Когомологии Хохшильда свободной конформной алгебры
(В. Е. Лопаткин)
Отзыв рецензента

Теория когомологий для конформных алгебр Ли и ассоциативных конформных алгебр началась с работы Бакалова, Каца и Воронова (Comm. Math. Phys., 1999), где были, в частности, вычислены когомологии простых и полупростых конформных алгебр Ли конечного типа с коэффициентами в неприводимых модулях.

Необходимость вычисления когомологий Хохшильда для ассоциативных конформных алгебр была мотивирована задачами построения структурной теории таких алгебр с точным представлением конечного типа. Именно, вторая группа когомологий описывает нулевые расширения конформных алгебр (как и в случае обычных алгебр), поэтому ее тривиальность обеспечивает выполнение аналога теоремы Веддерберна–Мальцева об отщеплении радикала. Полное описание таких "отщепляющихся" полупростых алгебр было получено в 2019 (Колесников, Козлов, Comm. Math. Phys.) именно в терминах когомологий Хохшильда.

Вычисление высших (при $n > 2$) групп когомологий для конформных алгебр непосредственно по определению сопряжено со значительными техническими трудностями, поскольку понятия коцепи, коцикла и определение дифференциала весьма громоздки. В представленной работе мы видим опыт вычисления размерностей групп когомологий конформных алгебр со скалярными коэффициентами при помощи тонкой комбинаторной техники, основанной на дискретной алгебраической теории Морса. Отметим, что этот подход уже использовался для вычисления когомологий Хохшильда конформных алгебр в работе Алхуссейн, Колесников (J. Math. Phys., 2023), где были вычислены когомологии универсальной обертывающей ассоциативной конформной алгебры для алгебры Вирасоро. Данная работа, как мы укажем ниже, на самом деле имеет тесную связь с общей задачей о связи между когомологиями алгебр Ли и их обертывающих.

Случай, рассматриваемый в данной статье, можно считать модельным: все тонкости вычисления дифференциала Аника на соответствующем комплексе в случае свободных конформных алгебр элиминируются тем, что базис Грёбнера–Ширшова их алгебр коэффициентов состоит из однородных соотношений второй степени (Ройтман, J. Algebra, 1999). Поэтому для данного случая исследование когомологий редуцированного комплекса для конформной алгебры сводится к факторизации комплекса Хохшильда ее алгебры коэффициентов.

Отличительной особенностью данной работы является использование техники производящих функций, т.е., по сути, рядов Гильберта от двух переменных. Данная техника особенно полезна при изучении «больших» групп когомологий (бесконечной размерности), получающихся в конформном случае: внутренняя градуировка этих групп конечномерными пространствами отражает строение конформных коциклов, которые являются полиномиально-значными функциями и, следовательно, несут естественную градуировку по степеням этих многочленов. Данный подход, насколько мне известно, является новым и имеет хорошие перспективы применения в дальнейшем изучении конформных когомологий.

В работе содержатся два основных результата: производящая функция для размерностей групп когомологий свободной ассоциативной конформной алгебры с конечным числом порождающих и постоянной функцией локальности на порождающих элементах (теорема 1); аналогичная производящая функция для свободной коммутативной конформной алгебры с одним порождающим (теорема 2). Оба результата являются новыми и заслуживают опубликования.

К представленному тексту работы имеется два блока замечаний.

1. Опечатки и мелкие детали оформления

(1.1) В заглавии и колонитулах название статьи имеет странный вид, напоминающий оформление плаката художником-футуристом. По-видимому, это результат некорректной работы стилевого файла.

(1.2) В английской аннотации: «for a free associative...», «for a 1-generated ...».

(1.3) Первая строка введения: хотелось бы видеть ссылку на «хорошо известное» утверждение.

(1.4) Стр.2, строка 6: ... алгебры с одним образующим элементом. В следующем предложении это уточнение можно убрать.

(1.5) Стр.3, строка 11: через $A_\bullet(\Lambda)$ в работе обозначена резольвента Аника, а ведь на ней дифференциал содержит «крайние» слагаемые из формулы Хохшильда и не является тождественно нулевым. Здесь речь идет о комплексе Аника, компоненты которого — в точности пространства цепей с нулевым действием алгебры A.

(1.6) Стр.3, 3-я строка раздела 3: ... пространство C над полем $\Bbbk$ характеристики нуль.
Здесь же: ввести обозначение для $\mathbb{Z}_+$ (≥ 0?).

(1.7) Стр.4, строка 2: ссылка на соответствующую работу Эйленберга: S. Eilenberg, Extensions of general algebras, Ann. Soc. Polon. Math. 21 (1948), 125-134.

(1.8) Стр.4, строка -11: Стоит упомянуть, что элементы 1-й группы когомологий конформной алгебры описывают внешние дифференцирования, как и в классическом случае.

(1.9) В работе не используется нумерация формул. Если ее ввести, то многие моменты можно изложить понятнее и точнее. Так, последнюю формулу на стр. 4 предлагаю пометить как (1).

(1.10) Стр.5, строка 1: Нужно отметить, что этот подход уже использовался для конформных алгебр – в работе
Alhussein, H.; Kolesnikov, P., Hochschild cohomology of the Weyl conformal algebra with coefficients in finite modules, J. Math. Phys. 64 (2023), no. 4, Paper No. 041701, 16 pp.

(1.11) Стр.5: снова упоминание о тождественно нулевом дифференциале на резольвенте (ср. замечание 1.5).

(1.12) Стр.5, строка -5: вставить ...заданное формулой (1)...

(1.13) Стр.5, строка -2: данное правило работает в силу специфики строения цепей Аника для данного случая — слово, не являющееся цепью, под действием D^* дает линейную комбинацию слов, среди которых нет цепей.

(1.14) Стр.6: предлагаю пометить (2) формулу в теореме 1.

(1.15) Стр.6, 2-я строка доказательства: поскольку D^* сюръективно.
Здесь же: в описании цепей Аника обязательно добавить $m_1, \ldots, m_{n-1} \geq N$.

(1.16) Стр.6, строка -6: здесь y^d внутри скобок лишнее (этот множитель за скобкой).

(1.17) Вторую формулу на стр.7 предлагаю пометить (3).

(1.18) Стр.8, второй абзац снизу: «Любая цепь Аника...» – тут надо указать, что не просто состоит, а единственным образом может быть представлена в виде конкатенации двух частей.

(1.19) Стр.9, строка -7: надо дополнить соглашение условием $s_k = 0$ при $k > M$.

2. Дополнения и примеры.

В работе получены весьма общие результаты, которые можно и полезно верифицировать в частных случаях.

(2.1) Стр.7, после окончания док-ва теоремы 1: имеет смысл привести примеры вычисления H^1 и H^2.
Легко видеть, что коэффициент при x в $\Phi(x, y)$ равен m – действительно, все дифференцирования суть линейные функции на линейной оболочке порождающих, размерности m.
Чуть сложнее посчитать коэффициент при x^2 (см. приложенный файл): у меня получилось, с использованием (2), что $H(2, d) = \delta(d \geq N)$, т.е. в любом нетривиальном центральном расширении локальность порождающих увеличивается.

(2.2) Обоснование леммы 1 нельзя признать достаточным. Предлагаю привести соответствующую выкладку явно: как из (3) вывести (4), см. приложенный файл.

(2.3) Стр. 10: из теоремы 2 можно вывести результат о строении центральных расширений свободной коммутативной алгебры (см. приложенный файл). Оказывается, что при $d < N$ нетривиальные коциклы возникают только при нечетных значениях d. Это в точности соответствует когомологиям абелевой конформной алгебры Ли ранга 1 в смысле [3]! Таким образом, все когомологии абелевой алгебры продолжаются на ее универсальную обертывающую локальности N. Это красивое соответствие, которое не выполняется в общем случае (ср. с Alhussein, Kolesnikov для алгебры Вирасоро), достойно того, чтобы его отметить в виде отдельного примера.

Суммируя сказанное, считаю, что работа может быть опубликована после доработки.