S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том ??, стр. ???–??? (20??) УДК 512.664.2

DOI 10.17377/semi.2015.12.xxx MSC 17B69, 16E40

КоГоМоЛоГИИ SохшИЛьДА сВоБоДноЙ КонфорМноЙ АЛГЕБры

В. Е. ЛОПАТКИН

Аннотация. В работе вычислены производящие функции размерностей градуированных компонент пространств когомологий Хохшильда свободной ассоциативной конформной алгебры и 1-порожденной свободной коммутативной конформной алгебры со скалярными коэффициентами.

Ключевые слова: конформная алгебра, когомологии Хохшильда, производящая функция.

Abstract. We explicitly compute generating functions for the dimensions of graded components of the Hochschild cohomology spaces for a free associative conformal algebra and for a 1-generated free commutative conformal algebra with scalar coefficients.

Keywords: conformal algebra, Hochschild cohomology, generating function.

1. Введение

Хорошо известно, что группы когомологий Хохшильда $H^n(F,\Bbbk)$ свободной ассоциативной алгебры F над полем $\Bbbk$ тривиальны при $n > 1$. Если же $F = \Bbbk[x_1,\dots,x_m]$ — алгебра коммутативных многочленов от m переменных, то размерность пространства $H^n(F,\Bbbk)$ равна $\binom{m}{n}$, градуированное кольцо таких когомологий изоморфно алгебре Грассмана с m порождающими.

В данной работе мы рассмотрим задачу отыскания (редуцированных) когомологий Хохшильда для свободных ассоциативных конформных алгебр при помощи резольвенты Аника положительной части алгебры коэффициентов.

Лопаткин В.Е., Когомологии Хохшильда свободной конформной алгебры.

Received ??? , published ???, 1, 20??.

В этом случае размерности групп когомологий бесконечны при $n > 1$, поэтому мы введем естественную градуировку и вычислим производящую функцию (от двух переменных) для последовательности размерностей компонент градуировки всех групп когомологий.

Далее мы рассмотрим аналогичную задачу для свободной коммутативной конформной алгебры с одним образующим элементом. Отметим, что даже линейный базис такой алгебры в явном виде неизвестен. Тем не менее, нам достаточно имеющихся данных об алгебре коэффициентов свободной конформной алгебры для того, чтобы вычислить размерности компонент градуировки групп когомологий.

2. Резольвента Аника квадратичной алгебры

Пусть $\Bbbk$ — некоторое поле, X — непустое множество, $\Bbbk\langle X\rangle_0$ — свободная ассоциативная алгебра (без единицы) с образующими элементами X, S — базис Грёбнера — Ширшова в $\Bbbk\langle X\rangle_0$, A — соответствующая фактор-алгебра $\Bbbk\langle X\rangle_0/(S)$.

Тогда алгебра с единицей $\Lambda = \Bbbk\langle X \mid S\rangle$, порожденная множеством X с определяющими соотношениями S, является обогащенной (augmented) алгеброй с гомоморфизмом $\varepsilon : \Lambda \to \Bbbk$ таким, что $\varepsilon(x) = 0$ для $x \in X$. Мы можем представить Λ в виде $A \oplus \Bbbk 1$.

Напомним, что (двусторонней) бар-резольвентой алгебры Λ называется точная последовательность Λ-бимодулей

$$0 \leftarrow \Bbbk \leftarrow \Lambda\otimes\Lambda \leftarrow B_1(\Lambda) := \Lambda\otimes A\otimes\Lambda \leftarrow \cdots \leftarrow B_n(\Lambda) := \Lambda\otimes A^{\otimes n}\otimes\Lambda \leftarrow \ldots,$$

в которой все морфизмы $B_{n+1}(\Lambda) \to B_n(\Lambda)$ определены по стандартному правилу:

$$[\alpha_1|\ldots|\alpha_{n+1}] \mapsto \alpha_1\otimes[\alpha_2|\ldots|\alpha_{n+1}] + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i[\alpha_1|\ldots|\alpha_i\alpha_{i+1}|\ldots|\alpha_{n+1}] + (-1)^{n+1}[\alpha_1|\ldots|\alpha_n]\otimes\alpha_{n+1}.$$

Здесь и далее мы используем стандартное обозначение $[x_1|\ldots|x_n]$ для тензора $x_1\otimes\ldots\otimes x_n \in A^{\otimes n}$.

Пусть M — некоторый A-бимодуль (следовательно, Λ-бимодуль). *Комплекс Хохшильда* алгебры A со значениями в M — это дуальный коцепной комплекс $C^\bullet(A,\Bbbk) = \mathrm{Hom}_{\Lambda-\Lambda}(B_\bullet(\Lambda), M)$. Когомологии этого комплекса и есть когомологии Хохшильда алгебры A со значениями в M. Для нас основным будет случай $M = \Bbbk$ с бимодульным действием $\lambda\cdot 1 = 1\cdot\lambda = \varepsilon(\lambda)1$.

Резольвента Аника [2] $A_\bullet(\Lambda)$ — другая свободная резольвента для Λ, она гомотопически эквивалентна бар-резольвенте $B_\bullet(\Lambda)$, поэтому когомологии коцепного комплекса $\mathrm{Hom}(A_\bullet(\Lambda),\Bbbk)$ такие же, как у комплекса Хохшильда.

Пространства $A_n(\Lambda)$, $n \geq 0$, составляющие резольвенту Аника, являются свободными Λ-бимодулями, порожденными т. н. $(n-1)$-*цепями Аника.* В случае, когда базис Гребнера — Ширшова алгебры состоит из квадратичных соотношений (именно с такими примерами мы будем работать далее), определение цепи Аника особенно просто.

Именно, пусть X — образующие алгебры $\Lambda = \Bbbk\langle X\rangle/(S)$, S — базис Гребнера — Ширшова со старшими словами V длины 2. Тогда 0-цепи — это тензоры вида $[x]$, $x \in X$, 1-цепи — это тензоры вида $[x|y]$, где $x, y \in X$ и $xy \in V$. Далее,

n-цепью Аника для произвольного $n \geq 1$ являются тензоры $[x_1|x_2|\ldots|x_{n+1}]$, $x_i \in X$, $x_i x_{i+1} \in V$. (Формально говоря, (-1)-цепь — это единственная пустая последовательность $[\,]$.)

Построение дифференциала в резольвенте Аника

$$\delta_n : A_{n+1}(\Lambda) \to A_n(\Lambda)$$

непосредственно по определению из [2] сопряжено со значительными техническими трудностями. В работах [7] и [11] была предложена другая техника, основанная на дискретной алгебраической теории Морса [6], позволяющая вычислить дифференциал Аника в явном виде.

В частности, если S состоит из однородных многочленов, то дифференциал комплекса $\mathrm{Hom}_{\Lambda-\Lambda}(A_\bullet(\Lambda), \Bbbk)$ тождественно нулевой и вычисление размерностей групп когомологий сводится к подсчету цепей Аника.

3. Конформные алгебры и их когомологии

Приведем основные определения, относящиеся к теории (ассоциативных) конформных алгебр и их когомологий, следуя [8] и [4].

Конформной алгеброй называется векторное пространство C над полем $\Bbbk$ характеристики нуль с линейным оператором ∂ и бесконечным семейством билинейных операций $(\cdot\,_{(n)}\,\cdot)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, где $\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел, при условии, что выполнены следующие аксиомы.

(C1) Для любых $a, b \in C$ найдется $N = N(a,b) \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $(a\,_{(n)}\,b) = 0$ при всех $n \geq N$.

(C2) Для всех $a, b \in C$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ выполняются равенства

$$(\partial a\,_{(n)}\,b) = -n(a\,_{(n-1)}\,b), \quad (a\,_{(n)}\,\partial b) = \partial(a\,_{(n)}\,b) + n(a\,_{(n-1)}\,b).$$

Любая конформная алгебра C может быть представлена как подпространство в пространстве *формальных распределений* (бесконечных в обе стороны формальных степенных рядов) над некоторой обычной алгеброй A, т. е.

$$C \subset A[[z, z^{-1}]],$$

причем оператор ∂ при этом вложении соответствует формальному дифференцированию по z, а операция $(\cdot\,_{(n)}\,\cdot)$ на формальных распределениях выражается следующим образом:

$$(a(z)\,_{(n)}\,b(z)) = \operatorname*{Res}_{w=0} a(w)b(z)(w-z)^n,$$

где w — новая формальная переменная, а $\operatorname*{Res}_{w=0}$ означает, как обычно, сумму всех членов (зависящих от z) при w^{-1}.

Среди всех таких алгебр A можно выделить единственную (с точностью до изоморфизма) универсальную, которая называется *алгеброй коэффициентов* $\mathcal{A}(C)$ конформной алгебры C. Конформная алгебра называется ассоциативной (или коммутативной), если такова ее алгебра коэффициентов [9].

Пусть C — конформная алгебра, $\mathcal{A}(C)$ — ее алгебра коэффициентов, в частности, $C \subset \mathcal{A}(C)[[z, z^{-1}]]$: каждый элемент $a \in C$ каноническим образом представлен формальным рядом

$$a(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a(m) z^{-m-1}, \quad a(m) \in \mathcal{A}(C).$$

Тогда множество всех коэффициентов $a(m)$ при $a \in C$, $m \geq 0$ является подалгеброй в $\mathcal{A}(C)$, которая обозначается $\mathcal{A}_+(C)$.

Понятие бимодуля над ассоциативной конформной алгеброй C определяется в полном соответствии с общим принципом, восходящим к Эйленбергу (см., например, [5]): на векторном пространстве M должны быть заданы оператор ∂ и два семейства билинейных операций

$$(\cdot\ {}_{(n)}\ \cdot) : C \otimes M \to M, \quad M \otimes C \to M$$

такие, что формальная прямая сумма $C \oplus M$ с естественно определенными операциями (полагаем $M\ {}_{(n)}\ M = 0$) является ассоциативной конформной алгеброй.

Пусть C — ассоциативная конформная алгебра, M — бимодуль над C. Мы не приводим громоздких определений *базового* и *редуцированного* комплексов Хохшильда для C со значениями в M (их можно найти в [4]), поскольку для наших задач достаточно следующего наблюдения из той же статьи.

Бимодуль M над ассоциативной конформной алгеброй C всегда является бимодулем (в обычном смысле) над алгеброй $A = \mathcal{A}_+(C)$. Рассмотрим пространства $C_0^n(A, M)$, $n \geq 1$, состоящие из всех таких линейных функций $f : A^{\otimes n} \to M$, что для любых данных $a_1, \dots, a_n \in C$ значение $f(a_1(m_1), \dots, a_n(m_n))$ не равно нулю только для конечного числа наборов чисел $m_1, \dots, m_n \geq 0$. Тогда $C_0^\bullet(A, M)$ — подкомплекс в комплексе Хохшильда $C^\bullet(A, M)$.

Для $A = \mathcal{A}_+(C)$ рассмотрим отображение $D : C^n(A, M) \to C^n(A, M)$, определенное следующим образом:

$$\begin{aligned}(Df)&(a_1(m_1), \dots, a_n(m_n)) \\ &= \partial f(a_1(m_1), \dots, a_n(m_n)) - \sum_{i=1}^{n} m_i f(a_1(m_1), \dots, a_i(m_i - 1), \dots, a_n(m_n)).\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что $DC_0^n(A, M) \subset C_0^n(A, M)$ и отображение D перестановочно с дифференциалом Хохшильда. Следовательно, образ $DC_0^\bullet(A, M)$ — подкомплекс в $C_0^\bullet(A, M)$.

Предложение 1 ([4]). *Для ассоциативной конформной алгебры C базовый комплекс $\tilde{C}^\bullet(C, M)$ изоморфен комплексу $C_0^\bullet = C_0^\bullet(\mathcal{A}_+(C), M)$, а редуцированный комплекс $C^\bullet(C, M)$ изоморфен фактору $C_0^\bullet / DC_0^\bullet$.*

Заметим, что именно когомологии редуцированного комплекса являются (с категорной точки зрения, см. [3]) «правильным» обобщением классических когомологий Хохшильда на конформные алгебры. Так, например, элементы первой группы когомологий $H^1(C, C)$ описывают классы внешних дифференцирований конформной алгебры C, а элементы второй группы когомологий $H^2(C, \Bbbk)$ редуцированного комплекса ассоциативной конформной алгебры C при $M = \Bbbk$ (скалярный бимодуль с нулевым действием) находятся во взаимнооднозначном соответствии с классами эквивалентности 1-мерных центральных расширений конформной алгебры C.

Случай $M = \Bbbk$ с нулевым действием и $\partial = 0$ имеет еще одну особенность: в этом случае оператор D, определенный выше, D является сопряженным к морфизму Λ-бимодулей ($\Lambda = A \oplus \Bbbk 1$)

$$D^* : B_\bullet(\Lambda) \to B_\bullet(\Lambda),$$

заданному очевидным образом:

$$D^*: [a_1(m_1)|\dots|a_n(m_n)] = -\sum_{i=1}^{n} m_i [a_1(m_1)|\dots|a_i(m_i-1)|\dots|a_n(m_n)]. \tag{1}$$

Отсюда вытекает следующий подход к вычислению $C^\bullet(C,\Bbbk)$ (ср. с [1]). Строим резольвенту Аника для $\Lambda = A \oplus \Bbbk 1$ с обогащением $\varepsilon(A) = 0$, где $A = \mathcal{A}_+(C)$. Для свободных конформных алгебр, как мы увидим, дуальные дифференциалы комплекса Аника тождественно нулевые. Находим отображение $D^*: A_\bullet(\Lambda) \to A_\bullet(\Lambda)$, соответствующее морфизму бар-резольвенты при гомотопической эквивалентности. Тогда элементы кообраза D находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с элементами ядра D^* на резольвенте Аника (соответствие Фредгольма). Таким образом, нам достаточно изучить строение ядер отображения D^* на пространствах цепей Аника.

4. Свободная ассоциативная конформная алгебра

Пусть X — непустое множество и $N: X\times X \to \mathbb{Z}_+$ — некоторая функция. Тогда, согласно [9], существует единственная с точностью до изоморфизма ассоциативная конформная алгебра, порожденная множеством X и универсальная в классе всех таких алгебр, у которых

$$x \,{}_{(n)}\, y = 0 \text{ для всех } n \geq N(x,y),$$

при $x, y \in X$. Обозначим эту конформную алгебру $\mathrm{ConfAs}(X;N)$, ее естественно называть *свободной* ассоциативной конформной алгеброй с множеством образующих X и ограничением на локальность образующих N.

Предложение 2 ([9]). *Пусть $N(x,y) = N = \mathrm{const}$ для всех $x, y \in X$. Тогда множество соотношений*

$$\sum_{s\geq 0} (-1)^s \binom{N}{s} x(n-s) y(m+s) = 0,$$

$x, y \in X$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq N$, является базисом Грёбнера — Ширшова для $\mathcal{A}_+(\mathrm{ConfAs}(X;N))$.

Поскольку базис Грёбнера — Ширшова алгебры $\Lambda = A \oplus \Bbbk 1$, $A = \mathcal{A}_+(C)$, для свободной ассоциативной конформной алгебры $C = \mathrm{ConfAs}(X;N)$ состоит из однородных соотношений степени 2, мы легко найдем явный вид цепей Аника для этой алгебры, а дифференциал коцепного комплекса $\mathrm{Hom}_{\Lambda-\Lambda}(A_\bullet(\Lambda),\Bbbk)$ тождественно равен нулю.

Следствие 1. *Пространство $(n-1)$-цепей Аника $C(n)$ для $\mathcal{A}_+(\mathrm{ConfAs}(X;N))$ разлагается в прямую сумму*

$$C(n) = \bigoplus_{d\geq 0} C(n,d),$$

где $C(n,d)$ — линейная оболочка всех таких тензоров

$$[x_1(m_1)|x_2(m_2)|\dots|x_n(m_n)],$$

у которых $x_i \in X$, $m_1, \dots, m_{n-1} \geq N$, $m_i \in \mathbb{Z}_+$, $\sum_{i=1}^n m_i = d$.

Отображение D^*, заданное формулой (1), действует из $C(n,d)$ в $C(n,d-1)$ по следующему правилу:

$$D^*[x_1(m_1)|\dots|x_n(m_n)] = -\sum_{i=1}^{n} m_i[x_1(m_1)|\dots|x_i(m_i-1)|\dots|x_n(m_n)],$$

причем слагаемые, не являющиеся цепями из $C(n,d-1)$, попросту опускаются, поскольку слово, не являющееся цепью, превращается под действием D^* в линейную комбинацию слов, не являющихся цепями. Пространство когомологий редуцированного комплекса конформной алгебры $C = \mathrm{ConfAs}(X;N)$ со значениями в скалярном модуле наследует градуировку пространства $C(n)$:

$$H^n(C,\Bbbk) = \bigoplus_{d\geq 0} H(n,d),$$

где $H(n,d) = \ker D^*|_{C(n,d)}$.

Цель данного раздела — вычислить производящую функцию последовательности $\dim H(n,d)$, равную формальному ряду

$$\Phi(x,y) = \sum_{n\geq 1, d\geq 0} \dim H(n,d) x^n y^d.$$

Теорема 1. *Пусть $|X| = m$, $N(x,y) = N = \mathrm{const}$ для всех $x,y \in X$. Тогда производящая функция $\Phi(x,y)$ последовательности $\dim H(n,d)$ равна*

$$\Phi(x,y) = mx\frac{1-y}{1-y-mxy^N}. \tag{2}$$

Доказательство. Поскольку отображение D^* действует из $C(n,d)$ в $C(n,d-1)$, мы имеем $\dim H(n,d) = \dim\ker D^* = \dim C(n,d) - \dim C(n,d-1)$, поскольку D^*, очевидно, сюръективно. Подсчитаем $C(n,d)$.

При $n = 1$ все цепи Аника из $C(1,d)$ имеют вид $[x(d)]$, $x \in X$, поэтому $\dim C(1,d) = m$ для всех $d \geq 0$. Таким образом, $\dim H(1,d) = m\delta_{d,0}$.

При $n > 1$ цепь Аника из $C(n,d)$ имеет вид $[x_1(m_1)|\dots|x_{n-1}(m_{n-1})|x_n(s)]$, где $x_i \in X$, $s \geq 0$, $m_1,\dots,m_{n-1} \geq N$, $m_1+\dots+m_{n-1} = d-s$. Число таких цепей нетрудно подсчитать:

$$\dim C(n,d) = m^n \sum_{s\geq 0} A_N(n-1, d-s),$$

где $A_N(n,d)$ — число размещений d одинаковых шаров по n различным ящикам так, чтобы в каждом ящике было не менее N шаров. Очевидно, что

$$A_N(n,d) = \begin{cases} A_1(n, d-(N-1)n), & d \geq nN, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Хорошо известно (т. н. «метод перегородок»), что $A_1(n,d) = \binom{d-1}{n-1}$.

Обозначим через $\Psi(x,y)$ производящую функцию целочисленной последовательности $\dim C(n,d)$, $n\geq 1$, $d\geq 0$:

$$\begin{aligned}\Psi(x,y)&=\sum_{n\geq 1,d\geq 0}\dim C(n,d)x^ny^d\\ &=\sum_{d\geq 0}\Bigl(mx+\sum_{n\geq 2}\sum_{s\geq 0}m^nA_N(n-1,d-s)x^n\Bigr)y^d\\ &=mx\Bigl(\sum_{d\geq 0}y^d\Bigr)+\sum_{n\geq 2}(mx)^n\Bigl(\sum_{j\geq 0}A_N(n-1,j)y^j\Bigr)\Bigl(\sum_{s\geq 0}y^s\Bigr)\\ &=\frac{1}{1-y}\Bigl(mx+\sum_{n\geq 2}(mx)^n\Bigl(\sum_{j\geq 0}A_N(n-1,j)y^j\Bigr)\Bigr).\end{aligned}$$

Здесь мы сделали замену индекса $j=d-s$.

Заметим, что искомая функция Φ может быть выражена через Ψ:

$$\Phi(x,y)=\sum_{n\geq 1,d\geq 0}(C(n,d)-C(n,d-1))x^ny^d=(1-y)\Psi(x,y)$$

Следовательно,

$$\Phi(x,y)=mx+\sum_{n\geq 2}(mx)^n\Bigl(\sum_{j\geq 0}A_N(n-1,j)y^j\Bigr).$$

В правой части этого равенства суммирование по j достаточно проводить для $j\geq N(n-1)$:

$$(3)\qquad \begin{aligned}\sum_{j\geq 0}A_N(n-1,j)y^j&=\sum_{j\geq N(n-1)}\binom{j-N(n-1)+n-2}{n-2}y^j\\ &=\sum_{s\geq 0}\binom{s+n-2}{n-2}y^{s+N(n-1)},\end{aligned}$$

где $s=j-N(n-1)$. Сдвигая индекс n, окончательно получаем

$$\begin{aligned}\Phi(x,y)&=mx+\sum_{n\geq 0}(mx)^{n+2}\sum_{s\geq 0}\binom{s+n}{n}y^{s+N(n+1)}\\ &=mx+(mx)^2y^N\sum_{n,s\geq 0}\binom{n+s}{n}(mxy^N)^ny^s\\ &=mx+\frac{(mx)^2y^N}{1-y-mxy^N}=mx\frac{1-y}{1-y-mxy^N},\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Пример 1. *Вычислим вторую группу когомологий, отвечающую за центральные расширения. Коэффициент при x^2 может быть найден из формулы (2) как*

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(0,y)=m^2\frac{y^N}{1-y}=m^2\sum_{d\geq N}y^d.$$

Таким образом, в классе ассоциативных конформных алгебр локальности $\leq N$ на образующих элементах нет нетривиальных центральных расширений.

Следующая лемма вытекает из приведенного доказательства и понадобится нам в последующем.

Лемма 1. *Производящая функция последовательности $A_N(n,d)$, $n \geq 0$, $d \geq 0$, имеет вид*

$$A_N(x,y) = \sum_{n\geq 0, d\geq 0} A_N(n,d)x^n y^d = 1 + \frac{xy^N}{1-y-xy^N} = \frac{1-y}{1-y-xy^N}. \tag{4}$$

Действительно, для получения этой формулы достаточно прибавить слагаемое $A_N(0,0)=1$ к формуле (3):

$$\sum_{n\geq 0, d\geq 0} A_N(n,d)x^n y^d = 1 + \sum_{n\geq 1, s\geq 0} \binom{n+s-1}{n-1} y^{s+Nn}x^n$$
$$= 1 + \sum_{n\geq 0, s\geq 0} \binom{n+s}{n} y^s (xy^N)^{n+1} = 1 + xy^N \frac{1}{1-y-xy^N} = \frac{1-y}{1-y-xy^N}.$$

5. Свободная коммутативная конформная алгебра с одним порождающим

Рассмотрим конформную алгебру $\mathrm{ConfCom}(X;N)$, универсальную в классе всех коммутативных конформных алгебр, порожденных множеством X с ограничением на локальность образующих $N : X\times X \to \mathbb{Z}_+$. Строение такой алгебры даже при $|X|=1$ до конца не ясно: неизвестен линейный базис такой алгебры. Однако мы можем использовать результат работы [10] об алгебре $A = \mathcal{A}_+(\mathrm{ConfCom}(X;N))$ для того, чтобы вычислить производящую функцию пространства когомологий конформной алгебры $\mathrm{ConfCom}(X;N)$ со скалярными коэффициентами.

Предложение 3 ([10]). *Базис Гребнера — Ширшова ассоциативной алгебры $A = \mathcal{A}_+(\mathrm{ConfCom}(X;N))$ при $X=\{a\}$ относительно лексикографического порядка на образующих $a(n)$, $n = 0,1,\dots$ состоит из однородных соотношений второй степени со старшими частями $a(n)a(m)$, где или $n>m$, или $n \geq (N+1)/2$ при любом $m\geq 0$.*

Заметим, что в коммутативной конформной алгебре значение функции локальности $N(a,a)$ всегда является нечетным числом.

Как и в предыдущем разделе, обозначим через $C(n,d)$ пространство, порожденное цепями Аника вида $[a(m_1)|a(m_2)|\dots|a(m_n)]$, у которых $\sum\limits_i m_i = d$. Тогда пространство когомологий конформной алгебры $\mathrm{ConfCom}(a;N)$ градуировано,

$$H^{\bullet}(\mathrm{ConfCom}(a;N),\Bbbk) = \bigoplus_{n\geq 1, d\geq 0} H(n,d),$$

где $H(n,d)$ — ядро оператора D^* на $C(n,d)$. При этом

$$\dim H(n,d) = \dim C(n,d) - \dim C(n,d-1).$$

Цель данного раздела — найти производящую функцию $\Phi(x,y)$ последовательности $\dim H(n,d)$, $n\geq 1$, $d \geq 0$, для свободной коммутативной конформной алгебры.

Теорема 2. *Для конформной алгебры* $\mathrm{ConfCom}(a;N)$ *производящая функция* $\Phi(x,y)$ *имеет вид*

$$\Phi(x,y) = -1+y+\left(\frac{(1-y)^2}{1-y-xy^{(N+1)/2}}\right)(1+x)(1+xy)(1+xy^2)\dots(1+xy^{(N-1)/2})$$

Доказательство. Определяющие соотношения, составляющие базис Грёбнера — Ширшова для алгебры $A = \mathcal{A}_+(\mathrm{ConfCom}(a;N))$, разбиваются на два класса: соотношения коммутативности и соотношения локальности. Старшие части соотношений коммутативности имеют вид $a(n)a(m)$, где $n > m$. Соотношения локальности, приведенные по модулю коммутативности, имеют старшие части $a(n)a(m)$, где $n \geq (N+1)/2$, $m \geq 0$. Следовательно, цепи Аника длины n для алгебры A имеют вид

$$[m_1|\dots|m_{n-t}|k_t|\dots|k_1], \quad m_i \geq (N+1)/2,\ k_1 < k_2 < \dots < k_t \leq (N-1)/2,$$

где $t \geq 0$. Согласно введенным выше обозначениям, количество таких цепей Аника, что $\sum_i m_i + \sum_j k_j = d$, равно $\dim C(n,d)$. Достаточно вычислить производящую функцию

$$\Psi(x,y) = \sum_{n\geq 1, d\geq 0} \dim C(n,d)x^n y^d,$$

поскольку $\Phi(x,y) = (1-y)\Psi(x,y)$.

Любая цепь Аника длины n и степени d может быть единственным образом представлена как объединение двух независимых частей: возрастающей последовательности $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_t \leq (N-1)/2$ длины $t \geq 0$ и произвольной последовательности $m_1,\dots,m_{n-t} \geq (N+1)/2$. Количество последних совпадает с рассмотренным выше числом $A_{(N+1)/2}(n-t,k)$, где $k = m_1 + \dots + m_{n-t}$. Производящая функция такой последовательности представлена в лемме 1.

Для фиксированного числа M обозначим через $Y_M(n,d)$ количество последовательностей $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq M$, $k_1 + \dots + k_n = d$. Тогда

$$\dim C(n,d) = \sum_{k\geq 0, t\geq 0} Y_{(N-1)/2}(t,d-k)A_{(N+1)/2}(n-t,k)$$

при $n \geq 1$. Эта же формула остается верной при $n = 0$, поскольку $Y_M(0,d) = A_N(0,d) = \delta_{d,0}$.

Легко видеть, что производящая функция последовательности $\dim C(n,d)$, $n \geq 1$, $d \geq 0$, выражается через произведение производящих функций двух последовательностей:

$$1 + \Psi(x,y) = Y_{(N-1)/2}(x,y)A_{(N+1)/2}(x,y),$$

где $Y_{(N-1)/2}(x,y)$ — производящая функция последовательности $Y_{(N-1)/2}(n,d)$, $n \geq 0$, $d \geq 0$.

Предложение 4. *Производящая функция* $Y_M(x,y)$ *целочисленной последовательности* $Y_M(n,d)$, $n \geq 0$, $d \geq 0$, *имеет вид многочлена*

$$Y_M(x,y) = (1+x)(1+xy)\dots(1+xy^M).$$

Доказательство. При $M = 0$ существует только одна непустая подходящая последовательность $m_1 = 0$. Таким образом, $Y_0(x,y) = 1 + x$.

При $M > 0$ представим

$$Y_M(k,t) = Y_{M-1}(k,t) + Y_{M-1}(k-1,t-M).$$

Действительно, последовательность целых чисел вида $M \ge m_1 > \dots > m_{k-1} > m_k \ge 0$, у которой $m_1 + \dots + m_k = t$, либо начинается на $m_1 \le M-1$, либо получается присоединением $m_1 = M$ к такой же последовательности из $k-1$ числа, ограниченной $m_2 \le M-1$.

Рассмотрим

$$Y_M^{(k)}(y) = \sum_{t\ge 0} Y_M(k,t) y^t.$$

Тогда

$$Y_M^{(k)}(y) = Y_{M-1}^{(k)}(y) + y^M Y_{M-1}^{(k-1)}(y).$$

Применяя эту рекуррентную формулу M раз, получим функциональное равенство

$$\begin{aligned} Y_M^{(k)} =& Y_{M-1}^{(k)} + y^M Y_{M-1}^{(k-1)} \\ =& Y_{M-2}^{(k)} + (y^{M-1} + y^M) Y_{M-2}^{(k-1)} + y^{M-1} y^M Y_{M-2}^{(k-2)} \\ =& \dots \\ =& Y_0^{(k)} + s_1 Y_0^{(k-1)} + s_2 Y_0^{(k-2)} + \dots + s_M Y_0^{(k-M)}, \end{aligned}$$

где $s_i = s_i(y, y^2, \dots, y^M)$ — элементарные симметрические многочлены от M переменных, вычисленные в точке $(y, y^2, \dots, y^M)$. Поскольку при $M = 0$ есть только два ненулевых слагаемых, получаем

$$Y_M^{(k)}(y) = s_k(y, y^2, \dots, y^M) + s_{k-1}(y, y^2, \dots, y^M).$$

Эта формула верна для всех $k \ge 0$, если принять естественное соглашение $s_0 = 1$, $s_{-1} = 0$, $s_k = 0$ при $k > M$.

Наконец,

$$\begin{aligned} Y_M(x,y) &= \sum_{k\ge 0} x^k Y_N^{(k)}(y) \\ &= 1 + x(s_1+1) + x^2(s_2+s_1) + \dots + x^M(s_M + s_{M-1}) + x^{M+1} s_M \\ &= 1 + xs_1 + \dots + x^M s_M + x(1 + xs_1 + \dots + x^M s_M) = (1+x)(1 + xs_1 + \dots + x^M s_M) \\ &= (1+x)(1+xy)(1+xy^2)\dots(1+xy^M), \end{aligned}$$

что и требовалось. $\square$

Завершим доказательство теоремы. По лемме 1 и предложению 4 получаем

$$1 + \Psi(x,y) = \left(\frac{1-y}{1-y-xy^{(N+1)/2}}\right)(1+x)(1+xy)(1+xy^2)\dots(1+xy^{(N-1)/2}),$$

откуда искомая формула следует ввиду $\Phi(x,y) = (1-y)\Psi(x,y)$. $\square$

Интересно сравнить вторую группу когомологий Хохшильда конформной алгебры $\mathrm{ConfCom}(a; N)$ и абелевой конформной алгебры Ли $L = \Bbbk[\partial]a$ ранга 1. Для последней группа $H^2(L, \Bbbk)$ когомологий редуцированного комплекса может быть легко вычислена по определению [4]:

$$H^2(L, \Bbbk) = \{ f \in \Bbbk[\lambda] \mid f(\lambda) \otimes_{\Bbbk[\partial]} 1 = -f(-\partial - \lambda) \otimes_{\Bbbk[\partial]} 1 \}.$$

Следовательно, элементы $H^2(L, \Bbbk)$ представлены многочленами вида

$$f(\lambda) = a_1\lambda + a_3\lambda^3 + \dots$$

с ненулевыми коэффициентами при нечетных степенях переменной.

Алгебра $\mathrm{ConfCom}(a;N)$ является универсальной обертывающей для L с локальностью N в смысле [10]. Как показано в [1], для конформных алгебр, вообще говоря, нет взаимно-однозначного соответствия между когомологиями алгебры Ли и ее универсальной обертывающей. Оказывается, что для абелевой конформной алгебры Ли некоторое соответствие все же имеется.

Пример 2. *Вычислим коэффициент при x^2 в формуле из теоремы 2:*

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(0,y) = y + y^3 + \cdots + y^{N-2} + \frac{y^N}{1-y}.$$

Таким образом, в классе ассоциативных алгебр с ограничением локальности N на образующем элементе центральные расширения алгебры $\mathrm{ConfCom}(a;N)$ *описываются элементами второй группы когомологий абелевой конформной алгебры ранга 1.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00504).

Список литературы

[1] Alhussein, H.; Kolesnikov, P.: Hochschild cohomology of the Weyl conformal algebra with coefficients in finite modules. J. Math. Phys. 64, no. 4, Paper No. 041701, 16 pp. (2023).

[2] Anick, D. J.: On the homology of associative algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 296, no. 2, 641–659 (1986).

[3] Bakalov, B., D' Andrea, A., Kac, V. G.: Theory of finite pseudoalgebras. Adv. Math. 162, 1–140 (2001).

[4] Bakalov, B., Kac, V.G., Voronov A.: Cohomology of conformal algebras. Comm. Math. Phys. 200, 561–589 (1999).

[5] Eilenberg, S.: Extensions of general algebras, Ann. Soc. Polon. Math. 21, 125–134 (1948).

[6] Forman, R.: A user's guide to discrete Morse theory. Sem. Loth. de Comb. 48 (2002).

[7] Jöllenbeck, M., Welker, V.: Minimal resolutions via algebraic discrete Morse theory. Mem. Am. Math. Soc. 197, no. 923 (2009).

[8] Kac, V. G.: Vertex Algebras for Beginners. Univ. Lect. Ser., 10, Am. Math. Soc., Providence, RI (1998).

[9] Roitman, M.: On free conformal and vertex algebras. J. Algebra 217, 496–527 (1999).

[10] Roitman, M.: Universal enveloping conformal algebras, Sel. Math. New Ser. 6, 319–345 (2000).

[11] Sköldberg, E.: Morse theory from an algebraic viewpoint. Trans. Amer. Math. Soc. 358, no. 1, 115–129 (2006).

Лопаткин Виктор Евгеньевич
Факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ
Покровский бульвар, д.11
Москва, Россия, 109028
Email address: wickktor@gmail.com