R[1,2,3]$ при $p \neq 2$. Цель настоящей работы – продолжить исследования, начатые в [12], и классифицировать кольца $R[1,2,3]$, $R[2,2,3]$, при $p = 2$, $F = GF(2^r)$, и $R[3,2,3]$.

2 Кольца характеристики p

Пусть R – локальное кольцо характеристики p, $J^3 = 0$, $Z(R)$ – центр кольца и $R/J \cong GF(p^r) = F \subseteq Z(R)$. Тогда R – конечномерное векторное пространство над F и

$$R = F \oplus J,\ J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fv_3,$$

где $\dim_F J/J^2 = 2$, $\dim_F J^2 = 3$ и $\{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3\}$ – базис J над полем F, $u_1, u_2 \in J \setminus J^2$, $v_1, v_2, v_3 \in J^2$ (см. [10, 11]). Пусть

$$u_i u_j = m_{ij}^{(1)} v_1 + m_{ij}^{(2)} v_2 + m_{ij}^{(3)} v_3, \tag{1}$$

для некоторых $m_{ij}^{(k)} \in F$, $i, j = \overline{1,2}$, $k = \overline{1,m}$. Рассмотрим матрицы умножения из структурных констант: $M_k = \left(m_{ij}^{(k)}\right)_{2\times 2}$, $k = \overline{1,3}$. Такие матрицы линейно независимы и, если R коммутативно, то матрицы являются симметрическими. По всякой последовательности $M_k = \left(m_{ij}^{(k)}\right)_{2\times 2}$, $k = \overline{1,3}$, линейно независимых матриц однозначно определяется рассмотренное выше кольцо с умножением (1).

Пусть R и R' – произвольные кольца указанного типа с матрицами умножения M_1, M_2, M_3 и M_1', M_2', M_3' соответственно. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. ([10]) *$R \cong R'$ тогда и только тогда, когда существуют невырожденные матрицы $P = (p_{ij})_{2\times 2}$, $Q = (q_{ij})_{3\times 3}$ над полем F и автоморфизм $\rho \in \mathrm{Aut}(F)$ такие, что*

$$\begin{cases} P^T\left(q_{11}M_1^\rho + q_{12}M_2^\rho + q_{13}M_3^\rho\right)P = M_1'; \\ P^T\left(q_{21}M_1^\rho + q_{22}M_2^\rho + q_{23}M_3^\rho\right)P = M_2'; \\ P^T\left(q_{31}M_1^\rho + q_{32}M_2^\rho + q_{33}M_3^\rho\right)P = M_3', \end{cases} \tag{2}$$

где $M_k^\rho = \left(\left(m_{ij}^{(k)}\right)^\rho\right)$, $k = \overline{1,3}$.

Далее определим отношение эквивалентности на последовательностях матриц, изучение которого представляет интерес не только для классификации колец, но и как отдельная задача. Пусть $M_i, M_i' \in M_n(F)$, $i = \overline{1,m}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m \le n^2$. Упорядоченные последовательности линейно независимых матриц $(M_1, M_2, \ldots, M_m)$ и $(M_1', M_2', \ldots, M_m')$ назовем эквивалентными, если существуют невырожденные матрицы $P = (p_{ij})_{n\times n}$ и $Q = (q_{ij})_{m\times m}$ над полем F такие, что

$$M_k' = \sum_{i=1}^{m} q_{ki} P^T M_i P,\ k = \overline{1,m}. \tag{3}$$

Если при некоторых P и Q последовательность матриц $(M_1, M_2, \ldots, M_m)$ эквивалентна самой себе, то будем говорить, что матрицы P и Q стабилизируют $(M_1, M_2, \ldots, M_m)$.

При $m = 1$ получаем:

$$M_1' = q_{11} P^T M_1 P. \tag{4}$$

В работах [5, 6, 13–18] найдены представители классов эквивалентности, определяемой равенством (4), для матриц порядка два и три. Для двоек матриц порядка два ($m = 2$, $n = 2$) отношение эквивалентности определяется равенствами

$$\begin{cases} P^T (q_{11} M_1 + q_{12} M_2) P = M_1'; \\ P^T (q_{21} M_1 + q_{22} M_2) P = M_2'. \end{cases} \tag{5}$$

Этот случай полностью изучен в работе [19], при $p \neq 2$, и в работе [20], при $p = 2$. Важно заметить, что методы исследования существенно различны при $p \neq 2$ и $p = 2$.

При $m = 3$ и $n = 2$ тройки (M_1, M_2, M_3), (M_1', M_2', M_3') матриц второго порядка эквивалентны, если существуют невырожденные матрицы $P = (p_{ij})_{2\times 2}$ и $Q = (q_{ij})_{3\times 3}$ такие, что

$$\begin{cases} P^T (q_{11} M_1 + q_{12} M_2 + q_{13} M_3) P = M_1'; \\ P^T (q_{21} M_1 + q_{22} M_2 + q_{23} M_3) P = M_2'; \\ P^T (q_{31} M_1 + q_{32} M_2 + q_{33} M_3) P = M_3'. \end{cases} \tag{6}$$

В работе [12] найдены представители классов эквивалентности для данного случая при $p \neq 2$. Наша цель – найти представители классов эквивалентности для $p = 2$ и применить полученные результаты для классификации конечных локальных колец.

Рассмотрим кольцо матриц $M_2(F)$ над конечным полем $F = GF(2^r)$, $p = 2$. Так как симметрические матрицы образуют трехмерное пространство, то всякая тройка линейно независимых матриц является либо тройкой симметрических матриц и эквивалентна

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

либо содержит не менее двух симметрических матриц.

Пусть (A_1, A_2, B), (A_1', A_2', B') – тройки линейно независимых матриц, в которых A_1, A_2 и A_1', A_2' – симметрические, B, B' – несимметрические матрицы. Если $(A_1, A_2, B) \sim (A_1', A_2', B')$, то из равенств (6) следует, что

(1) $q_{13} = q_{23} = 0$ (иначе A_1' или A_2' – несимметрическая матрица);
(2) $q_{33} \neq 0$ (иначе B' – симметрическая матрица).

Таким образом, равенства (6) примут вид

$$\begin{cases} P^T (q_{11} A_1 + q_{12} A_2) P = A_1'; \\ P^T (q_{21} A_1 + q_{22} A_2) P = A_2'; \\ P^T (q_{31} A_1 + q_{32} A_2 + q_{33} B) P = B'. \end{cases} \tag{7}$$

При этом, если $(A_1, A_2, B) \sim (A_1', A_2', B')$, то $(A_1, A_2) \sim (A_1', A_2')$ в смысле эквивалентности, определяемой равенствами (5), с помощью матриц

$$P = (p_{ij})_{2\times 2},\ \tilde{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}.$$

В работе [20] авторы указали представители классов такой эквивалентности для пар матриц второго порядка. Далее приведем их результаты в таблице 1, при этом для каждой пары матриц A_1, A_2 укажем стабилизирующие матрицы P и $\tilde{Q}$.

Пусть ε – такой фиксированный элемент F, что $\eta \neq x^2 + x$ для всех $x \in F$, ε_t – такой фиксированный элемент для каждого значения $t \in F$, $t \neq 0, 1$, что $tx^2 + (t+1)x + \varepsilon_t$ является неприводимым в $F[x]$.

таблица 1

A_1, A_2	стабилизирующие матрицы P, $\tilde{Q}$
1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;	$\frac{1}{ad}\cdot\begin{pmatrix} d & 0 \\ c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ad & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, $a, d, c \in F$, $ad \neq 0$;
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$, $\eta \in \{0, \varepsilon\}$;	$\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} a+sc & c\eta + a(s+1) \\ c & a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a^2 + c^2(\eta+s) & c^2 \\ a^2(s+1) + sc^2\eta & a^2 + c^2\eta \end{pmatrix}$, $a, c \in F$, $\Delta = a^2 + ac + c^2\eta \neq 0,\ s = 0, 1$;
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;	$\frac{1}{ad}\cdot\begin{pmatrix} d & 0 \\ c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ac & ad \end{pmatrix}$, $a, d, c \in F$, $ad \neq 0$;
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f & 0 \end{pmatrix}$, $f \in F$, $f \neq 1$;	$\frac{1}{ad}\cdot\begin{pmatrix} d & 0 \\ c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ac(1+f) & ad \end{pmatrix}$, $a, d, c \in F$, $ad \neq 0$;
5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;	$\frac{1}{a}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, $a \in F$, $a \neq 0$;

6. $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&\eta\end{pmatrix}$, $\eta\in\{0,\varepsilon\}$;	$\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix}a+c(s+1)&as+c\eta\\c&a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\Delta&0\\\Delta s&\Delta\end{pmatrix}$, $a,c\in F,\ \Delta=a^2+ac+c^2\eta\neq 0,\ s=0,1$;
7. $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t&1\\0&0\end{pmatrix},\ t=0,1$;	$\frac{1}{a}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a^2&0\\0&a^2\end{pmatrix},\ a\in F,\ a\neq 0$;
8. $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t&1\\0&\mu\end{pmatrix}$, $\mu\in\{0,\varepsilon_t\},\ t\in F,\ t\neq 0,1.$	$\begin{pmatrix}1/a&s(1+t)/(at)\\0&1/a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a^2&0\\sa^2(1+t)&a^2\end{pmatrix}$, $a\in F,\ a\neq 0,\ s=0,1.$

Заметим, если P и $\tilde{Q}=(q_{ij})_{2\times 2}$ – стабилизирующие матрицы для пары симметрических матриц (A_1A_2), то P и

$$Q=\begin{pmatrix}q_{11}&q_{12}&0\\q_{21}&q_{22}&0\\q_{31}&q_{32}&q_{33}\end{pmatrix}$$

являются стабилизирующими матрицами для тройки (A_1,A_2,B).

Рассмотрим произвольную тройку матриц (A_1,A_2,B), где (A_1,A_2) – одна из пар симметрических матриц таблицы 1 (строки 1, 2), $B=(b_{ij})_{2\times 2}$, $b_{12}\neq b_{21}$. Полагая

$$P=E,\ Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\b_{12}/(b_{12}+b_{21})&b_{11}/(b_{12}+b_{21})&1/(b_{12}+b_{21})\end{pmatrix},$$

мы получаем

$$(A_1,A_2,B)\sim\Pi=\left(A_1,A_2,\begin{pmatrix}0&0\\1&b\end{pmatrix}\right),$$

где $b=(b_{12}a_1+b_{22}+b_{11}a_2)/(b_{12}+b_{21})$, $(a_1,a_2)\in\{(0,0),(1,0),(1,\eta)\}$. Далее рассмотрим каждый случай в отдельности.

Случай 1. Пусть $A_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Если $b=0$, то

$$\Pi=\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right). \tag{8}$$

Если $b \neq 0$, то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1/b & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right). \tag{9}$$

Докажем, что тройки (8) и (9) неэквивалентны. Предположим противное. Пусть существует пара матриц P, $\tilde{Q}$ (см. таблицу 1), стабилизирующая A_1, A_2, такая, что (8) и (9) эквивалентны. Тогда равенство $P^T\left(q_{31}A_1 + q_{32}A_2 + q_{33}B\right)P = B'$ системы (7) примет вид

$$\begin{cases} (d^2q_{32} + c(c+d)q_{33})/(a^2d^2) = 0; \\ (dq_{31} + cq_{33})/(ad^2) = 0; \\ (dq_{31} + (c+d)q_{33})/(ad^2) = 1; \\ q_{33}/d^2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $q_{33} = 0$. Противоречие.

Случай 2. Пусть $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$, где $\eta \in \{0, \varepsilon\}$.

Полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b+1 \end{pmatrix} \right).$$

Рассмотрим тройки вида

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \right), \tag{10}$$

где β пробегает множество всех представителей смежных классов группы $F = \langle F, + \rangle$ по подгруппе $H = \{0, 1\}$. Докажем, что тройки вида (10) неэквивалентны между собой. Предположим противное. Пусть существует пара P, $\tilde{Q}$, стабилизирующая A_1, A_2, такая, что для некоторых $\beta, \beta' \in F$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \right) \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta' \end{pmatrix} \right).$$

Тогда равенство $P^T\left(q_{31}A_1 + q_{32}A_2 + q_{33}B\right)P = B'$ системы (7) примет вид

$$\begin{cases} c^2q_{31} + (c^2(s+\eta) + a^2)q_{32} + ((s+\beta)c^2 + ac)q_{33} = 0; \\ (a^2 + c^2\eta)q_{31} + (sc^2\eta + a^2(s+1))q_{32} + (c^2\eta + a(s+\beta+1)c)q_{33} = 0; \\ ((a^2 + c^2\eta)q_{31} + (sc^2\eta + a^2(s+1))q_{32} + (a^2 + c(s+\beta)a)q_{33})/\Delta^2 = 1; \\ (a^2q_{31} + (a^2(s+\eta+1) + c^2\eta^2)q_{32} + ((s+\beta+1)a^2 + ca\eta)q_{33})/\Delta^2 = \beta'. \end{cases}$$

Отсюда $q_{31} = (c\eta + a\beta + cs\beta)$, $q_{32} = (a + c(s + \beta + 1))$, $q_{33} = \Delta$ и

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta + s + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta' \end{pmatrix},\ s = 0, 1.$$

Следовательно, β и β' лежат в одном смежном классе группы $\langle F, +\rangle$ по подгруппе $H = \{0, 1\}$. Противоречие.

Таким образом, получены представители всех классов рассматриваемого отношения эквивалентности:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$,

где $\eta \in \{0, \varepsilon\}$, β пробегает множество всех представителей смежных классов группы $\langle F, +\rangle$ по подгруппе $H = \{0, 1\}$.

При $F = Z_2$ количество классов равно 5. Это же количество представителей было получено в работе [21] с помощью пакета прикладных программ Matlab.

Перейдем к вопросу классификации колец. Если ε – некоторый элемент $F = GF(2^r)$, такой, что $\epsilon \neq x^2 + x$ для всех $x \in F$, то для любого $\rho \in \mathrm{Aut}(F)$ элемент ε^ρ обладает этим же свойством. Пусть Σ – множество всех таких элементов поля $F = GF(p^r)$, что для любых $a, b \in \Sigma$ не существует изоморфизма ρ поля F при котором $a^\rho = b$ (равносильно – для любых $a, b \in \Sigma$ не существует такого натурального числа k, что $a^{p^k} = b$). Пусть Σ_1 – множество всех таких элементов Σ, что $a \neq b + 1$ для любых $a, b \in \Sigma_1$.

Принимая во внимание вышеприведенный список представителей отношения эквивалентности, определяемого равенствами (6), и, учитывая действие автоморфизма ρ в соотношениях теоремы 2, мы получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Тройки матриц, представленные ниже, определяют все попарно неизоморфные локальные кольца характеристики p такие, что*

$$R/J \cong F \subseteq Z(R),\ \dim_F J/J^2 = 2,\ \dim_F J^2 = 3,\ J^3 = 0,$$

где J – радикал Джекобсона кольца R, $F = GF(p^r)$ – поле.

При $p = 2$:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$, *где* $\beta \in \Sigma_1$, $\eta \in \{0, \varepsilon\}$, ε *– некоторый фиксированный элемент* F, *такой, что* $\varepsilon \neq x^2 + x$ *для всех* $x \in F$.

При $p \neq 2$ *(см. [12]):*

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & f \\ f & 1 \end{pmatrix}$, $f \in \Sigma$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\zeta \in \{0, 1, \delta\}$, δ *– некоторый фиксированный элемент из* $F^* = F \setminus \{0\}$, $\delta \notin F^{*2}$, $\delta \neq 1$.

3 Кольца характеристики p^2

Пусть R – локальное кольцо характеристики p^2. В силу теоремы 1 кольцо R содержит элемент b мультипликативного порядка $p^r - 1$ такой, что $b + J$ – примитивный элемент F и, относительно умножения

$$(s + J)(x + J^{i+1}) = sx + J^{i+1},$$

$s \in R$, $x \in J^i$, $i \in \mathbb{N}$, факторкольцо J^i/J^{i+1} – векторное пространство над F. Пусть

$$\dim_F J/J^2 = 2,\ \dim_F J^2 = 3,\ J^3 = 0,\ pe \in J^2$$

и $b \in Z(R)$. Выберем $u_1, u_2, v_1, v_2 \in J$ такими, что

$$J = Fu_1 \oplus Fu_2 \oplus J^2,\ J^2 = Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus F(pe).$$

Тогда

$$u_i u_j = m_{ij}^{(1)} v_1 + m_{ij}^{(2)} v_2 + m_{ij}^{(3)} (pe),$$

для некоторых $m_{ij}^{(k)} \in F$. Рассмотрим матрицы умножения из структурных констант: $M_k = \left(m_{ij}^{(k)}\right)_{2\times 2}$, $k = \overline{1,3}$.

Пусть R и R' – произвольные кольца, указанного выше типа, с матрицами умножения M_1, M_2, M_3 и M_1', M_2', M_3', соответственно. Если φ – изоморфизм R на R', то $\varphi(pe) = pe'$, где e' – единица R', и поэтому условия в формулировке следующей теоремы о необходимых и достаточных условия изоморфности R и R' существенно изменятся в сравнении с условиями теоремы (2).

Теорема 4. ([10]) $R \cong R'$ *тогда и только тогда, когда существуют невырожденные матрицы* $P = (p_{ij})_{2\times 2}$ *и* $Q = (q_{ij})_{3\times 3}$, $q_{13} = q_{23} = 0$,

$q_{33} = 1$, *над полем* F *и* $\rho \in \mathrm{Aut}(F)$ *такие, что*

$$\left\{ \begin{array}{l} P^T \left(q_{11} M_1^\rho + q_{12} M_2^\rho\right) P = M_1'; \\ P^T \left(q_{21} M_1^\rho + q_{22} M_2^\rho\right) P = M_2'; \\ P^T \left(q_{31} M_1^\rho + q_{32} M_2^\rho + M_3^\rho\right) P = M_3'. \end{array} \right. \tag{11}$$

где $M_k^\rho = \left(\left(m_{ij}^{(k)}\right)^\rho\right)$, $k = \overline{1,3}$.

Рассмотрим кольцо матриц $M_2(F)$ над конечным полем $F = GF(2^r)$, $p = 2$. Упорядоченные последовательности линейно независимых матриц (A_1, A_2, B), (A_1', A_2', B') назовем эквивалентными, если существуют невырожденные матрицы $P = (p_{ij})_{2\times 2}$, $\tilde{Q} = (r_{ij})_{2\times 2}$ над полем F и элементы $q_{31}, q_{32} \in F$, такие, что

$$\left\{ \begin{array}{l} P^T \left(q_{11} A_1 + q_{12} A_2\right) P = A_1'; \\ P^T \left(q_{21} A_1 + q_{22} A_2\right) P = A_2'; \\ P^T \left(q_{31} A_1 + q_{32} A_2 + B\right) P = B'. \end{array} \right. \tag{12}$$

При этом, если $(A_1, A_2, B) \sim (A_1', A_2', B')$, то $(A_1, A_2) \sim (A_1', A_2')$ в смысле эквивалентности, определяемой равенствами (5), с помощью матриц $P = (p_{ij})_{2\times 2}$ и $\tilde{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$. Пусть

$$\Pi = \left(A_1, A_2, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right)$$

– тройка линейно независимых матриц, где (A_1, A_2) – одна из пар матриц, указанных ранее в таблице 1, $B = (b_{ij})_{2\times 2}$ – произвольная ненулевая матрица. При фиксированных (A_1, A_2) и их стабилизирующих матрицах P и $\tilde{Q}$ важно третье уравнение системы

$$P^T \left(q_{31} A_1 + q_{32} A_2 + B\right) P = B', \tag{13}$$

посредством которого возможно определить отношение эквивалентности на $M_2(F)$.

Далее рассмотрим каждый случай, соответствующий строке таблицы 1, в отдельности.

Случай 1. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

При $P = E$ матрица B' является линейной комбинацией A_1, A_2, B и, следовательно, мы можем всегда подобрать такие q_{31} и q_{32}, что две ячейки матрицы B' будут нулевыми. Эти ячейки соответствуют ненулевым ячейкам матриц A_1, A_2. В данном случае можно взять $P = \tilde{Q} = E$, $q_{31} = b_{21}$, $q_{32} = b_{11}$ и получить

$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}\right).$$

Таким образом, полагаем далее $b_{11} = b_{21} = 0$.

Если $b_{12} \neq 0$, $b_{22} = 0$, то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/b_{12} \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right). \tag{14}$$

Если $b_{12} = 0$, $b_{22} \neq 0$, то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{b_{22}} \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} \sqrt{b_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \tag{15}$$

Если $b_{12} \neq 0$, $b_{22} \neq 0$, то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{b_{22}}/b_{12} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{b_{22}} \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{12}^2/b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \tag{16}$$

Так как тройка (15) состоит из симметрических матриц, то она неэквивалентна тройке (14) или (16). Если тройки (14) и (16) эквивалентны, то

$$\begin{pmatrix} (ac + adq_{32})/a^3d & (q_{31}+1)/ad \\ q_{31}/ad & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Противоречие.

Случай 2. Пусть $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$, где $\eta \in \{0, \varepsilon\}$.

Если $b_{12} = b_{21}$, то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ b_{12} & b_{11} & 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right),$$

где $b = b_{22} + b_{12} + b_{11}\eta$. Если $b \neq 0$, то, полагая

$$P = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot E, \ Q = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем
$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right). \tag{17}$$

Если $b_{12} \neq b_{21}$, то, повторяя вычисления случая 2 для колец характеристики $p = 2$, мы получаем тройки вида
$$\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & \beta\end{pmatrix}\right), \tag{18}$$
где β пробегает множество всех представителей смежных классов группы $F = \langle F, +\rangle$ по подгруппе $H = \{0, 1\}$.

Тройка (17) состоит из симметрических матриц и поэтому неэквивалентна (18).

Случай 3. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Как и в случае 1, пусть $b_{11} = b_{21} = 0$.

Если $b_{22} = 0$, $b_{12} \neq 0$, то, полагая
$$P = \begin{pmatrix}1/b_{12} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix}b_{12}^2 & 0 & 0\\ 0 & b_{12} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$
получаем
$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right). \tag{19}$$

Если $b_{22} \neq 0$ (b_{12} – любое), то, полагая
$$P = \begin{pmatrix}1 & 0\\ b_{12}/b_{22} & 1/\sqrt{b_{22}}\end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ b_{12}/\sqrt{b_{22}} & \sqrt{b_{22}} & 0\\ b_{12}^2/b_{22} & b_{12} & 1\end{pmatrix},$$
получаем
$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right). \tag{20}$$

Если тройки (19) и (20) эквивалентны, то
$$\begin{pmatrix}(c + cq_{32} + dq_{31})/(a^2 d) & 1/(ad)\\ q_{32}/(ad) & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$
Противоречие.

Случай 4. $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ f & 0\end{pmatrix}$, где $f \in F$, $f \neq 1$.

Пусть $b_{11} = b_{12} = 0$.

Если $b_{22} = 0$, $b_{21} \neq 0$, то, полагая
$$P = \begin{pmatrix}1/b_{21} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix}b_{21}^2 & 0 & 0\\ 0 & b_{21} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right). \tag{21}$$

Если $b_{22} \neq 0$ (b_{21} – любое), то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_{21}/(b_{22}(f+1)) & 1/\sqrt{b_{22}} \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_{21}/\sqrt{b_{22}} & \sqrt{b_{22}} & 0 \\ b_{21}^2/(b_{22}(f+1)^2) & b_{21}/(f+1) & 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \tag{22}$$

Если тройки (21) и (22) эквивалентны, то

$$\begin{pmatrix} (c + dq_{31} + (1+f)cq_{32})/(a^2 d) & q_{32}/(ad) \\ (fq_{32}+1)/(ad) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Противоречие.

Случай 5. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пусть $b_{11} = b_{12} = 0$.

Если $b_{21} = 0$, $b_{22} \neq 0$, то, полагая

$$P = \frac{1}{\sqrt{b_{22}}} \cdot E,\ Q = \begin{pmatrix} b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \tag{23}$$

Если $b_{21} \neq 0$ (b_{22} – любое), то, полагая

$$P = \frac{1}{\sqrt{b_{21}}} \cdot E,\ Q = \begin{pmatrix} b_{21} & 0 & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \right).$$

где $b = b_{22}/b_{21}$. Рассмотрим тройки вида

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \right), \tag{24}$$

где β – произвольный элемент F, и докажем, что они неэквивалентны между собой. Предположим противное. Пусть существует пара P, $\tilde{Q}$, стабилизирующая A_1, A_2, такая, что для некоторых $\beta, \beta' \in F$, $\beta \neq \beta'$,

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & \beta\end{pmatrix}\right) \sim \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & \beta'\end{pmatrix}\right).$$

Тогда равенство (13) примет вид

$$\begin{pmatrix}q_{31}/a^2 & q_{32}/a^2\\ 1/a^2 & (\beta + q_{32})/a^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & \beta'\end{pmatrix}.$$

Отсюда $q_{31} = q_{32} = 0$, $a = 1$ и $\beta = \beta'$. Противоречие.

Если тройка (23) эквивалентна тройке вида (24), то

$$\begin{pmatrix}q_{31}/a^2 & q_{32}/a^2\\ 0 & (q_{32}+1)/a^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & \beta\end{pmatrix}.$$

Противоречие.

Случай 6. $A_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & \eta\end{pmatrix}$, где $\eta \in \{0, \varepsilon\}$.

Пусть $b_{11} = b_{21} = 0$.

Если $b_{12} \neq 0$, $b_{22} = 0$, то, полагая

$$P = \frac{1}{\sqrt{b_{12}}} \cdot E,\ Q = \begin{pmatrix}b_{12} & 0 & 0\\ 0 & b_{12} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

получаем тройку матриц

$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right). \tag{25}$$

Если $b_{12} = 0$, $b_{22} \neq 0$, то, полагая

$$P = \frac{1}{\sqrt{b_{22}}} \cdot E,\ Q = \begin{pmatrix}b_{22} & 0 & 0\\ 0 & b_{22} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right). \tag{26}$$

Если $b_{12} \neq 0$, $b_{22} \neq 0$, $b_{12} = b_{22}$, то, полагая

$$P = \frac{1}{\sqrt{b_{12}}} \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix}b_{12} & 0 & 0\\ b_{12} & b_{12} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

получаем тройку (25).

Если $b_{12} \neq 0$, $b_{22} \neq 0$, $b_{12} \neq b_{22}$ и $\eta = (b_{22} + b_{12})/b_{12}$, то, полагая

$$P = \begin{pmatrix}\sqrt{b_{12}}/(b_{12}+b_{22}) & 1/\sqrt{b_{12}}\\ \sqrt{b_{12}}/(b_{12}+b_{22}) & 0\end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix}b_{12}+b_{22} & 0 & 0\\ 0 & b_{12}+b_{22} & 0\\ b_{12} & b_{12} & 1\end{pmatrix},$$

получаем тройку матриц (26).

Если $b_{12} \neq 0$, $b_{22} \neq 0$, $b_{12} \neq b_{22}$ и $\eta \neq (b_{22}+b_{12})/b_{12}$, то, взяв матрицы P и Q с параметрами $s=0$, $c=1$, $q_{31}=(ab_{22}+b_{12}\eta)/(a^2+a+\eta)$, $q_{32}=(b_{12}+b_{22}+ab_{12})/(a^2+a+\eta)$, $a=\sqrt{(b_{22}+b_{12})/b_{12}+\eta}$, мы получим, что

$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right),$$

где $b=(b_{22}a^2+(b_{12}+b_{22})\eta)/(a^2+a+\eta)^2$. Такие тройки матриц при $b \neq 0$ эквивалентны тройке (26). Причем $\Delta = a^2+a+\eta = (b_{22}+b_{12})/b_{12}+\eta+\sqrt{(b_{22}+b_{12})/b_{12}+\eta}+\eta = (b_{22}+b_{12})/b_{12}+\sqrt{(b_{22}+b_{12})/b_{12}+\eta}$. Если $\Delta = 0$, то $((b_{22}+b_{12})/b_{12})^2+(b_{22}+b_{12})/b_{12}=\eta$. Если $\eta \neq 0$, то получаем противоречие. Если $\eta = 0$, то $((b_{22}+b_{12})/b_{12})^2=(b_{22}+b_{12})/b_{12}$ и, следовательно, $b_{12}=b_{22}$ или $b_{22}=0$. Противоречие.

Если $\eta \neq 0$, то, полагая

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{\eta} \\ \frac{1}{\sqrt{\eta}} & 1 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} \sqrt{\eta} & 0 & 0 \\ \sqrt{\eta} & \sqrt{\eta} & 0 \\ \sqrt{\eta} & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем, что тройки (26) и (25) эквивалентны.

Если $\eta = 0$ и тройки (26), (25) эквивалентны, то равенство (13) равносильно системе

$$\begin{cases} (a+c+cs)(c+(a+cs)q_{32})=0; \\ a+c+cs+(a+c)q_{31}+(a+c+cs+as)q_{32}=0; \\ cs+(a+c)q_{31}+(c+a)sq_{32}=0; \\ s(1+(1+s)q_{32})/(a+c)^2=1; \end{cases}$$

Отсюда, $q_{32}=c/(a+cs)$, $q_{31}=0$ и

$$\begin{pmatrix} 0 & (a+c+cs)/(a(a+c)(a+cs)) \\ 0 & s/((a+c)(a+cs)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При $s=0$ или $s=1$ получаем противоречие.

Случай 7. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $t=0,1$.

Пусть $b_{12}=b_{21}=0$.

Если $b_{11}=0$, $b_{22}\neq 0$, то, полагая

$$P = \frac{1}{\sqrt{b_{22}}}\cdot E, \ Q = \begin{pmatrix} b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \qquad (27)$$

Если $b_{11} \neq 0$ (b_{22} – любое), то, полагая

$$P = \frac{1}{\sqrt{b_{11}}} \cdot E,\ Q = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right),$$

где $\beta = b_{22}/b_{11}$. Рассмотрим тройки вида

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right), \tag{28}$$

где β – произвольный элемент F, и докажем, что они неэквивалентны между собой. Предположим противное. Пусть существует пара P, $\tilde{Q}$, стабилизирующая (A_1, A_2), такая, что для некоторых $\beta, \beta' \in F$, $\beta \neq \beta'$,

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right) \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix} \right).$$

Тогда равенство (13) примет вид

$$\begin{pmatrix} (q_{32}t + 1)/a^2 & (q_{31} + q_{32})/a^2 \\ q_{31}/a^2 & (\beta + q_{31})/a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix}.$$

Отсюда $q_{31} = q_{32} = 0$ и $a = 1$, $\beta = \beta'$. Противоречие.

Аналогично, если тройка (27) эквивалентна некоторой тройке вида (28), то равенство (13) примет вид

$$\begin{pmatrix} q_{32}t/a^2 & (q_{31} + q_{32})/a^2 \\ q_{31}/a^2 & (q_{31} + 1)/a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}.$$

Отсюда $q_{31} = q_{32} = 0$. Противоречие.

Случай 8. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, где $t \in F$, $t \neq 0, 1$, $\mu \in \{0, \varepsilon_t\}$.

Пусть $b_{12} = b_{21} = 0$.

Если $b_{11} = 0$, $b_{22} \neq 0$, то, полагая

$$P = \frac{1}{\sqrt{b_{22}}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \tag{29}$$

Если $b_{11} \neq 0$ (b_{22} – любое), то, полагая

$$P = \frac{1}{\sqrt{b_{11}}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & (1+t)/t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{11}(1+t) & b_{11} & 0 \\ b_{11}(1+t)/t & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем

$$\Pi \sim \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right), \tag{30}$$

где $\beta = b_{22}/b_{11} + 1/t + 1/t^2$.

Рассмотрим тройки вида (30), полагая при этом, что β – произвольный элемент поля F. Пусть $\Gamma = \left\{0, 1/t + 1/t^2\right\}$ – аддитивная подгруппа $F = \langle F, +\rangle$. Если $\beta' = \beta + 1/t + 1/t^2$, то

$$\Pi = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \right) \sim \Pi' = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix} \right)$$

посредством матриц

$$P = \begin{pmatrix} 1 & (1+t)/t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+t & 1 & 0 \\ (1+t)/t & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратно, пусть существует пара P, Q, такая, что $\Pi \sim \Pi'$. Тогда равенство (13) примет вид

$$\begin{cases} (tq_{32}+1)/a^2 = 1; \\ tq_{31} + (1+t)s + ((1+t)s+1)tq_{32} = 0; \\ tq_{31} + (1+t)s + (1+t)stq_{32} = 0; \\ (s + t^2 s + \beta t^2 + t^2 q_{31} + (\mu + s + st)t^2 q_{32})/t^2 = \beta'. \end{cases}$$

Складывая второе и третье уравнения, мы получим $q_{32} = 0$. Тогда $a = 1$, $q_{31} = (1+t)s/t$ и $\beta' = (1/t^2 + 1/t)s + \beta$. Следовательно, $\beta = \beta'$ или $\beta' = 1/t^2 + 1/t + \beta$.

Таким образом, мы получаем неэквивалентные тройки вида (30), где β пробегает множество всех представителей смежных классов группы $F = \langle F, +\rangle$ по подгруппе $\Gamma = \left\{0, 1/t + 1/t^2\right\}$.

Если тройка (29) эквивалентна тройке вида (30), то

$$\begin{cases} tq_{32}/a^2 = 1; \\ q_{31} + (s + ts + 1)q_{32} = 0; \\ q_{31} + (s + ts)q_{32} = 0; \\ (t + tq_{31} + (t^2 s + (\mu + s)t)q_{32})/(a^2 t) = \beta. \end{cases}$$

Сложив второе и третье уравнения, мы получим $q_{32} = 0$. Противоречие.

Пусть Σ – множество всех таких элементов поля F, что для любых $a, b \in \Sigma$ не существует изоморфизма ρ поля F при котором $a^\rho = b$ (равносильно – для любых $a, b \in \Sigma$ не существует такого натурального числа k, что $a^{p^k} = b$). Пусть Σ_1 – множество всех таких элементов Σ, что $a \neq b+1$ для любых $a, b \in \Sigma_1$. Если $t \in F$, $t \neq 0, 1$, то обозначим через Σ_t множество всех таких элементов Σ, что $a \neq b + 1/t + 1/t^2$ для любых $a, b \in \Sigma_t$.

Принимая во внимание вычисления в каждом из восьми рассмотренных случаев, мы получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 5. *Тройки матриц, представленные ниже, определяют все попарно неизоморфные локальные кольца характеристики* p^2, $p = 2$, *с условиями:*

$$\dim_F J/J^2 = 2,\ \dim_F J^2 = 3,\ J^3 = 0,\ pe \in J^2,$$

$b \in Z(R)$, *где* b *– элемент мультипликативного порядка* $p^r - 1$ *такой, что* $b + J$ *– примитивный элемент* F.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\eta \in \{0, \varepsilon\}$;

(5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$, $\beta \in \Sigma_1,\ \eta \in \{0, \varepsilon\}$;

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f \in \Sigma,\ f \neq 1$;

(9) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f \in \Sigma,\ f \neq 1$;

(10) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(11) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & f \end{pmatrix}$, $f \in \Sigma$;

(12) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\eta \in \{0, \varepsilon\}$;

(13) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(14) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t = 0, 1$;

(15) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$, $t = 0, 1,\ f \in \Sigma$;

(16) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t \in \Sigma,\ t \neq 0, 1,\ \mu \in \{0, \varepsilon_t\}$;

(17) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $t \in \Sigma,\ t \neq 0, 1,\ \mu \in \{0, \varepsilon_t\},\ \beta \in \Sigma_t$.

4 Кольца характеристики p^3

Пусть R – локальное кольцо характеристики p^3, b элемент R мультипликативного порядка p^r-1 такой, что $b+J$ – примитивный элемент F,

$$\dim_F J/J^2 = 2,\ \dim_F J^2 = 3,\ J^3 = 0.$$

Тогда существуют $u \in J$ и $\sigma \in \mathrm{Aut}(R_0)$ такие, что $R = R_0 \oplus R_0 u$, где $R_0 = GR(p^{3r}, p^3) = K_0 + K_0 p + K_0 p^2$, $K_0 = \langle b\rangle \cup \{0\}$, $ur_0 = r_0^\sigma u$, для любого $r_0 \in R_0$ (см. теорему 1), и

$$J = Fu \oplus F(pe) \oplus J^2,\ J^2 = Fu^2 \oplus F(pu) \oplus F(pe)^2.$$

Так как $\mathrm{Aut}(R_0) = \{\tau, \tau^2, \ldots, \tau^{r-1}, \tau^r = id\}$, где τ – автоморфизм Фробениуса, то количество таких колец равно r. Причем при $b \in Z(R)$ единственным кольцом указанного типа является

$$R = GR(p^{3r}, p^3)[x]/(x^3, p^2x, px^2).$$

References

[1] V.P. Elizarov, *Конечные кольца*, Helios ARV, (2006).

[2] V.G. Antipkin, V.P. Elizarov, *Rings of order p^3*, Siberian Mathematical Journal, **23** (1982), 457-464.

[3] V.P. Elizarov, *Non-nilpotent finite rings*, VINITI, **1472** (1985).

[4] J.B. Derr, *Noncommutative rings of order p^4*, Journal of Pure and Applied Algebra, **97** (1994), 109-116.

[5] B. Gorbas, G.D. Williams, *Rings of order p^5. I. Nonlocal rings*, J. Algebra, **231**:2 (2000), 677–690. Zbl 1017.16014

[6] B. Gorbas, G.D. Williams, *Rings of order p^5. II. Local rings*, J. Algebra, **231**:2 (2000), 691–704. Zbl 1017.16015

[7] C. Akers, S. Szabo, *A partial classification of local rings of order p^6*, Involve a Journal of Mathematics, **16**:1 (2023), 151–165. Zbl 1514.16019

[8] E.V. Zhuravlev, *Local rings of order p^6 with 4-nilpotent radical of Jacobson*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **3** (2006), 15–29. Zbl 1117.1600

[9] E.V. Zhuravlev, *On the classification of finite commutative local rings*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 625–638. Zbl 1383.1300

[10] C.J. Chikunji, *On a class of finite rings*, Commun. Algebra, **27**:10 (1999), 5049–5081. Zbl 0942.16027

[11] R. Raghavendran, *Finite associative rings*, Compos. Math., **21** (1969), 195–229. Zbl 0179.33602

[12] E.V. Zhuravlev, *On equivalence classes of matrices over a finite field of odd characteristic*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **20** (2023), 1200–1210.

[13] P.S. Bremser, *Congruence classes of matrices in $GL_2(F_q)$*, Discrete Math., **118**:1-3 (1993), 243–249. Zbl 0781.15007

[14] G.D. Williams, *Congruence of (2×2) matrices*, Discrete Math., **224**:1-3 (2000), 293–297. Zbl 0999.15022

[15] B. Gorbas, G.D. Williams, *Matrix representatives for three-dimensional bilinear forms over finite fields*, Discrete Math., **185**:1-3 (1998), 51–61. Zbl 0951.11014

[16] B. Gorbas, G.D. Williams, *Congruence classes in $M_3(F_q)$ (q odd)*, Discrete Math., **219**:1-3 (2000), 37–47. Zbl 0957.15007

[17] B. Gorbas, G.D. Williams, *Congruence classes in $M_3(F_q)$ (q even)*, Discrete Math., **257**:1 (2002), 15–27. Zbl 1014.15010

[18] C.J. Chikunji, *On a class of rings of order p^5*, Math. J. Okayama Univ., **45** (2003), 59–71. Zbl 1055.16023

[19] B. Gorbas, G.D. Williams, *Gongruence of two-dimensional subspaces in $M_2(K)$ (characteristic $\neq 2$)*, Pac. J. Math., **188**:2 (1999), 225–235. Zbl 0929.16029

[20] B. Gorbas, G.D. Williams, *Gongruence of two-dimensional subspaces in $M_2(K)$ (characteristic 2)*, Pac. J. Math., **188**:2 (1999), 237–249. Zbl 0929.16030

[21] C.J. Chikunji, *Using Matlab to solve a classification problem in finite rings*, 2^{nd} international conference on the teaching of mathematic (Greece), (2002).

Evgeniy Vladimirovich Zhuravlev
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
E-mail address: evzhuravlev@mail.ru

Olga Alexandrovna Minniakhmetova
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
E-mail address: olya-filina@mail.ru