S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 517.956.223+519.635.1
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 35J08,
35J30

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ-2 ДЛЯ 3-ГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ

В.В. Карачик

Представлено заполняется редактором

Abstract: The Green's function for some boundary value problem for the 3-harmonic equation in the unit ball is constructed and an integral representation of the solution of this problem is given.

Keywords: 3-harmonic equation, Green's function, Dirichlet-2 problem, integral representation.

1 Введение

Большое количество работ посвящено построению функций Грина в явном виде для различных полигармонических краевых задач. Во-первых отметим работу [1], где построены функции Грина бигармонических задач Дирихле, Неймана, Робина и др. в двумерном диске, а также работы [2, 3, 4], где находится явное представление гармонической функции Робина. Для бигармонического и 3-гармонического уравнений в работах [5, 6], приведена явная форма функции Грина в секторе, а в [7, 8] исследована разрешимость и построены функции Грина нескольких локальных и нелокальных краевых задач с инволюцией для бигармонического уравнения. В [9] приведен явный вид функции Грина задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в единичном шаре.

Karachik, V.V., Green's function of the Dirichlet-2 problem for the 3-harmonic equation in a ball.

Поступила 25 ноября 2024 г., опубликована 31 декабря 2024 г.

Функциям Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре посвящены работы [10, 12, 11, 13]. Отметим работу [14], где находятся решения задач Дирихле и Неймана для однородного полигармонического уравнения без использования функции Грина. Для нахождения полиномиальных решений задачи Дирихле с полиномиальными граничными данными в [15] построен оператор Грина.

Условия разрешимости некоторых вариантов краевых задач для бигармонического уравнения в шаре были получены также в работах [16, 17]. В [18] приводятся функции Грина задач Навье [19] и Рикье-Неймана для бигармонического уравнения в шаре, а в работах [20, 21], используя результаты из [22], построены функции Грина таких задач для полигармонического уравнения. Задача Неймана для полигармонического уравнения исследована в работах [23, 24]. В работе [25] исследована фредгольмовость и индекс обобщённой задачи Неймана, содержащей степени нормальных производных в граничных условиях

Следует отметить также некоторые недавно опубликованные работы по построению функции Грина для различных краевых задач [26, 27, 28, 29]. Применение функций Грина в задачах механики и физики можно найти в [30, 31, 32, 33, 34, 35].

В настоящей работе рассматривается построение решения следующей краевой задачи для 3-гармонического уравнения в единичном шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$

$$\Delta^3 u(x) = f(x), \quad x \in S, \tag{1}$$

$$u|_{\partial S} = \varphi_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial S} = \varphi_1, \quad \Delta u|_{\partial S} = \varphi_2, \tag{2}$$

которую можно назвать задачей Дирихле-2, поскольку, как оказалось, она близка к задаче Дирихле: у них одна и та же функция Грина. Граничные условия задачи (1)-(2) представляют собой некий симбиоз условий Дирихле и условий Навье [20]. Ниже будет найдена функция Грина этой задачи. Решение задачи будем искать в классе $u \in C^6(S) \cap C^5(\bar{S})$.

Сначала, в разделе 2, приводятся некоторые сведения об элементарных решениях и функциях Грина задачи Дирихле для полигармонического и 3-гармонического уравнений и указывается их связь с фундаментальным решением С.Л.Соболева [36]. Затем, в теореме 1 из раздела 3, с помощью лемм 1-3 о свойствах функции Грина $\mathcal{G}_6(x, \xi)$, находится интегральное представление (34) решения рассматриваемой задачи (1)-(2) через функцию Грина $\mathcal{G}_6(x, \xi)$. После этого, в разделе 4, доказывается теорема 2 о существовании решения исходной задачи и находится минимальная необходимая гладкость граничных данных. Доказательство теоремы 2 опирается на леммы 4-8. В этих леммах дается представление (34) о структуре решения задачи (1)-(2). С помощью замечаний 2-4 в следствии 2 получено другое представление (50) решения задачи (1)-(2) без участия функции Грина. Аналогичное представление решения полигармонической задачи Дирихле дано в [14]. В заключении рассматриваются пример 1, иллюстрирующий явную формулу (50).

2 Элементарное решение и функция Грина задачи Дирихле

Хорошо известно, что функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре S при $n \geq 2$ имеет вид

$$G_2(x,\xi) = E_2(x,\xi) - E_2\Big(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\Big), \tag{3}$$

где $E_2(x,\xi)$ – элементарное решение уравнения Лапласа, как его называл А. Бицадзе [37]. В работе [38] было определено элементарное решение бигармонического уравнения

$$E_4(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(n-2)(n-4)}|x-\xi|^{4-n}, & n>4,\, n=3 \\ -\dfrac{1}{4}\ln|x-\xi|, & n=4 \\ \dfrac{|x-\xi|^2}{4}\big(\ln|x-\xi|-1\big), & n=2 \end{cases}, \tag{4}$$

а в работе [9] для 3-гармонического уравнения

$$E_6(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{|x-\xi|^{6-n}}{2\cdot 4(n-2)(n-4)(n-6)}, & n\geq 3, n\neq 4,6, \\ -\dfrac{1}{64}\ln|x-\xi|, & n=6 \\ \dfrac{|x-\xi|^2}{32}\Big(\ln|x-\xi|-\dfrac{3}{4}\Big), & n=4 \\ -\dfrac{|x-\xi|^4}{64}\Big(\ln|x-\xi|-\dfrac{3}{2}\Big), & n=2 \end{cases}. \tag{5}$$

Кроме того были найдены функции Грина $G_4(x,\xi)$ и $G_6(x,\xi)$, соответствующих задач Дирихле в S. Если обозначить $E_k^*(x,\xi) = E_k\big(\frac{x}{|x|}, \xi|x|\big)$, то $G_6(x,\xi)$ имеет вид

$$\begin{aligned} G_6(x,\xi) = E_6(x,\xi) - E_6^*(x,\xi) - \frac{1}{2}\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}E_4^*(x,\xi) \\ - \frac{1}{4}\frac{(|x|^2-1)^2}{4}\frac{(|\xi|^2-1)^2}{4}E_2^*(x,\xi). \end{aligned} \tag{6}$$

На основании функций $E_4(x,\xi)$ и $E_6(x,\xi)$ в [39] было введено элементарное решение m-гармонического уравнения $\Delta^m u = 0$. Если $m \in \mathbb{N}$, то множество $\mathbb{N}\setminus\{1\}$ можно разбить на два непересекающихся множества $\mathbb{N}_m = \{n \in \mathbb{N} : n > 2m > 1\} \cup (2\mathbb{N}+1)$ и дополнение к нему $\mathbb{N}_m^c = \{2, 4, \ldots, 2m\}$. Поскольку множество $\mathbb{N}_m^c$ – конечное, то $\mathbb{N}_m$ – бесконечное. Ясно, что $\mathbb{N}_{m-1}^c \subset \mathbb{N}_m^c$, а поэтому $\mathbb{N}_m \subset \mathbb{N}_{m-1}$. Определим элементарное решение $E_{2m}(x,\xi)$ в виде

$$E_{2m}(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^m|x-\xi|^{2m-n}}{(2-n,2)_m(2,2)_{m-1}}, & n\in\mathbb{N}_m, \\ \dfrac{(-1)^m|x-\xi|^{2m-n}}{(2-n,2)^*_m(2,2)_{m-1}}\Big(\ln|x-\xi| - \sum\limits_{k=1}^{m-n/2}\frac{1}{2k} - \sum\limits_{k=n/2}^{m-1}\frac{1}{2k}\Big), & n\in\mathbb{N}^c_m. \end{cases}, \tag{7}$$

где $(a,b)_k = a(a+b)\dots(a+kb-b)$ – обобщенный символ Похгаммера с соглашением $(a,b)_0=1$, а символ $(a,b)^*_k$ – означает, что если среди сомножителей $a,(a+b),\dots(a+kb-b)$, входящих в $(a,b)_k$, есть 0, то его следует заменить на 1, например, $(-2,2)^*_3 = (-2)\cdot 1\cdot 2 = -4$. Кроме того, если в суммах, входящих в (7) верхний индекс становится меньше нижнего, то сумма считается равной нулю. Заметим, что $(2-n,2)_m = (2-n)(4-n)\dots(2m-n)\neq 0$ при $n\in\mathbb{N}_m$ и значит первая часть формулы (7) определена корректно.

В [21] доказано, что функция $E_{2m}(x,\xi)$ совпадает с элементарными функциями $E_2(x,\xi)$, $E_4(x,\xi)$ и $E_6(x,\xi)$ при $m=1$, $m=2$ и $m=3$, соответственно. Кроме того, симметричная функция $E_{2m}(x,\xi)$, определенная при $x\neq\xi$, удовлетворяет равенствам [20, лемма 2.1]

$$\Delta_\xi E_{2m}(x,\xi) = -E_{2(m-1)}(x,\xi), \quad \Delta_\xi E_2(x,\xi) = 0. \tag{8}$$

Элементарная функция $E_{2m}(x,\xi)$ несколько отличается от фундаментального решения полигармонического уравнения $G_{m,n}(x)$, рассмотренного С.Л.Соболевым [36, p. 521]. Для $n\in\mathbb{N}_m$ разница в множителе $(-1)^m$, а для $n\in\mathbb{N}^c_m$ эта разница более заметна. В [39, Теорема 1] для $n\in\mathbb{N}^c_{m-1}$ была построена функция Грина задачи Дирихле в виде

$$G_{2m}(x,\xi) = E_{2m}(x,\xi) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(|x|^2-1)^k(|\xi|^2-1)^k}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k}E^*_{2m-2k}(x,\xi). \tag{9}$$

Затем, в работе [13], элементарное решение $E_{2m}(x,\xi)$ было слегка подправлено и была введена другая функция $\mathcal{E}_{2m}(x,\xi)$, которая связана с функцией $E_{2m}(x,\xi)$ формулой

$$\mathcal{E}_{2m}(x,\xi) = \begin{cases} E_{2m}(x,\xi), & n\in\mathbb{N}_{m-1} \\ E_{2m}(x,\xi) + \dfrac{(-1)^m|x-\xi|^{2m-n}}{(2-n,2)^*_m(2,2)_{m-1}}\sum\limits_{k=n/2}^{m-1}\frac{1}{2k}, & n\in\mathbb{N}^c_{m-1} \end{cases}. \tag{10}$$

Видно, что $\mathcal{E}_2(x,\xi) = E_2(x,\xi)$ для всех $n \geq 2$. При $m = 2$ имеем $\mathbb{N}_1^c = \{2\}$ и, значит в формуле (4) изменится только последняя строка

$$\mathcal{E}_4(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(n-2)(n-4)}|x-\xi|^{4-n}, & n > 4,\, n = 3 \\ -\dfrac{1}{4}\ln|x-\xi|, & n = 4 \\ \dfrac{|x-\xi|^2}{4}\big(\ln|x-\xi| - \frac{1}{2}\big), & n = 2 \end{cases}. \tag{11}$$

Если же $m = 3$, то $\mathbb{N}_2^c = \{2,4\}$ и поэтому в (5) изменятся уже две последние строки

$$\mathcal{E}_6(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{|x-\xi|^{6-n}}{2\cdot 4(n-2)(n-4)(n-6)}, & n \geq 3, n \neq 2,4,6 \\ -\dfrac{1}{64}\ln|x-\xi|, & n = 6 \\ \dfrac{|x-\xi|^2}{32}\Big(\ln|x-\xi| - \dfrac{1}{2}\Big), & n = 4 \\ -\dfrac{|x-\xi|^4}{64}\Big(\ln|x-\xi| - \dfrac{3}{4}\Big), & n = 2 \end{cases}. \tag{12}$$

Заменяя в (6) $E_{2k}(x,\xi)$ на $\mathcal{E}_{2k}(x,\xi)$ получим новую функцию

$$\mathcal{G}_6(x,\xi) = \mathcal{E}_6(x,\xi) - \mathcal{E}_6^*(x,\xi) - \frac{1}{2}\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}\mathcal{E}_4^*(x,\xi) \\ - \frac{1}{4}\frac{(|x|^2-1)^2}{4}\frac{(|\xi|^2-1)^2}{4}\mathcal{E}_2^*(x,\xi). \tag{13}$$

Если в ней положить $m = 3$ и $n = 4$, то в соответствии с (10)

$$\mathcal{E}_6(x,\xi) = E_6(x,\xi) + \frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{32}, \quad \mathcal{E}_4(x,\xi) = E_4(x,\xi),$$

а значит

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_6(x,\xi) &= \mathcal{E}_6(x,\xi) - \mathcal{E}_6^*(x,\xi) - \frac{1}{2}\frac{|x|^2-1}{2}\frac{|\xi|^2-1}{2}\mathcal{E}_4^*(x,\xi) \\ &\quad - \frac{1}{4}\frac{(|x|^2-1)^2}{4}\frac{(|\xi|^2-1)^2}{4}\mathcal{E}_2^*(x,\xi) \\ &= G_6(x,\xi) + \frac{1}{4}\Big(\frac{|x-\xi|^2}{32} - \frac{|x/|x| - \xi|x||^2}{32}\Big) \\ &= G_6(x,\xi) + \frac{1}{4}\frac{|x|^2 - 2x\xi + |\xi|^2 - 1 + 2x\xi - |x|^2|\xi|^2}{32} \\ &= G_6(x,\xi) - \frac{1}{4}\frac{(|\xi|^2-1)(|x|^2-1)}{32}.\end{aligned}$$

Оказывается, что получившаяся при $m = 3$ и $n = 4$ функция $\mathcal{G}_6(x,\xi)$ совпадает с функцией Грина для 3-гармонической задачи Дирихле из работы [9, Теорема 2]. В общем случае, в работе [13, Теорема 1], доказано утверждение, обобщающее Теорему 1 из [39]. Установлено, что если в равенство (9) вместо всех функций $E_{2k}(x,\xi)$ подставить функции $\mathcal{E}_{2k}(x,\xi)$, то полученная таким образом функция

$$\mathcal{G}_{2m}(x,\xi) = \mathcal{E}_{2m}(x,\xi) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(|x|^2-1)^k(|\xi|^2-1)^k}{(2m-2,-2)_k(2,2)_k}\mathcal{E}^*_{2m-2k}(x,\xi) \tag{14}$$

будет функцией Грина задачи Дирихле при всех натуральных $n \geq 2$ без ограничений (функция $G_{2m}(x,\xi)$ являлась функцией Грина задачи Дирихле лишь при $n \in \mathbb{N}^c_{m-1}$). Для 3-гармонического уравнения такова функция $\mathcal{G}_6(x,\xi)$ из (13).

3 Интегральное представление решения задачи

В дальнейшем необходимо будет следующее интегральное представление функций класса $u \in C^{2m}(D)\cap C^{2m-1}(\bar D)$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей ∂D.

Лемма 1. *Функция $u \in C^{2m}(D)\cap C^{2m-1}(\bar D)$ имеет следующее интегральное представление*

$$u(x) = \frac{(-1)^m}{\omega_n}\int_{\partial D}\sum_{k=0}^{m-1}\Big(\frac{\partial \Delta^{m-k-1}\mathcal{G}_{2m}(x,\xi)}{\partial\nu}\Delta^k u - \Delta^{m-k-1}\mathcal{G}_{2m}(x,\xi)\frac{\partial\Delta^k u}{\partial\nu}\Big)\,ds_\xi + \frac{(-1)^m}{\omega_n}\int_D \mathcal{G}_{2m}(x,\xi)\Delta^m u(\xi)\,d\xi. \tag{15}$$

где функция $\mathcal{G}_{2m}(x,\xi)$ определена в (14), $\omega_n = |\partial S|$ – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, ν – внешняя единичная нормаль к ∂D.

Доказательство. В работе [22] было доказано следующее представление для функции u

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial D}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\Big(E_{2k+2}(x,\xi)\frac{\partial\Delta^k u}{\partial\nu} - \frac{\partial E_{2k+2}(x,\xi)}{\partial\nu}\Delta^k u\Big)\,ds_\xi + \frac{(-1)^m}{\omega_n}\int_D E_{2m}(x,\xi)\Delta^m u(\xi)\,d\xi,$$

где функция E_{2k} определена в (7). Если в этом равенстве учесть первое равенство из (8), то будем иметь

$$u(x) = \frac{(-1)^m}{\omega_n}\int_{\partial D}\sum_{k=0}^{m-1}\Big(\frac{\partial \Delta^{m-k-1}E_{2m}(x,\xi)}{\partial\nu}\Delta^k u - \Delta^{m-k-1}E_{2m}(x,\xi)\frac{\partial\Delta^k u}{\partial\nu}\Big)\,ds_\xi + \frac{(-1)^m}{\omega_n}\int_D E_{2m}(x,\xi)\Delta^m u(\xi)\,d\xi. \tag{16}$$

Поскольку функции $E_{2m}(x,\xi)$ и $\mathcal{E}_{2m}(x,\xi)$ имеют одинаковую особенность при $x=\xi$, то учитывая доказательство равенства (16) из работы [22], оно останется верным и после замены в нем $E_{2m}(x,\xi)$ на $\mathcal{E}_{2m}(x,\xi)$.

Рассмотрим функцию $\mathcal{G}_{2m}(x,\xi)-\mathcal{E}_{2m}(x,\xi)=-H_{2m}(x,\xi)$, которая согласно [39, Теорема 1] является m-гармонической функцией по $\xi\in\bar S$ при $x\in S$. В [22] было также доказано похожее на (16) равенство для функций $u,v\in C^{2m}(D)\cap C^{2m-1}(\bar D)$

$$\int_D \big(u\Delta^m v-v\Delta^m u\big)\,d\xi=\int_{\partial D}\sum_{k=0}^{m-1}\Big(\frac{\partial\Delta^{m-k-1}v}{\partial\nu}\Delta^k u-\Delta^{m-k-1}v\frac{\partial\Delta^k u}{\partial\nu}\Big)\,ds_\xi.$$

Если здесь выбрать $v(\xi)=-H_{2m}(x,\xi)$, учесть что $\Delta^m v=0$ и перенести объемный интеграл в правую часть равенства, то получим

$$0=\int_{\partial D}\sum_{k=0}^{m-1}\Big(-\frac{\partial\Delta^{m-k-1}H_{2m}(x,\xi)}{\partial\nu}\Delta^k u+\Delta^{m-k-1}H_{2m}(x,\xi)\frac{\partial\Delta^k u}{\partial\nu}\Big)\,ds_\xi \\ -\int_D H_{2m}(x,\xi)\Delta^m u\,d\xi.$$

Умножая найденное равенство на $(-1)^m/\omega_n$ и складывая его с измененным равенством (16) ($E_{2m}(x,\xi)$ заменено на $\mathcal{E}_{2m}(x,\xi)$) будем иметь (15). Лемма доказана. □

Исследуем поведение функции $\mathcal{G}_6(x,\xi)$ и ее производных при $\xi\in\partial S$ и $x\in S$.

Замечание 1. *При $x\in S$ справедливо равенство $\mathcal{G}_6(x,\xi)|_{\xi\in\partial S}=0$.*

Действительно, поскольку

$$\Big|\frac{x}{|x|}-\xi|x|\Big|^2=\Big|\frac{x}{|x|}\Big|^2-2\frac{x\cdot\xi}{|x|}|x|+|x|^2|\xi|^2=1-2x\cdot\xi+|x|^2|\xi|^2=\Big|\frac{\xi}{|\xi|}-x|\xi|\Big|^2,$$

то при $\xi\in\partial S$ имеем $|\frac{x}{|x|}-\xi|x||=|x-\xi|$ и значит, в силу структуры $\mathcal{E}_{2k}(x,\xi)$, имеем $\mathcal{E}^*_{2k}(x,\xi)\equiv\mathcal{E}_{2k}\Big(\frac{x}{|x|},\xi|x|\Big)=\mathcal{E}_{2k}(x,\xi)$. Поэтому из равенства (13), определяющего функцию $\mathcal{G}_6(x,\xi)$, при $\xi\in\partial S$ сразу следует доказываемое равенство.

В дальнейшем будет необходим следующий оператор $\Lambda u=\sum_{i=1}^n\xi_i u_{\xi_i}$, который обладает свойством $\Lambda u|_{\partial S}=\frac{\partial u}{\partial\nu_\xi}|_{\partial S}$.

Лемма 2. *При $x\in S$ справедливо равенство $\frac{\partial\mathcal{G}_6(x,\xi)}{\partial\nu_\xi}|_{\xi\in\partial S}=0$.*

Доказательство. Вычислим $\Lambda_\xi\mathcal{G}_6(x,\xi)|_{\partial S}$. Из (13) находим

$$\Lambda_\xi\mathcal{G}_6(x,\xi)|_{\partial S}=\Lambda_\xi(\mathcal{E}_6(x,\xi)-\mathcal{E}^*_6(x,\xi))|_{\partial S}-\frac{|x|^2-1}{4}\mathcal{E}^*_4(x,\xi)|_{\partial S}. \tag{17}$$

Пусть $\varphi(t)$ – некоторая дифференцируемая при $t>0$ функция. Учитывая однородность оператора Λ и равенство $\Lambda(uv)=v\Lambda u+u\Lambda v$ нетрудно получить, что

$$\Lambda_\xi\varphi(|x-\xi|)=\frac{\varphi'(|x-\xi|)}{2|x-\xi|}\Lambda_\xi(|x|^2-2x\cdot\xi+|\xi|^2)=\varphi'(|x-\xi|)\frac{|\xi|^2-x\cdot\xi}{|x-\xi|} \tag{18}$$

и

$$\Lambda_\xi \varphi(|x/|x|-\xi|x||) = \frac{\varphi'(|x/|x|-\xi|x||)}{2|x/|x|-|x|\xi|}\Lambda_\xi(1-2x\cdot\xi+|x|^2|\xi|^2)$$
$$= \varphi'(|x/|x|-\xi|x||)\frac{|\xi|^2|x|^2 - x\cdot\xi}{|x/|x|-\xi|x||}. \quad (19)$$

Поэтому, поскольку $|\frac{x}{|x|}-\xi|x|| = |x-\xi|$ при $\xi\in\partial S$, то с помощью (18) и (19) находим

$$\Lambda_\xi(\varphi(|x-\xi|)-\varphi(|x/|x|-\xi|x||))|_{\partial S} = (1-|x|^2)\frac{\varphi'(|x-\xi|)}{|x-\xi|}\Big|_{\partial S}. \quad (20)$$

В формуле (17) рассмотрим разные случаи в зависимости от $n\geq 2$.

1^0. Пусть $n\notin \mathbb{N}_3^c = \{2,4,6\}$. В соответствии с (12) и (20) при $\varphi(t) = \frac{t^{6-n}}{8(n-2)(n-4)(n-6)}$ найдем

$$\Lambda_\xi(\mathcal{E}_6(x,\xi)-\mathcal{E}_6^*(x,\xi))|_{\partial S} = \frac{|x-\xi|^{4-n}}{8(n-2)(n-4)}(|x|^2-1).$$

С помощью (11) вычислим

$$\frac{|x|^2-1}{4}\mathcal{E}_4^*(x,\xi) = \frac{|x/|x|-\xi|x||^{4-n}}{8(n-2)(n-4)}(|x|^2-1).$$

Таким образом равенство (17) принимает вид

$$\Lambda_\xi\mathcal{G}_6(x,\xi)|_{\partial S} = \frac{|x-\xi|^{4-n}|_{\partial S}}{8(n-2)(n-4)}(|x|^2-1) - \frac{|x/|x|-\xi|x||^{4-n}|_{\partial S}}{8(n-2)(n-4)}(|x|^2-1) = 0.$$

2^0. Пусть $n=6$. Тогда, в соответствии с (12) и (20) при $\varphi(t) = -\frac{1}{64}\ln t$ получим

$$\Lambda_\xi(\mathcal{E}_6(x,\xi)-\mathcal{E}_6^*(x,\xi))|_{\partial S} = \frac{|x|^2-1}{64|x-\xi|^2}.$$

Поскольку $6\notin\mathbb{N}_2^c=\{2,4\}$, то согласно (11) при $n=6$ выводим

$$\frac{|x|^2-1}{4}\mathcal{E}_4^*(x,\xi) = \frac{|x/|x|-\xi|x||^{-2}}{2\cdot 4\cdot 2}\frac{|x|^2-1}{4} = \frac{|x|^2-1}{64|x/|x|-|x|\xi|^2}.$$

Следовательно равенство (17) при $n=6$ принимает вид

$$\Lambda_\xi\mathcal{G}_6(x,\xi)|_{\partial S} = \frac{|x|^2-1}{64|x-\xi|^2|_{\partial S}} - \frac{|x|^2-1}{64|x/|x|-\xi|x||^2|_{\partial S}} = 0.$$

3^0. Пусть $n=4$. Тогда, в соответствии с (12) и (20) при $\varphi(t) = \frac{1}{32}(t^2\ln t - \frac{1}{2}t^2)$ получим

$$\Lambda_\xi(\mathcal{E}_6(x,\xi)-\mathcal{E}_6^*(x,\xi))|_{\partial S} = \frac{\ln|x-\xi|}{16}(1-|x|^2).$$

Поскольку $4\in\mathbb{N}_2^c=\{2,4\}$, то по (11) при $n=4$ находим

$$\frac{|x|^2-1}{4}E_4^*(x,\xi) = -\frac{1}{4}\ln|x/|x|-\xi|x||\frac{|x|^2-1}{4}.$$

Следовательно равенство (17) принимает вид

$$\Lambda_\xi \mathcal{G}_6(x,\xi)|_{\partial S} = \frac{1-|x|^2}{16}\big(\ln|x-\xi||_{\partial S} - \ln|x/|x|-\xi|x|||_{\partial S}\big) = 0.$$

4^0. Пусть $n=2$. Тогда, опять в соответствии с (12) и (20) при $\varphi(t) = -\frac{1}{64}(t^4\ln t - \frac{3}{4}t^4)$ и с учетом того, что $\varphi'(t) = -\frac{1}{64}(4t^3\ln t - 2t^3)$, получим

$$\Lambda_\xi(\mathcal{E}_6(x,\xi) - \mathcal{E}_6^*(x,\xi))|_{\partial S} = \frac{|x-\xi|^2}{16}\Big(\ln|x-\xi| - \frac{1}{2}\Big)(|x|^2-1).$$

Из (11) при $n=2$ находим

$$\frac{|x|^2-1}{4}\mathcal{E}_4^*(x,\xi) = \frac{|x|^2-1}{4}\frac{|x/|x|-\xi|x||^2}{4}\Big(\ln|x/|x|-\xi|x|| - \frac{1}{2}\Big).$$

Следовательно равенство (17) и в этом случае принимает вид

$$\Lambda_\xi \mathcal{G}_6(x,\xi)|_{\partial S} = \frac{|x|^2-1}{16}\Big(|x-\xi|^2\big(\ln|x-\xi| - \frac{1}{2}\big)|_{\partial S} \\ - |x/|x|-\xi|x||^2\big(\ln|x/|x|-\xi|x|| - \frac{1}{2}\big)|_{\partial S}\Big) = 0.$$

Лемма доказана. □

Неожиданное свойство функции Грина $\mathcal{G}_6(x,\xi)$.

Лемма 3. *При $x \in S$ и $n \geq 2$ справедливо равенство $\Delta_\xi \mathcal{G}_6(x,\xi)|_{\xi\in\partial S} = 0$.*

Доказательство. Для функции $\mathcal{G}_6(x,\xi)$ из (13) вычислим по частям значение $\Delta_\xi \mathcal{G}_6(x,\xi)$. Рассмотрим разные случаи в зависимости от $n \geq 2$.

1^0. Пусть $n \notin \mathbb{N}_2^c = \{2,4\}$. В силу (10) имеем $\mathcal{E}_6(x,\xi) = E_6(x,\xi)$ и $\mathcal{E}_4(x,\xi) = E_4(x,\xi)$, а значит по (8) получим $\Delta_\xi \mathcal{E}_6(x,\xi) = -\mathcal{E}_4(x,\xi)$. Кроме того нетрудно видеть, что

$$\Delta_\xi \mathcal{E}_6^*(x,\xi) = \Delta_\xi \mathcal{E}_6(x/|x|,\xi|x|) = -|x|^2\mathcal{E}_4(x/|x|,\xi|x|) = -|x|^2\mathcal{E}_4^*(x,\xi).$$

Значит имеем

$$\Delta_\xi(\mathcal{E}_6(x,\xi) - \mathcal{E}_6^*(x,\xi)) = -\mathcal{E}_4(x,\xi) + \mathcal{E}_4^*(x,\xi) + (|x|^2-1)\mathcal{E}_4^*(x,\xi). \quad (21)$$

Пусть опять $\varphi(t)$ – некоторая дифференцируемая при $t>0$ функция. Тогда

$$\Delta_\xi\big(\varphi(|\xi|^2)E_{2k}^*(x,\xi)\big) \\ = E_{2k}^*(x,\xi)\Delta_\xi\varphi(|\xi|^2) + 4\varphi'(|\xi|^2)\Lambda_\xi E_{2k}^*(x,\xi) - |x|^2\varphi(|\xi|^2)E_{2k-2}^*(x,\xi).$$

Поскольку

$$\Delta_\xi\varphi(|\xi|^2) = 2\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial\xi_i}\big(\xi_i\varphi'(|\xi|^2)\big) = 2\sum_{i=1}^n\big(\varphi'(|\xi|^2) + 2\xi_i^2\varphi''(|\xi|^2)\big) \\ = 2n\varphi'(|\xi|^2) + 4|\xi|^2\varphi''(|\xi|^2), \quad (22)$$

то

$$\Delta_\xi\big(\varphi(|\xi|^2)E^*_{2k}(x,\xi)\big) = \big(4|\xi|^2\varphi''(|\xi|^2) + \varphi'(|\xi|^2)(2n+4\Lambda_\xi)\big)E^*_{2k}(x,\xi) - |x|^2\varphi(|\xi|^2)E^*_{2k-2}(x,\xi). \quad (23)$$

Поэтому при $\varphi(t) = \frac{1}{2}(t-1)$ и $k=2$, учитывая что в нашем случае $E^*_4 = \mathcal{E}^*_4$, получим

$$\Delta_\xi \frac{|\xi|^2-1}{2}\mathcal{E}^*_4(x,\xi) = (n+2\Lambda_\xi)\mathcal{E}^*_4(x,\xi) - |x|^2\frac{|\xi|^2-1}{2}\mathcal{E}^*_2(x,\xi), \quad (24)$$

Если же $\varphi(t) = \frac{1}{4}(t-1)^2$ и $k=1$, то будем иметь

$$\Delta_\xi \frac{(|\xi|^2-1)^2}{4}\mathcal{E}^*_2(x,\xi) = \big(2|\xi|^2 + (|\xi|^2-1)(2\Lambda_\xi+n)\big)\mathcal{E}^*_2(x,\xi) = (|\xi|^2-1)(2\Lambda_\xi+n+2)\mathcal{E}^*_2(x,\xi) + 2\mathcal{E}^*_2(x,\xi). \quad (25)$$

Таким образом, с помощью (21),(24) и (25), получим

$$\Delta_\xi\mathcal{G}_6(x,\xi) = -\mathcal{E}_4(x,\xi) + \mathcal{E}^*_4(x,\xi) + (|x|^2-1)\mathcal{E}^*_4(x,\xi) - \frac{|x|^2-1}{4}\Big((2\Lambda_\xi+n)\mathcal{E}^*_4(x,\xi) - |x|^2\frac{|\xi|^2-1}{2}\mathcal{E}^*_2(x,\xi)\Big) - \frac{(|x|^2-1)^2}{8}\mathcal{E}^*_2(x,\xi) - \frac{(|x|^2-1)^2}{16}(|\xi|^2-1)(2\Lambda_\xi+n+2)\mathcal{E}^*_2(x,\xi). \quad (26)$$

Отсюда сразу следует, что

$$\Delta_\xi\mathcal{G}_6(x,\xi)|_{\partial S} = -\frac{|x|^2-1}{4}\Big((2\Lambda_\xi+n-4)\mathcal{E}^*_4(x,\xi) + \frac{|x|^2-1}{2}\mathcal{E}^*_2(x,\xi)\Big)\Big|_{\partial S}. \quad (27)$$

Преобразуем это равенство. По формуле (19) при $\varphi(t) = \frac{1}{2(n-2)(n-4)}t^{4-n}$ найдем

$$2\Lambda_\xi\mathcal{E}^*_4(x,\xi) = -\frac{|x/|x| - |x|\xi|^{2-n}}{n-2}(|\xi|^2|x|^2 - x\cdot\xi) = \frac{1}{2}(2x\cdot\xi - 2|\xi|^2|x|^2)\mathcal{E}^*_2(x,\xi), \quad (28)$$

а также учтем, что

$$(n-4)\mathcal{E}^*_4(x,\xi) = \frac{1}{2(n-2)}|x/|x| - |x|\xi|^{4-n} = \frac{1}{2}(1 - 2x\cdot\xi + |\xi|^2|x|^2)\mathcal{E}^*_2(x,\xi). \quad (29)$$

Таким образом можем записать

$$(2\Lambda_\xi+n-4)\mathcal{E}^*_4(x,\xi)|_{\partial S} = -\frac{1}{2}(|x|^2-1)\mathcal{E}^*_2(x,\xi)|_{\partial S}$$

и следовательно равенство (27) примет вид

$$\Delta_\xi\mathcal{G}_6(x,\xi)|_{\partial S} = -\frac{|x|^2-1}{4}\Big(-\frac{|x|^2-1}{2}\mathcal{E}^*_2(x,\xi) + \frac{|x|^2-1}{2}\mathcal{E}^*_2(x,\xi)\Big)\Big|_{\partial S} = 0.$$

2^0. Пусть $n = 4$, тогда, в соответствии с (10), находим

$$\Delta_\xi \mathcal{E}_6(x,\xi) = \Delta_\xi E_6(x,\xi) + \frac{1}{4}\Delta_\xi \frac{|x-\xi|^2}{32} = -\mathcal{E}_4(x,\xi) + \frac{1}{16}$$

и аналогично этому

$$\Delta_\xi \mathcal{E}_6^*(x,\xi) = \Delta_\xi E_6^*(x,\xi) + \frac{1}{4}\Delta_\xi \frac{1-2x\cdot\xi+|\xi|^2|x|^2}{32} = -|x|^2\mathcal{E}_4^*(x,\xi) + \frac{|x|^2}{16}.$$

На основании полученных равенств запишем формулу, аналогичную (21)

$$\Delta_\xi(\mathcal{E}_6(x,\xi) - \mathcal{E}_6^*(x,\xi)) = -\mathcal{E}_4(x,\xi) + \mathcal{E}_4^*(x,\xi) + (|x|^2-1)\Big(\mathcal{E}_4^*(x,\xi) - \frac{1}{16}\Big).$$

Равенства (24) и (25) остаются в силе при $n = 4$ и поэтому, аналогично (27), получим

$$\Delta_\xi \mathcal{G}_6(x,\xi)|_{\partial S} = -\frac{|x|^2-1}{4}\Big(\frac{1}{4} + 2\Lambda_\xi \mathcal{E}_4^*(x,\xi) + \frac{|x|^2-1}{2}\mathcal{E}_2^*(x,\xi)\Big)\big|_{\partial S}. \quad (30)$$

По формуле (19) при $\varphi(t) = -\frac{1}{4}\ln t$ найдем

$$2\Lambda_\xi \mathcal{E}_4^*(x,\xi) = -\frac{|x/|x| - |x|\xi|^{-2}}{2}(|\xi|^2|x|^2 - x\cdot\xi) = (x\cdot\xi - |\xi|^2|x|^2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi).$$

Подставляя найденное значение $2\Lambda_\xi \mathcal{E}_4^*(x,\xi)$ в (30) и учитывая при этом, что

$$\frac{1}{4} = \frac{1-2x\cdot\xi+|x|^2}{2}\mathcal{E}_2^*(x,\xi)|_{\partial S}$$

получим необходимое равенство

$$\Delta_\xi \mathcal{G}_6(x,\xi)|_{\partial S} = -\frac{|x|^2-1}{8}\big(1-2x\cdot\xi+|x|^2+2(x\cdot\xi-|\xi|^2|x|^2)$$
$$+|x|^2-1\big)\mathcal{E}_2^*(x,\xi)|_{\partial S} = -\frac{|x|^2-1}{8}\big(2|x|^2-2|\xi|^2|x|^2\big)\mathcal{E}_2^*(x,\xi)|_{\partial S} = 0.$$

3^0. Пусть $n = 2$. Тогда, в соответствии с (10) и учитывая, что согласно (22) $\Delta_\xi|x-\xi|^4 = 4(n+2)|x-\xi|^2 = 16|x-\xi|^2$, получим

$$\Delta_\xi \mathcal{E}_6(x,\xi) = \Delta_\xi E_6(x,\xi) - \frac{3}{4}\Delta_\xi \frac{|x-\xi|^4}{64} = -E_4(x,\xi) - \frac{3|x-\xi|^2}{16}$$

и соответственно этому найдем

$$\Delta_\xi \mathcal{E}_6^*(x,\xi) = \Delta_\xi E_6^*(x,\xi) - \frac{3}{4}\Delta_\xi \frac{|x/|x| - \xi|x||^4}{64} =$$
$$-|x|^2 E_4^*(x,\xi) - |x|^2\frac{3|x/|x|-\xi|x||^2}{16}.$$

На основании этих равенств получим следующие равенства на ∂S

$$\Delta_\xi(\mathcal{E}_6(x,\xi)-\mathcal{E}_6^*(x,\xi)) = -E_4(x,\xi)+E_4^*(x,\xi)$$
$$+\frac{3}{16}(|x/|x|-\xi|x||^2-|x-\xi|^2)+(|x|^2-1)\Big(E_4^*(x,\xi)$$
$$+\frac{3|x/|x|-\xi|x||^2}{16}\Big)=\frac{|x|^2-1}{16}(16E_4^*(x,\xi)+3|x/|x|-\xi|x||^2)$$
$$=\frac{|x|^2-1}{16}(16\mathcal{E}_4^*(x,\xi)+|x/|x|-\xi|x||^2). \quad (31)$$

Учитывая формулу (23) при $\varphi(t)=(t-1)/2$ и $k=2$, вычислим

$$\Delta_\xi\frac{|\xi|^2-1}{2}\mathcal{E}_4^*(x,\xi)|_{\partial S}=2(\Lambda_\xi+1)\mathcal{E}_4^*(x,\xi)|_{\partial S} \quad (32)$$

и аналогично этому при $\varphi(t)=(t-1)^2/4$ и $k=1$ найдем

$$\Delta_\xi\frac{(|\xi|^2-1)^2}{4}\mathcal{E}_2^*(x,\xi)|_{\partial S}$$
$$=2\big(|\xi|^2+(|\xi|^2-1)(\Lambda_\xi+1)\big)\mathcal{E}_2^*(x,\xi)|_{\partial S}=2\mathcal{E}_2^*(x,\xi)|_{\partial S}. \quad (33)$$

Таким образом, используя (13) и с помощью (31)-(33), получаем

$$\Delta_\xi\mathcal{G}_6(x,\xi)|_{\partial S}=\frac{|x|^2-1}{16}(16\mathcal{E}_4^*(x,\xi)+|x/|x|-\xi|x||^2)$$
$$-\frac{|x|^2-1}{2}(\Lambda_\xi+1)\mathcal{E}_4^*(x,\xi)-\frac{(|x|^2-1)^2}{8}\mathcal{E}_2^*(x,\xi)=$$
$$-\frac{|x|^2-1}{16}\Big(8(\Lambda_\xi-1)\mathcal{E}_4^*(x,\xi)-|x/|x|-\xi|x||^2+2(|x|^2-1)\mathcal{E}_2^*(x,\xi)\Big).$$

Далее, по формуле (19) при $\varphi(t)=\frac{t^2}{4}(\ln t-1/2)$ и учитывая при этом, что $\mathcal{E}_2(x,\xi)=-\ln|x-\xi|$, будем иметь

$$8\Lambda_\xi\mathcal{E}_4^*(x,\xi)|_{\partial S}=4(|x|^2-x\cdot\xi)\ln|x/|x|-\xi|x||=4(x\cdot\xi-|x|^2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi),$$
$$8\mathcal{E}_4^*(x,\xi)=-2|x/|x|-\xi|x||^2\mathcal{E}_2^*(x,\xi)-|x/|x|-\xi|x||^2.$$

Следовательно, с учетом этого, из предыдущего равенства, выводим

$$\Delta_\xi\mathcal{G}_6(x,\xi)|_{\partial S}=-\frac{|x|^2-1}{8}\big(\mathcal{E}_2^*(x,\xi)(2x\cdot\xi-2|x|^2+|x/|x|-\xi|x||^2)$$
$$+(|x|^2-1)\mathcal{E}_2^*(x,\xi)\big)=-\frac{|x|^2-1}{8}\mathcal{E}_2^*(x,\xi)\big(1-|x|^2+|x|^2-1\big)=0.$$

Таким образом утверждение леммы доказано при всех $n\geq 2$. □

Теперь, с помощью лемм 1-3 найдем представление решения задачи (1)-(2).

Теорема 1. *Если решение задачи (1)-(2) существует, то оно может быть записано в виде*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\Big(-\frac{\partial\Delta^2\mathcal{G}_6(x,\xi)}{\partial\nu}\varphi_0(\xi)+\Delta^2\mathcal{G}_6(x,\xi)\varphi_1(\xi)-\frac{\partial\Delta\mathcal{G}_6(x,\xi)}{\partial\nu}\varphi_2(\xi)\Big)\,ds_\xi - \frac{1}{\omega_n}\int_S \mathcal{G}_6(x,\xi)f(\xi)\,d\xi, \quad (34)$$

где функция Грина $\mathcal{G}_6(x,\xi)$ определена в (13).

Доказательство. Пусть $u\in C^6(S)\cap C^5(\bar S)$ – решение задачи (1)-(2). К этой функции применима лемма 1. Поэтому из (15) при $m=3$ вытекает следующее равенство

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\Big(-\frac{\partial\Delta^2\mathcal{G}_6(x,\xi)}{\partial\nu}u+\Delta^2\mathcal{G}_6(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\nu}-\frac{\partial\Delta\mathcal{G}_6(x,\xi)}{\partial\nu}\Delta u+\Delta\mathcal{G}_6(x,\xi)\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu} - \frac{\partial\mathcal{G}_6(x,\xi)}{\partial\nu}\Delta^2 u+\mathcal{G}_6(x,\xi)\frac{\partial\Delta^2 u}{\partial\nu}\Big)\,ds_\xi - \frac{1}{\omega_n}\int_S \mathcal{G}_6(x,\xi)\Delta^3 u(\xi)\,d\xi.$$

Если к полученному равенству применить замечание 1, леммы 2 и 3, а также воспользоваться граничными значениями (2) решения $u(x)$ и значением правой части уравнения (1), то получим равенство (34). □

4 Структура решения задачи

Теорема 1 дает представление решения задачи (1)-(2), если оно существует. Следующее утверждение устанавливает существование решения. Решение будем строить не из класса $u\in C^6(S)\cap C^5(\bar S)$, как в теореме 1, а такое, что $\Delta^3 u\in C(S)$ и $u,\Lambda u,\Delta u\in C(\bar S)$.

Теорема 2. *Функция $u(x)$, определяемая из равенства (34) при $\varphi_k\in C^{2-k+\varepsilon}(\partial S)$, $k=0,1,2$ и $f\in C(\bar S)$, является решением задачи (1)-(2).*

Доказательство теоремы 2 приведем в конце этого раздела, а сейчас исследуем правую часть формулы (34) по частям. Сначала рассмотрим последний интеграл из (34).

Лемма 4. *Функция вида*

$$u_f(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_S \mathcal{G}_6(x,\xi)f(\xi)\,d\xi$$

при $f\in C(\bar S)$ является решением неоднородного уравнения (1) и удовлетворяет однородным граничным условиям (2).

Доказательство. Из [13, теорема 2] при $f\in C(\bar S)$ и $m=3$ следует, что $\Delta^3 u_f(x)=f(x)$ в S и все нормальные производные функции Грина

$\mathcal{G}_6(x,\xi)$ до второго порядка, включительно, обращаются в 0 когда $x \in \partial S$. Это, в частности, значит, что

$$\mathcal{G}_6(x,\xi)|_{x\in\partial S} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{G}_6(x,\xi)}{\partial \nu}|_{x\in\partial S} = 0.$$

Из леммы 3, в силу симметричности функции $\mathcal{G}_2(x,\xi)$, следует, что $\Delta_x \mathcal{G}_6(x,\xi)|_{x\in\partial S} = 0$ при $\xi \in S$. Поэтому функция $u_f(x)$ удовлетворяет также всем трем однородным граничным условиям (2). Лемма доказана. $\square$

Для дальнейшего доказательства теоремы 2 установим некоторые дополнительные свойства функции Грина $\mathcal{G}_6(x,\xi)$. Заметим, что верно равенство $\Lambda u|_{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial \nu_\xi}|_{\partial S}$, которое было использовано в лемме 2 и которое мы будем также применять дальше.

Лемма 5. *1) При $x \in S$ и $n \geq 3$ справедливо равенство*

$$(2\Lambda_\xi + n - 2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi)|_{\partial S} = -\Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x,\xi)|_{\partial S}. \tag{35}$$

2) Для $n \geq 2$ имеет место следующее свойство $\Lambda_\xi \mathcal{E}_2^*(x,\xi) = \Lambda_x \mathcal{E}_2^*(x,\xi)$. Более того $\Lambda_\xi^k \mathcal{E}_2^*(x,\xi) = \Lambda_x^{k-1}\Lambda_\xi \mathcal{E}_2^*(x,\xi)$, $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. 1) В соответствии с (19) при $\varphi(t) = \frac{t^{2-n}}{n-2}$ найдем

$$\begin{aligned}(2\Lambda_\xi + n - 2)&\mathcal{E}_2^*(x,\xi)|_{\partial S} \\ &= -\frac{2|x|^2 - 2x\cdot\xi}{|x/|x| - \xi|x||^n} + \frac{1 - 2x\cdot\xi + |x|^2}{|x/|x| - \xi|x||^n}|_{\partial S} = \frac{1-|x|^2}{|x/|x| - \xi|x||^n}\Big|_{\partial S}.\end{aligned}$$

В тоже время, по формуле (20), также при $\varphi(t) = \frac{t^{2-n}}{n-2}$, получим

$$\Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x,\xi)|_{\partial S} = \Lambda_\xi(\mathcal{E}_2(x,\xi) - \mathcal{E}_2^*(x,\xi))|_{\partial S} = -\frac{1-|x|^2}{|x-\xi|^n}\Big|_{\partial S}.$$

Сравнивая полученные выше равенства убеждаемся в верности (35).

2) Пусть $\varphi \in C^k(0,\infty)$. Докажем, что для $k \in \mathbb{N}$ верно равенство

$$\Lambda_\xi^k \varphi(|x/|x| - \xi|x||) = \Lambda_x^k \varphi(|x/|x| - \xi|x||). \tag{36}$$

Из (19) следует

$$\Lambda_\xi \varphi(|x/|x| - \xi|x||) = (|\xi|^2|x|^2 - x\cdot\xi)\frac{\varphi'(|x/|x| - \xi|x||)}{|x/|x| - \xi|x||}.$$

Поскольку $|x/|x| - \xi|x|| = |\xi/|\xi| - x|\xi||$ (замечание 1), то меняя местами x и ξ найдем

$$\begin{aligned}\Lambda_x \varphi(|x/|x| - \xi|x||) &= \Lambda_x \varphi(|\xi/|\xi| - x|\xi||) \\ &= (|x|^2|\xi|^2 - \xi\cdot x)\frac{\varphi'(|\xi/|\xi| - x|\xi||)}{|\xi/|\xi| - x|\xi||} = \Lambda_\xi \varphi(|x/|x| - \xi|x||).\end{aligned}$$

Равенство (36) доказано для $k = 1$ и произвольной $\varphi(t)$. Предположим, что (36) верно при некотором $k-1$. Тогда, обозначая $F(t) = \varphi'(t)/t$ и используя свойства Λ_ξ, будем иметь

$$\Lambda_\xi^k \varphi(|x/|x| - \xi|x||) = \Lambda_\xi^{k-1}\big((|\xi|^2|x|^2 - x\cdot\xi)F(|x/|x| - \xi|x||)\big)$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\Lambda_\xi^i(|\xi|^2|x|^2 - x\cdot\xi)\Lambda_\xi^{k-1-i}F(|x/|x| - \xi|x||).$$

Нетрудно видеть, что при $i \in \mathbb{N}$

$$\Lambda_\xi^i(|\xi|^2|x|^2 - x\cdot\xi) = 2^i|\xi|^2|x|^2 - x\cdot\xi = \Lambda_x^i(|\xi|^2|x|^2 - x\cdot\xi).$$

Учитывая это равенство и предположение индукции получим

$$\Lambda_\xi^k \varphi(|x/|x| - \xi|x||)$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}\Lambda_x^i(|\xi|^2|x|^2 - x\cdot\xi)\Lambda_x^{k-1-i}F(|x/|x| - \xi|x||$$
$$= \Lambda_x^k\varphi(|x/|x| - \xi|x||).$$

Шаг индукции доказан. Поскольку $\mathcal{E}_2^*(x,\xi)$ – функция класса $C^\infty(0,\infty)$ от аргумента $|x/|x| - \xi|x||$, то из (36) при $k = 1$ получаем первое равенство из второго пункта утверждения леммы. Далее, поскольку по (36)

$$\Lambda_\xi^k \varphi(|x/|x| - \xi|x||) = \Lambda_x^k\varphi(|x/|x| - \xi|x||)$$
$$= \Lambda_x^{k-1}\Lambda_x\varphi(|x/|x| - \xi|x||) = \Lambda_x^{k-1}\Lambda_\xi\varphi(|x/|x| - \xi|x||),$$

то второе равенство следует отсюда при $\varphi(|x/|x| - \xi|x||) = \mathcal{E}_2^*(x,\xi)$. Лемма доказана. □

Следствие 1. *Пусть $u_\psi(x)$ – решение гармонической задачи Дирихле в S при условии $u|_{\partial S} = \psi(s)$. Тогда при $x \in S$ и $n \geq 3$ справедливо равенство*

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\psi(\xi)(2\Lambda_\xi + n - 2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi)\,ds_\xi = u_\psi(x). \tag{37}$$

Доказательство. Известно, что

$$u_\psi(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\frac{\partial\mathcal{G}_2(x,\xi)}{\partial\nu}\psi(\xi)\,ds_\xi.$$

Имея это в виду, умножая равенство (35) на $\frac{1}{\omega_n}\psi(\xi)$ и интегрируя по ∂S при $x \in S$, получим доказываемое равенство (37). □

Теперь рассмотрим оставшиеся члены из правой части формулы (34), определяющей функцию $u(x)$, которые обозначим $u_n(x)$

$$u_n(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\Big(-\varphi_0(\xi)\Lambda_\xi\Delta_\xi^2\mathcal{G}_6(x,\xi) + \varphi_1(\xi)\Delta_\xi^2\mathcal{G}_6(x,\xi) - \varphi_2(\xi)\Lambda_\xi\Delta_\xi\mathcal{G}_6(x,\xi)\Big)\,ds_\xi. \quad (38)$$

Лемма 6. *При $x \in S$ имеет место равенство*

$$-\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\varphi_2(\xi)\Lambda_\xi\Delta_\xi\mathcal{G}_6(x,\xi)\,d\xi = \frac{(|x|^2-1)^2}{8}u_{\varphi_2}(x). \quad (39)$$

Доказательство. Рассмотрим наиболее крупный случай, когда $n \notin \mathbb{N}_2^c = \{2,4\}$.

Вычислим значение $\Lambda_\xi\Delta_\xi\mathcal{G}_6(x,\xi)$. Из (26) нетрудно получить

$$\Delta_\xi\mathcal{G}_6(x,\xi) = -\mathcal{E}_4(x,\xi) + \mathcal{E}_4^*(x,\xi) - \frac{|x|^2-1}{4}\Big((2\Lambda_\xi+n-4)\mathcal{E}_4^*(x,\xi) - |x|^2\frac{|\xi|^2-1}{2}\mathcal{E}_2^*(x,\xi)\Big) - \frac{(|x|^2-1)^2}{8}\mathcal{E}_2^*(x,\xi) - \frac{(|x|^2-1)^2}{16}(|\xi|^2-1)(2\Lambda_\xi+n+2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi). \quad (40)$$

Будем вычислять значения оператора Λ_ξ от каждого слагаемого в равенстве справа сначала без множителей, не зависящих от ξ. Эти множители мы учтем потом, при суммировании всех слагаемых.

1) С помощью (18) и (19) найдем

$$\Lambda_\xi(\varphi(|x-\xi|) - \varphi(|x/|x| - |x|\xi|)) = \varphi'(|x-\xi|)\frac{|\xi|^2 - x\cdot\xi}{|x-\xi|} - \varphi'(|x/|x| - \xi|x||)\frac{|\xi|^2|x|^2 - x\cdot\xi}{|x/|x| - \xi|x||}$$

и значит

$$\Lambda_\xi(\varphi(|x-\xi|) - \varphi(|x/|x| - |x|\xi|))|_{\partial S} = (1-|x|^2)\frac{\varphi'(|x-\xi|)}{|x-\xi|}|_{\partial S}. \quad (41)$$

Поэтому при $\varphi(t) = \frac{t^{4-n}}{2(n-2)(n-4)}$ будем иметь

$$\Lambda_\xi(-\mathcal{E}_4(x,\xi) + \mathcal{E}_4^*(x,\xi))|_{\partial S} = \frac{|x-\xi|^{2-n}}{2(n-2)}|_{\partial S}(1-|x|^2) = -\frac{|x|^2-1}{2}\mathcal{E}_2^*(x,\xi)|_{\partial S}.$$

2) Из равенств (28) и (29) следует, что

$$(2\Lambda_\xi+n-4)\mathcal{E}_4^*(x,\xi) = \frac{1}{2}(1-|\xi|^2|x|^2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi),$$

а значит

$$\Lambda_\xi(2\Lambda_\xi+n-4)\mathcal{E}_4^*(x,\xi) = -|\xi|^2|x|^2\mathcal{E}_2^*(x,\xi) - \frac{1}{2}(|\xi|^2|x|^2-1)\Lambda_\xi\mathcal{E}_2^*(x,\xi).$$

3) Далее найдем

$$\Lambda_\xi |x|^2 \frac{|\xi|^2-1}{2}\mathcal{E}_2^*(x,\xi)|_{\partial S} = |x|^2\mathcal{E}_2^*(x,\xi)|_{\partial S}.$$

4) Наконец вычислим значение оператора Λ_ξ от функции во всей второй строчке

$$\Lambda_\xi\Big(-\frac{(|x|^2-1)^2}{8}\mathcal{E}_2^*(x,\xi)-\frac{(|x|^2-1)^2}{16}(|\xi|^2-1)(2\Lambda_\xi+n+2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi)\Big)|_{\partial S}$$
$$=-\frac{(|x|^2-1)^2}{8}(3\Lambda_\xi+n+2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi)|_{\partial S}.$$

Складывая результаты, полученные в случаях 1)-4), умноженные на соответствующие множители и приводя подобные члены, будем иметь

$$\Lambda_\xi\Delta_\xi\mathcal{G}_6(x,\xi)|_{\partial S}=\Big(-\frac{|x|^2-1}{2}-\frac{|x|^2-1}{4}\big(-|x|^2-\frac{1}{2}(|x|^2-1)\Lambda_\xi-|x|^2\big)$$
$$-\frac{(|x|^2-1)^2}{8}(3\Lambda_\xi+n+2)\Big)\mathcal{E}_2^*(x,\xi)=-\frac{|x|^2-1}{8}\Big(4-2|x|^2-(|x|^2-1)\Lambda_\xi-2|x|^2$$
$$+(|x|^2-1)(3\Lambda_\xi+n+2)\Big)\mathcal{E}_2^*(x,\xi)|_{\partial S}=-\frac{(|x|^2-1)^2}{8}(2\Lambda_\xi+n-2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi)|_{\partial S}.$$

При $x \in S$ функции, в полученном равенстве, не имеют особенностей по $\xi \in \partial S$. Поэтому, умножая его на $-\frac{1}{\omega_n}\varphi_2(\xi)$ и интегрируя по $\xi \in \partial S$, нетрудно получить

$$-\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\varphi_2(\xi)\Lambda_\xi\Delta_\xi\mathcal{G}_6(x,\xi)\,d\xi$$
$$=\frac{(|x|^2-1)^2}{8}\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\varphi_2(\xi)(2\Lambda_\xi+n-2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi)\,d\xi.$$

Если теперь воспользоваться формулой (37), то получим (39). Доказательство случаев $n = 2, 4$ нетрудно получить аналогично. Лемма доказана. □

Замечание 2. *Пусть $\varphi_2 \in C^\varepsilon(\partial S)$, где $\varepsilon > 0$, тогда для 3-гармонической функции*

$$u_2(x)=\frac{(|x|^2-1)^2}{8}u_{\varphi_2}(x)$$

из леммы 6 справедливы равенства

$$u_2|_{\partial S}=\frac{\partial u_2}{\partial\nu}\Big|_{\partial S}=0,\quad \Delta u_2|_{\partial S}=\varphi_2. \tag{42}$$

Доказательство. Сначала заметим, что умножение гармонической функции $u_{\varphi_2}(x)$ на полином вида $|x|^{2k-2}$ делает ее k-гармонической функцией. Далее, согласно [40, лемма 2.7], для того, чтобы гармоническая в S функция $u_{\varphi_2}(x)$ имела гладкость $u_{\varphi_2} \in C^k(\bar{S})$, достаточно потребовать, чтобы $\varphi_2 \in C^{k+\varepsilon}(\partial S)$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Теперь рассмотрим граничные условия (42) для $u_2(x)$. Первое равенство очевидно, а второе верно, если $(|x|^2-1)^2\Lambda u_{\varphi_2}|_{\partial S}=0$. Третье равенство из (42) также выполнено при некотором условии. Укажем его. По формуле, аналогичной (23), запишем

$$\Delta\big(\varphi(|x|^2)h(x)\big)=\big(4|x|^2\varphi''(|x|^2)+\varphi'(|x|^2)(2n+4\Lambda)\big)h(x), \tag{43}$$

где $h(x)$ – гармоническая функция. При $\varphi(t)=\frac{1}{8}(t-1)^2$ будем иметь

$$\Delta\frac{(|x|^2-1)^2}{8}u_{\varphi_2}(x)|_{\partial S}=\Big(|x|^2+\frac{|x|^2-1}{4}(2n+4\Lambda)\Big)u_{\varphi_2}(x)|_{\partial S}=\varphi_2.$$

Здесь мы использовали условие, похожее на сделанное выше $(|x|^2-1)\Lambda u_{\varphi_2}|_{\partial S}=0$. Для исследования выполнимости указанных условий на поведение функции $u_{\varphi_2}(x)$ возле границы ∂S воспользуемся [40, лемма 2.2]. В силу этой леммы для всякой гармонической функции $h\in C^\varepsilon(\bar S)$ верно неравенство

$$\big|(1-|x|)^l\Lambda^l h(x)\big|\le C(1-|x|)^\varepsilon, \tag{44}$$

где $l\in\mathbb{N}$, $x\in S$ и $C>0$ – некоторая константа. Так как $\varphi_2\in C^\varepsilon(\partial S)$, то $u_{\varphi_2}\in C^\varepsilon(\bar S)$ (быть может при несколько меньшем ε), а значит условие $(|x|^2-1)^2\Lambda u_{\varphi_2}|_{\partial S}=0$ выполнено и поэтому граничные условия для u_2 тоже удовлетворяются. Замечание доказано. □

Лемма 7. *При $x\in S$ имеет место равенство*

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\varphi_1(\xi)\Delta_\xi^2\mathcal{G}_6(x,\xi)\,d\xi =\frac{|x|^2-1}{2}u_{\varphi_1}(x)-\frac{(|x|^2-1)^2}{8}(2\Lambda+n)u_{\varphi_1}(x). \tag{45}$$

Доказательство. Рассмотрим наиболее крупный случай, когда $n\notin\mathbb{N}_2^c=\{2,4\}$. Воспользуемся формулой (40). Применим оператор Δ_ξ к обеим частям этого равенства и используем равенство, аналогичное (21), которое при указанных n верно

$$\Delta_\xi(\mathcal{E}_4(x,\xi)-\mathcal{E}_4^*(x,\xi))=-\mathcal{E}_2(x,\xi)+\mathcal{E}_2^*(x,\xi)+(|x|^2-1)\mathcal{E}_2^*(x,\xi),$$

а также равенство аналогичное (24)

$$\Delta_\xi\frac{|\xi|^2-1}{2}\mathcal{E}_2^*(x,\xi)=(n+2\Lambda_\xi)\mathcal{E}_2^*(x,\xi).$$

Имея в виду, что оператор Λ_ξ сохраняет гармоничность функции и справедливо равенство $\Delta_\xi \Lambda_\xi = (\Lambda_\xi + 2)\Delta_\xi$, будем иметь

$$\Delta_\xi^2 \mathcal{G}_6(x,\xi) = \mathcal{E}_2(x,\xi) - \mathcal{E}_2^*(x,\xi) - (|x|^2-1)\mathcal{E}_2^*(x,\xi) - |x|^2(|x|^2-1)\mathcal{E}_2^*(x,\xi)$$
$$+|x|^2\frac{|x|^2-1}{2}(2\Lambda_\xi+n+2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi) - \frac{(|x|^2-1)^2}{8}(2\Lambda_\xi+n)(2\Lambda_\xi+n+2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi)$$
$$= \mathcal{E}_2(x,\xi) - \mathcal{E}_2^*(x,\xi) + \Big(\frac{|x|^2-1}{2}(2\Lambda_\xi+n-2) - \frac{(|x|^2-1)^2}{8}\big(-4(2\Lambda_\xi+n)$$
$$+(2\Lambda_\xi+n)(2\Lambda_\xi+n+2)\big)\Big)\mathcal{E}_2^*(x,\xi) = \mathcal{E}_2(x,\xi) - \mathcal{E}_2^*(x,\xi) + \frac{|x|^2-1}{2}$$
$$\times(2\Lambda_\xi+n-2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi) - \frac{(|x|^2-1)^2}{8}(2\Lambda_\xi+n)(2\Lambda_\xi+n-2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi). \quad (46)$$

Отсюда следует, что

$$\Delta_\xi^2 \mathcal{G}_6(x,\xi)|_{\partial S}$$
$$= \frac{|x|^2-1}{2}(2\Lambda_\xi+n-2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi) - \frac{(|x|^2-1)^2}{8}(2\Lambda_\xi+n)(2\Lambda_\xi+n-2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi)|_{\partial S}.$$

Из первого и второго утверждений леммы 5 вытекает, что

$$(2\Lambda_\xi+n-2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi)|_{\partial S} = -\Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x,\xi)|_{\partial S}$$

$$(2\Lambda_\xi+n)(2\Lambda_\xi+n-2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi)|_{\partial S}$$
$$= (2\Lambda_x+n)(2\Lambda_\xi+n-2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi)|_{\partial S} = -(2\Lambda_x+n)\Lambda_\xi\mathcal{G}_2(x,\xi)|_{\partial S}.$$

В силу этих равенств можем записать

$$\Delta_\xi^2 \mathcal{G}_6(x,\xi)|_{\partial S}$$
$$= -\frac{|x|^2-1}{2}\Lambda_\xi\mathcal{G}_2(x,\xi)|_{\partial S} + \frac{(|x|^2-1)^2}{8}(2\Lambda_x+n)\Lambda_\xi\mathcal{G}_2(x,\xi)|_{\partial S}. \quad (47)$$

При $x \in S$ слагаемые из (47) не имеют особенностей по $\xi \in \partial S$. Поэтому, умножая (47) на $\frac{1}{\omega_n}\varphi_1(\xi)$, затем интегрируя по $\xi \in \partial S$ и учитывая, что $u_\psi(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\Lambda_\xi\mathcal{G}_2(x,\xi)\psi(\xi)\,ds_\xi$, нетрудно получить доказываемое равенство (45). Лемма доказана. □

Замечание 3. *Пусть $\varphi_1 \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$, тогда для 3-гармонической функции*

$$u_1(x) = \frac{|x|^2-1}{2}u_{\varphi_1}(x) - \frac{(|x|^2-1)^2}{8}(2\Lambda+n)u_{\varphi_1}(x)$$

из леммы 7 справедливы равенства

$$u_1|_{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu}\Big|_{\partial S} = \varphi_1, \quad \Delta u_1|_{\partial S} = 0. \quad (48)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что $u_{\varphi_1} \in C^{1+\varepsilon}(\bar S)$. Поэтому, в силу (44), первое равенство из (48) выполняется. Поскольку в силу (44) имеем $(|x|^2-1)^2\Lambda^2 u_{\varphi_1}(x)|_{\partial S}=0$, то и второе равенство из (48) также выполнено

$$\frac{\partial u_1}{\partial\nu}\Big|_{\partial S} = \Lambda u_1(x)|_{\partial S} = \Big(|x|^2 u_{\varphi_1}(x) + \frac{|x|^2-1}{2}\Lambda u_{\varphi_1}(x) \\ - |x|^2\frac{|x|^2-1}{2}(2\Lambda+n)u_{\varphi_1}(x) - \frac{(|x|^2-1)^2}{8}\Lambda(2\Lambda+n)u_{\varphi_1}(x)\Big)\Big|_{\partial S} = \varphi_1.$$

Воспользуемся равенством (43) при $\varphi(t)=\frac12(t-1)$ и $\varphi(t)=\frac18(t-1)^2$ и учтем при этом, что оператор Λ сохраняет гармоничность функции. Будем иметь

$$\Delta u_1(x) = \frac12(2n+4\Lambda)u_{\varphi_1}(x) - \Big(|x|^2 + \frac{|x|^2-1}{4}(2n+4\Lambda)\Big)(2\Lambda+n)u_{\varphi_1}(x).$$

Поскольку $\Lambda u_{\varphi_1} \in C^{\varepsilon}(\bar S)$, то тогда в силу равенства (44) имеем $(|x|^2-1)\Lambda(\Lambda u_{\varphi_1}(x))|_{\partial S}=0$. Учитывая это получаем

$$\Delta u_1(x)|_{\partial S} = (n+2\Lambda)u_{\varphi_1}(x) - (2\Lambda+n)u_{\varphi_1}(x) = 0.$$

Замечание доказано. □

Лемма 8. *При $x\in S$ имеет место равенство*

$$-\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\varphi_0(\xi)\Lambda_\xi\Delta_\xi^2\mathcal{G}_6(x,\xi)\,d\xi \\ = u_{\varphi_0}(x) - \frac{|x|^2-1}{2}\Lambda u_{\varphi_0}(x) + \frac{(|x|^2-1)^2}{8}(2\Lambda^2+n\Lambda)u_{\varphi_0}(x). \quad (49)$$

Доказательство. Рассмотрим наиболее крупный случай, когда $n\notin\mathbb{N}_2^c=\{2,4\}$. Воспользуемся формулой (46). Применим оператор Λ_ξ к обеим частям этого равенства:

$$\Lambda_\xi\Delta_\xi^2\mathcal{G}_6(x,\xi) = \Lambda_\xi(\mathcal{E}_2(x,\xi)-\mathcal{E}_2^*(x,\xi)) + \frac{|x|^2-1}{2} \\ \times\Lambda_\xi(2\Lambda_\xi+n-2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi) - \frac{(|x|^2-1)^2}{8}\Lambda_\xi(2\Lambda_\xi+n)(2\Lambda_\xi+n-2)\mathcal{E}_2^*(x,\xi).$$

Если здесь учесть известное равенство

$$\Lambda_\xi(\mathcal{E}_2(x,\xi)-\mathcal{E}_2^*(x,\xi))|_{\partial S} = \frac{|x|^2-1}{|x-\xi|^n}|_{\partial S} = \Lambda_\xi\mathcal{G}_2(x,\xi)|_{\partial S},$$

которое следует из (41) при $\varphi(t)=\frac{t^{2-n}}{n-2}$, и оба утверждения леммы 5, то будем иметь

$$\Lambda_\xi\Delta_\xi^2\mathcal{G}_6(x,\xi)|_{\partial S} = \Big(1-\frac{|x|^2-1}{2}\Lambda_\xi+\frac{(|x|^2-1)^2}{8}\Lambda_\xi(2\Lambda_\xi+n)\Big)\Lambda_\xi\mathcal{G}_2(x,\xi)|_{\partial S} \\ = \Big(1-\frac{|x|^2-1}{2}\Lambda_x+\frac{(|x|^2-1)^2}{8}\Lambda_x(2\Lambda_x+n)\Big)\Lambda_\xi\mathcal{G}_2(x,\xi)|_{\partial S}.$$

При $x \in S$ функции в этом равенстве не имеют особенностей по $\xi \in \partial S$. Поэтому, умножая это равенство на $-\frac{1}{\omega_n}\varphi_0(\xi)$, интегрируя по $\xi \in \partial S$, а также учитывая, что $u_\psi(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x,\xi)\psi(\xi)\,ds_\xi$, нетрудно получить (49). Лемма доказана. $\square$

Замечание 4. *Пусть $\varphi_0 \in C^{2+\varepsilon}(\partial S)$, тогда для 3-гармонической функции*

$$u_0(x) = u_{\varphi_0}(x) - \frac{|x|^2-1}{2}\Lambda u_{\varphi_0}(x) + \frac{(|x|^2-1)^2}{8}(2\Lambda^2 + n\Lambda)u_{\varphi_0}(x)$$

из леммы 8 справедливы равенства

$$u_0|_{\partial S} = \varphi_0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial\nu}\Big|_{\partial S} = \Delta u_0|_{\partial S} = 0.$$

Доказательство. В силу [40, лемма 2.7] при $\varphi_0 \in C^{2+\varepsilon}(\partial S)$ имеем $u_{\varphi_0} \in C^{2+\varepsilon}(\bar S)$. Поэтому, так как по (44) $(|x|^2-1)^k\Lambda^k u_{\varphi_0}(x)|_{\partial S} = 0$ при $k = 1,2$, то первое равенство $u_0|_{\partial S} = \varphi_0$ выполнено. Второе равенство выполнено поскольку $\Lambda u_{\varphi_0} \in C^{1+\varepsilon}(\bar S)$ и в силу (44) также имеем $(|x|^2 - 1)^k\Lambda^k(\Lambda u_{\varphi_0}(x))|_{\partial S} = 0$ при $k = 1,2$. Отсюда следует

$$\frac{\partial u_0}{\partial\nu}\Big|_{\partial S}$$
$$= \Lambda u_0(x)|_{\partial S} = (\Lambda u_{\varphi_0}(x) - |x|^2\Lambda u_{\varphi_0}(x))|_{\partial S} - \frac{|x|^2-1}{2}\Lambda(\Lambda u_{\varphi_0})(x)|_{\partial S}$$
$$+|x|^2\frac{|x|^2-1}{2}(2\Lambda+n)(\Lambda u_{\varphi_0})|_{\partial S}(x) + \frac{(|x|^2-1)^2}{8}(2\Lambda^2+n\Lambda)(\Lambda u_{\varphi_0})(x)|_{\partial S} = 0.$$

Аналогично сделанному в замечании 3, используя (43) при $\varphi(t) = \frac{1}{2}(t-1)$ и $\varphi(t) = \frac{1}{8}(t-1)^2$ и учитывая сохранение оператором Λ гармоничности функции, найдем

$$\Delta u_0(x) = -\frac{1}{2}(2n+4\Lambda)\Lambda u_{\varphi_0}(x) + \Big(|x|^2 + \frac{|x|^2-1}{4}(2n+4\Lambda)\Big)(2\Lambda^2+n\Lambda)u_{\varphi_0}(x).$$

Поскольку $\Lambda u_{\varphi_0} \in C^{1+\varepsilon}(\bar S)$, $\Lambda^2 u_{\varphi_0} \in C^{\varepsilon}(\bar S)$, то по (44) имеем

$$(|x|^2-1)(\Lambda + n/2)^2(\Lambda u_{\varphi_0})|_{\partial S} = (|x|^2-1)\Lambda(\Lambda^2 u_{\varphi_0})|_{\partial S}$$
$$+ n(|x|^2-1)\Lambda(\Lambda u_{\varphi_0})|_{\partial S} + (n/2)^2(|x|^2-1)\Lambda(u_{\varphi_0})|_{\partial S} = 0$$

и значит, из предыдущего равенства следует, что

$$\Delta u_0(x)|_{\partial S} = -(n+2\Lambda)\Lambda u_{\varphi_0}(x) + (2\Lambda^2+n\Lambda)u_{\varphi_0}(x) = 0.$$

Замечание доказано. $\square$

Докажем основной результат.

Доказательство теоремы 2. Используя лемму 4 и формулу (38) перепишем равенство (34) в виде $u(x) = u_f(x) + u_n(x)$. В леммах 6-8 было доказано, что $u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x)$, где функции $u_i(x)$ определены в замечаниях 2-4. Далее в этих же замечаниях было установлено, что каждая из функций $u_i(x)$ является решением такого частного случая задачи (1)-(2), что сумма функций $u_i(x)$ – функция $u_n(x)$, решает общую задачу (1)-(2) для однородного уравнения. Поэтому функция $u(x) = u_f(x) + u_n(x)$ из (34) является решением задачи (1)-(2). Теорема доказана. $\square$

Следствие 2. *Решение задачи* (1)-(2) *можно представить в другом виде*

$$u(x) = u_f(x) + u_{\varphi_0}(x) + \frac{|x|^2-1}{2}\big(u_{\varphi_1}(x) - \Lambda u_{\varphi_0}(x)\big) \\ + \frac{(|x|^2-1)^2}{8}\big(u_{\varphi_2}(x) - (2\Lambda+n)u_{\varphi_1}(x) + (2\Lambda^2+n\Lambda)u_{\varphi_0}(x)\big), \quad (50)$$

где функция $u_f(x)$ определена в лемме 4, а функции $u_{\varphi_i}(x)$ являются решениями гармонических задач Дирихле в S при условии $u_{\varphi_i}|_{\partial S} = \varphi_i$, $i = 0, 1, 2$.

Доказательство. Пусть $u(x)$ – решение задачи (1)-(2), тогда по теореме 1 это решение имеет вид (34). В доказательстве теоремы 2 было отмечено, что $u(x) = u_f(x)+u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)$, где функции $u_i(x)$ определены в замечаниях 2-4. Складывая функции $u_f(x)$ и $u_i(x)$ для $i = 0, 1, 2$ получим функцию из правой части (50). $\square$

Замечание 5. *Функция $u(x)$ из* (50) *является решением задачи* (1)-(2) *при всех $n \geq 2$.*

Пример 1. *Рассмотрим следующую простую задачу типа* (1)-(2)

$$\Delta^3 u(x) = a|x|^2,\ x \in S; \quad u|_{\partial S} = c_0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial S} = c_1,\ \Delta u|_{\partial S} = c_2, \qquad (51)$$

где c_0, c_1, c_2 – константы. В работе [13, теорема 3] *исследовалась функция Грина $\mathcal{G}_{2m}(x,\xi)$ задачи Дирихле. Было, в частности, установлено, что решение $u_f(x)$ при $f(x) = |x|^{2l}h_k(x)$, где $h_k(x)$ – однородный гармонический полином степени k и $l, k \in \mathbb{N}_0$, имеет вид*

$$\frac{|x|^{2l+6} - 1 - (l+3)(|x|^2-1) - \frac{1}{2}(l+2)(l+3)(|x|^2-1)^2}{(2l+2,2)_3(2l+2k+n,2)_3}h_k(x),$$

где символ $(a,b)_k$ определен в (7). *Поэтому в случае $l = 1$ и $h_k(x) = a$ будем иметь*

$$u_f(x) = d_n(|x|^8-1) - 4d_n(|x|^2-1) - 6d_n(|x|^2-1)^2,$$

где $1/d_n = 192(n+2)(n+4)(n+6)/a$. Ясно, что $u_{\varphi_i}(x) = c_i$ и поэтому из (50) *найдем*

$$u(x) = c_0 + (c_1/2 - 4d_n)(|x|^2-1) + ((c_2 - nc_1)/8 - 6d_n)(|x|^2-1)^2 + d_n(|x|^8-1).$$

Нетрудно убедиться, что полученная функция – решение задачи (51).

References

[1] Begehr H. *Biharmonic Green functions*, Le Matematiche. **LXI** (2006), 395–405.

[2] Begehr H., Vaitekhovich T. *Modified harmonic Robin function*, Complex Variables and Elliptic Equations, **58** (2013), 483–496.

[3] Sadybekov MA., Torebek BT. and Turmetov BKh. *On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle*, Adv. Pure Appl. Math. **6** (2015), 163–172.

[4] Karachik VV., Turmetov BKh. *On Greens function of the Robin problem for the Poisson equation*, Advances in Pure and Applied Mathematics. 2019; 10: 203–214.

[5] Ying Wang, Liuqing Ye. Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector. Complex Variables Elliptic Equ. 2013; 58: 7–22.

[6] Ying Wang. Tri-harmonic boundary value problems in a sector. Complex Variables Elliptic Equ. 2014; 59: 732–749.

[7] Karachik V. Green's functions of some boundary value problems for the biharmonic equation. Complex Variables and Elliptic Equ. 2022; 67: 1712–1736.

[8] Karachik V., Turmetov B., Yuan H. Four Boundary Value Problems for a Nonlocal Biharmonic Equation in the Unit Ball. Mathematics. 2022; 10: 1–21.

[9] Karachik VV. The Green Function of the Dirichlet Problem for the Triharmonic Equation in the Ball. Mathematical Notes. 2020; 107: 105–120.

[10] Boggio T. Sulle funzioni di Green d'ordine m. Palermo Rend. 1905; 20: 97–135.

[11] Begerh H., Vu TNH., Zhang ZX. Polyharmonic Dirichlet Problems. Proceedings of the Steklov Institute of Math. 2006; 255: 13–34.

[12] Kalmenov TSh., Koshanov BD., Nemchenko MY. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere. Complex Var. Elliptic Equ. 2008; 53: 177–183.

[13] Karachik VV. On Green function of the Dirichlet problem for polyharmonic equation in the ball. Axioms. 2023; 12: 543.

[14] Karachik VV. Dirichlet and Neumann boundary value problems for the polyharmonic equation in the unit ball. Mathematics. 2021; 9: 1907.

[15] Karachik VV. Construction of Polynomial Solutions to the Dirichlet Problem for the Polyharmonic Equation in a Ball. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014; 54: 1122–1143.

[16] Karachik VV., Torebek BT. On the Dirichlet-Riquier problem for biharmonic equations. Math. Notes. 2017; 102: 31–42.

[17] Karachik V.V, *A Neumann-type problem for the biharmonic equation*, Siberian Adv. Math. **27** (2017), 103–118.

[18] Karachik VV. Green's Functions of the Navier and Riquier-Neumann Problems for the Biharmonic Equation in the Ball. Differential Equations. 2021; 57: 654–668.

[19] Sweers G. A survey on boundary conditions for the biharmonic. Complex Variables and Elliptic Equ. 2009; 54: 79–93.

[20] Karachik V. The Green function of the Navier problem for the polyharmonic equation in a ball. Journal of Mathematical Sciences. 2023; 269: 189–204.

[21] Karachik V. Riquier-Neumann Problem for the Polyharmonic Equation in a Ball. Mathematics. 2023; 11: 1000.

[22] Karachik V. On one integral representation of solutions of polyharmonic equation. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023; 44: 2749–2756.

[23] Bitsadze AV. On the Neumann problem for harmonic functions. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1990; 311: 11–13.

[24] Karachik VV. On the Arithmetic Triangle Arising from the Solvability Conditions for the Neumann Problem. Math. Notes. 2014; 96: 217–227.

[25] Soldatov AP. On the Fredholm property and index of the generalized Neumann problem. Differential equations. 2020; 56: 212–220.

[26] Begehr H., Burgumbayeva S., Shupeyeva B. Remark on Robin problem for Poisson equation. Complex Variables and Elliptic Equ. 2017; 62: 1589–1599.

[27] Akel M., Begehr H. Neumann function for a hyperbolic strip and a class of related plane domains. Mathematische Nachrichten. 2017; 290: 490–506.

[28] Lin H. Harmonic Green and Neumann functions for domains bounded by two intersecting circular arcs. Complex Variables and Elliptic Equ. 2020; 67: 79–95.

[29] Begehr H., Burgumbayeva S., Dauletkulova A., Lin H. Harmonic Green functions for the Almaty apple. Complex Variables and Elliptic Equ. 2020; 65: 1814–1825.

[30] Chung F, Zeng J. Forest formulas of discrete Green's functions. Journal of Graph Theory. 2023; 102: 556–577.

[31] Herrera WJ., Vinck-Posada H, Gomez PaezS. Green's functions in quantum mechanics courses. American Journal of Physics. 2022; 90: 763–769.

[32] Harkonen VJ. Exact factorization of the many-body Green's function theory of electrons and nuclei. Phys. Rev. B. 2022; 106: 205137.

[33] Dong H., Li H. Optimal Estimates for the Conductivity Problem by Green's Function Method. Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2019; 231: 1427–1453.

[34] Grebenkov DS., Traytak SD. Semi-analytical computation of Laplacian Green functions in three-dimensional domains with disconnected spherical boundaries. Journal of Computational Physics. 2019; 379: 91–117.

[35] Hsu C.-W., Hwu C. Green's functions for unsymmetric composite laminates with inclusions. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2020; 476: 20190437.

[36] Sobolev SL. Cubature Formulas and Modern Analysis: An Introduction. Nauka, Moscow, 1974; Gordon and Breach, Montreux, 1992.

[37] Bitsadze AV. Uravneniya matematicheskoi fiziki (Equations of Mathematical Physics). Moscow: Nauka, 1982.

[38] Karachik VV. Greens function of Dirichlet problem for biharmonic equation in the ball. Complex Variables and Elliptic Equ. 2019; 64: 1500–1521.

[39] Karachik V. Representation of the Green's Function of the Dirichlet Problem for the Polyharmonic Equation in the Ball. Differential Equations. 2023; 59: 1061–1074.

[40] Alimov ShA. On a problem with an oblique derivative. Differ. Uravn. 1981; 17: 1738–1751.

Valeriy Valentinivich Karachik
South Ural State University (NRU),
pr. Lenina, 76,
454080, Chelaybinsk, Russia
E-mail address: karachik@susu.ru