

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том ??, стр. ???-??? (20??)
DOI 10.17377/semi.2015.12.xxx
16E40

УДК 512.664.2
MSC 17B69,

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА СВОБОДНОЙ КОНФОРМНОЙ
АЛГЕБРЫ

Проблемы
кодировки?

В. Е. ЛОПАТКИН

Аннотация. В работе вычислены производящие функции размерностей градуированных компонент пространств когомологий Хохшильда свободной ассоциативной конформной алгебры и 1-порожденной свободной коммутативной конформной алгебры со скалярными коэффициентами.

Ключевые слова: конформная алгебра, когомологии Хохшильда, производящая функция.

АБСТРАКТ. We explicitly compute generating functions for the dimensions of graded components of the Hochschild cohomology spaces for free associative conformal algebra and for 1-generated free commutative conformal algebra with scalar coefficients.

Keywords: conformal algebra, Hochschild cohomology, generating function.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что группы когомологий Хохшильда $H^n(F, \mathbb{k})$ свободной ассоциативной алгебры F над полем \mathbb{k} тривиальны при $n > 1$. Если же $F = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_m]$ — алгебра коммутативных многочленов от m переменных, то размерность пространства $H^n(F, \mathbb{k})$ равна $\binom{m}{n}$, градуированное кольцо таких когомологий изоморфно алгебре Грассмана с m порождающими.

В данной работе мы рассмотрим задачу отыскания (редуцированных) когомологий Хохшильда для свободных ассоциативных конформных алгебр при помощи резольвенты Аника положительной части алгебры коэффициентов.

Лопаткин В.Е., Когомологии Хохшильда свободной конформной алгебры.

© 2024 Лопаткин В.Е..

Received ???, published ???, 1, 20??.

ссылка?

В этом случае размерности групп когомологий бесконечны при $n > 1$, поэтому мы введем естественную градуировку и вычислим производящую функцию (от двух переменных) для последовательности размерностей компонент градуировки всех групп когомологий.

✓ с одним образующим элементом

Далее мы рассмотрим аналогичную задачу для свободной коммутативной конформной алгебры. Отметим, что даже линейный базис такой алгебры с ~~одним образующим элементом~~ в явном виде неизвестен. Тем не менее, нам достаточно имеющихся данных об алгебре коэффициентов свободной конформной алгебры для того, чтобы вычислить размерности компонент градуировки групп когомологий.

2. РЕЗОЛЬВЕНТА АНИКА КВАДРАТИЧНОЙ АЛГЕБРЫ

Пусть \mathbb{k} — некоторое поле, X — непустое множество, $\mathbb{k}\langle X \rangle_0$ — свободная ассоциативная алгебра (без единицы) с образующими элементами X , S — базис Грёбнера — Ширшова в $\mathbb{k}\langle X \rangle_0$, A — соответствующая фактор-алгебра $\mathbb{k}\langle X \rangle_0 / (S)$.

Тогда алгебра с единицей $\Lambda = \mathbb{k}\langle X \mid S \rangle$, порожденная множеством X с определяющими соотношениями S , является обогащенной (augmented) алгеброй с гомоморфизмом $\varepsilon : \Lambda \rightarrow \mathbb{k}$ таким, что $\varepsilon(x) = 0$ для $x \in X$. Мы можем представить Λ в виде $A \oplus \mathbb{k}1$.

Напомним, что (двусторонней) бар-резольвентой алгебры Λ называется точная последовательность Λ -бимодулей

$$0 \leftarrow \mathbb{k} \leftarrow \Lambda \otimes \Lambda \leftarrow B_1(\Lambda) := \Lambda \otimes A \otimes \Lambda \leftarrow \dots \leftarrow B_n(\Lambda) := \Lambda \otimes A^{\otimes n} \otimes \Lambda \leftarrow \dots,$$

в которой все морфизмы $B_{n+1}(\Lambda) \rightarrow B_n(\Lambda)$ определены по стандартному правилу:

$$\begin{aligned} [\alpha_1 | \dots | \alpha_{n+1}] &\mapsto \alpha_1 \otimes [\alpha_2 | \dots | \alpha_{n+1}] \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i [\alpha_1 | \dots | \alpha_i \alpha_{i+1} | \dots | \alpha_{n+1}] + (-1)^{n+1} [\alpha_1 | \dots | \alpha_n] \otimes \alpha_{n+1}. \end{aligned}$$

Здесь и далее мы используем стандартное обозначение $[x_1 | \dots | x_n]$ для тензора $x_1 \otimes \dots \otimes x_n \in A^{\otimes n}$.

Пусть M — некоторый A -бимодуль (следовательно, Λ -бимодуль). Комплекс Хохшильда алгебры A со значениями в M — это дуальный коцепной комплекс $C^\bullet(A, \mathbb{k}) = \text{Hom}_{\Lambda-\Lambda}(B_\bullet(\Lambda), M)$. Когомологии этого комплекса и есть когомологии Хохшильда алгебры A со значениями в M . Для нас основным будет случай $M = \mathbb{k}$ с бимодульным действием $\lambda \cdot 1 = 1 \cdot \lambda = \varepsilon(\lambda)1$.

Резольвента Аника [1] $A_\bullet(\Lambda)$ — другая свободная резольвента для Λ , она гомотопически эквивалентна бар-резольвенте $B_\bullet(\Lambda)$, поэтому когомологии коцепного комплекса $\text{Hom}(A_\bullet(\Lambda), \mathbb{k})$ такие же, как у комплекса Хохшильда.

Пространства $A_n(\Lambda)$, $n \geq 0$, составляющие резольвенту Аника, являются свободными Λ -бимодулями, порожденными т. н. $(n-1)$ -цепями Аника. В случае, когда базис Грёбнера — Ширшова алгебры состоит из квадратичных соотношений (именно с такими примерами мы будем работать далее), определение цепи Аника особенно просто.

Именно, пусть X — образующие алгебры $\Lambda = \mathbb{k}\langle X \rangle / (S)$, S — базис Грёбнера — Ширшова со старшими словами V длины 2. Тогда 0-цепи — это тензоры вида $[x]$, $x \in X$, 1-цепи — это тензоры вида $[x|y]$, где $x, y \in X$ и $xy \in V$. Далее,

n -цепью Аника для произвольного $n \geq 1$ являются тензоры $[x_1|x_2|\dots|x_{n+1}]$, $x_i \in X$, $x_i x_{i+1} \in V$. (Формально говоря, (-1) -цепь — это единственная пустая последовательность $[\]$.)

Построение дифференциала в резольвенте Аника

$$\delta_n : A_{n+1}(\Lambda) \rightarrow A_n(\Lambda)$$

непосредственно по определению из [1] сопряжено со значительными техническими трудностями. В работах [5] и [9] была предложена другая техника, основанная на дискретной алгебраической теории Морса [4], позволяющая вычислить дифференциал Аника в явном виде.

В частности, если S состоит из однородных многочленов, то дифференциал Аника в комплексе $A_\bullet(\Lambda)$ тождественно нулевой и вычисление размерностей групп когомологий сводится к подсчету цепей Аника.

на резольвенте??

3. КОНФОРМНЫЕ АЛГЕБРЫ И ИХ КОГОМОЛОГИИ

Приведем основные определения, относящиеся к теории (ассоциативных) конформных алгебр и их когомологий, следуя [6] и [3].

Конформной алгеброй называется векторное пространство C с линейным оператором ∂ и бесконечным семейством билинейных операций $(\cdot)_{(n)} \cdot$, $n \in \mathbb{Z}_+$, при условии, что выполнены следующие аксиомы.

(C1) Для любых $a, b \in C$ найдется $N = N(a, b) \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $(a)_{(n)} b = 0$ при всех $n \geq N$.

(C2) Для всех $a, b \in C$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ выполняются равенства

$$(\partial a)_{(n)} b = -n(a)_{(n-1)} b, \quad (a)_{(n)} \partial b = \partial(a)_{(n)} b + n(a)_{(n-1)} b.$$

Любая конформная алгебра C может быть представлена как подпространство в пространстве *формальных распределений* (бесконечных в обе стороны формальных степенных рядов) над некоторой обычной алгеброй A , т. е.

$$C \subset A[[z, z^{-1}]],$$

причем оператор ∂ при этом вложении соответствует формальному дифференцированию по z , а операция $(\cdot)_{(n)} \cdot$ на формальных распределениях выражается следующим образом:

$$(a(z))_{(n)} b(z) = \operatorname{Res}_{w=0} a(w)b(z)(w-z)^n,$$

где w — новая формальная переменная, а $\operatorname{Res}_{w=0}$ означает, как обычно, сумму всех членов (зависящих от z) при w^{-1} .

Среди всех таких алгебр A можно выделить единственную (с точностью до изоморфизма) универсальную, которая называется *алгеброй коэффициентов* $\mathcal{A}(C)$ конформной алгебры C . Конформная алгебра называется ассоциативной (или коммутативной), если такова ее алгебра коэффициентов [7].

Пусть C — конформная алгебра, $\mathcal{A}(C)$ — ее алгебра коэффициентов, в частности, $C \subset \mathcal{A}(C)[[z, z^{-1}]]$: каждый элемент $a \in C$ каноническим образом представлен формальным рядом

$$a(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a(m)z^{-m-1}, \quad a(m) \in \mathcal{A}(C).$$

Тогда множество всех коэффициентов $a(m)$ при $a \in C$, $m \geq 0$ является подалгеброй в $\mathcal{A}(C)$, которая обозначается $\mathcal{A}_+(C)$.

над полем к характеристике нуль

wtf?

Понятие бимодуля над ассоциативной конформной алгеброй C определяется в полном соответствии с общим принципом, восходящим к Эйленбергу на векторном пространстве M должны быть заданы оператор ∂ и два семейства билинейных операций

$$(\cdot \underset{(n)}{\cdot}) : C \otimes M \rightarrow M, \quad M \otimes C \rightarrow M$$

такие, что формальная прямая сумма $C \oplus M$ с естественно определенными операциями (полагаем $M \underset{(n)}{M} = 0$) является ассоциативной конформной алгеброй.

Пусть C — ассоциативная конформная алгебра, M — бимодуль над C . Мы не приводим громоздких определений базового и редуцированного комплексов Хохшильда для C со значениями в M (их можно найти в [3]), поскольку для наших задач достаточно следующего наблюдения из той же статьи.

Бимодуль M над ассоциативной конформной алгеброй C всегда является бимодулем (в обычном смысле) над алгеброй $A = \mathcal{A}_+(C)$. Рассмотрим пространства $C_0^n(A, M)$, $n \geq 1$, состоящие из всех таких линейных функций $f : A^{\otimes n} \rightarrow M$, что для любых данных $a_1, \dots, a_n \in C$ значение $f(a_1(m_1), \dots, a_n(m_n))$ не равно нулю только для конечного числа наборов чисел $m_1, \dots, m_n \geq 0$. Тогда $C_0^\bullet(A, M)$ — подкомплекс в комплексе Хохшильда $C^\bullet(A, M)$.

Для $A = \mathcal{A}_+(C)$ рассмотрим отображение $D : C^n(A, M) \rightarrow C^n(A, M)$, определенное следующим образом:

$$(Df)(a_1(m_1), \dots, a_n(m_n)) = \partial f(a_1(m_1), \dots, a_n(m_n)) - \sum_{i=1}^n m_i f(a_1(m_1), \dots, a_i(m_i - 1), \dots, a_n(m_n)).$$

Нетрудно заметить, что $DC_0^n(A, M) \subset C_0^n(A, M)$ и отображение D перестановочно с дифференциалом Хохшильда. Следовательно, образ $DC_0^\bullet(A, M)$ — подкомплекс в $C_0^\bullet(A, M)$.

Предложение 1 ([3]). Для ассоциативной конформной алгебры C базовый комплекс $\tilde{C}^\bullet(C, M)$ изоморфен комплексу $C_0^\bullet = C_0^\bullet(\mathcal{A}_+(C), M)$, а редуцированный комплекс $C^\bullet(C, M)$ изоморфен фактору C_0^\bullet/DC_0^\bullet .

Заметим, что именно когомологии редуцированного комплекса являются (с категорной точки зрения, см. [2]) «правильным» обобщением классических когомологий Хохшильда на конформные алгебры. Так, например, элементы 2-й группы когомологий $H^2(C, \mathbb{k})$ редуцированного комплекса ассоциативной конформной алгебры C при $M = \mathbb{k}$ (скалярный бимодуль с нулевым действием) находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами эквивалентности 1-мерных центральных расширений конформной алгебры C .

Случай $M = \mathbb{k}$ с нулевым действием и $\partial = 0$ имеет еще одну особенность: в этом случае оператор D , определенный выше, D является сопряженным к морфизму Λ -бимодулей ($\Lambda = A \oplus \mathbb{k}1$)

$$D^* : B_\bullet(\Lambda) \rightarrow B_\bullet(\Lambda),$$

заданному очевидным образом:

$$D^* : [a_1(m_1) | \dots | a_n(m_n)] = - \sum_{i=1}^n m_i [a_1(m_1) | \dots | a_i(m_i - 1) | \dots | a_n(m_n)].$$

ссылка?

S. Eilenberg, Extensions of general algebras, Ann. Soc. Polon. Math. 21 (1948), 125-134.

$H^1(C, M)$

1-я группа = внешние дифференциалы $C \rightarrow M$

(1)

Отсюда вытекает следующий подход к вычислению $C^\bullet(C, \mathbb{k})$. Строим резольвенту Аника для $\Lambda = A \oplus \mathbb{k}1$ с обогащением $\varepsilon(A) = 0$, где $A = \mathcal{A}_+(C)$. Для свободных конформных алгебр, как мы увидим, дифференциалы Аника тождественно нулевые. Находим отображение $D^* : A_\bullet(\Lambda) \rightarrow A_\bullet(\Lambda)$, соответствующее морфизму бар-резольвенты при гомотопической эквивалентности. Тогда элементы кообраза D находятся в естественном взаимно-однозначном соответствии с элементами ядра D^* на резольвенте Аника (соответствие Фредгольма). Таким образом, нам достаточно изучить строение ядер отображения D^* на пространствах цепей Аника.

на резольвенте?

4. СВОБОДНАЯ АССОЦИАТИВНАЯ КОНФОРМНАЯ АЛГЕБРА

Пусть X — непустое множество и $N : X \times X \rightarrow \mathbb{Z}_+$ — некоторая функция. Тогда, согласно [7], существует единственная с точностью до изоморфизма ассоциативная конформная алгебра, порожденная множеством X и универсальная в классе всех таких алгебр, у которых

$$x \binom{(n)}{y} = 0 \text{ для всех } n \geq N(x, y),$$

при $x, y \in X$. Обозначим эту конформную алгебру $\text{ConfAs}(X; N)$, ее естественно называть свободной ассоциативной конформной алгеброй с множеством образующих X и ограничением на локальность образующих N .

Предложение 2 ([7]). Пусть $N(x, y) = N = \text{const}$ для всех $x, y \in X$. Тогда множество соотношений

$$\sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{N}{s} x(n-s)y(m+s) = 0,$$

$x, y \in X$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq N$, является базисом Грёбнера — Ширшова для $\mathcal{A}_+(\text{ConfAs}(X; N))$.

Поскольку базис Грёбнера — Ширшова алгебры $A = \mathcal{A}_+(C)$ для свободной ассоциативной конформной алгебры $C = \text{ConfAs}(X; N)$ состоит из однородных соотношений степени 2, мы легко найдем явный вид цепей Аника для этой алгебры, а дифференциал Аника тождественно равен нулю.

Следствие 1. Пространство $(n-1)$ -цепей Аника $C(n)$ для $\mathcal{A}_+(\text{ConfAs}(X; N))$ разлагается в прямую сумму

$$C(n) = \bigoplus_{d \geq 0} C(n, d),$$

где $C(n, d)$ — линейная оболочка всех таких тензоров

$$[x_1(m_1)|x_2(m_2)|\dots|x_n(m_n)],$$

у которых $x_i \in X$, $m_1, \dots, m_{n-1} \geq N$, $m_i \in \mathbb{Z}_+$, $\sum_{i=1}^n m_i = d$. заданное формулой (1)

Отображение D^* , описанное в предыдущем разделе, действует из $C(n, d)$ в $C(n, d-1)$ по следующему правилу:

$$D^*[x_1(m_1)|\dots|x_n(m_n)] = - \sum_{i=1}^n m_i [x_1(m_1)|\dots|x_i(m_i-1)|\dots|x_n(m_n)],$$

причем слагаемые, не являющиеся цепями из $C(n, d-1)$, попросту опускаются. Пространство когомологий редуцированного комплекса конформной алгебры

не-цепь после D^* не дает цепи!

$C = \text{ConfAs}(X; N)$ со значениями в скалярном модуле наследует градуировку пространства $C(n)$:

$$H^n(C, \mathbb{k}) = \bigoplus_{d \geq 0} H(n, d),$$

где $H(n, d) = \ker D^*|_{C(n, d)}$.

Цель данного раздела — вычислить производящую функцию последовательности $\dim H(n, d)$, равную формальному ряду

$$\Phi(x, y) = \sum_{n \geq 1, d \geq 0} \dim H(n, d) x^n y^d.$$

Теорема 1. Пусть $|X| = m$, $N(x, y) = N = \text{const}$ для всех $x, y \in X$. Тогда производящая функция $\Phi(x, y)$ последовательности $\dim H(n, d)$ равна

$$\Phi(x, y) = mx \frac{1 - y}{1 - y - mxy^N}. \tag{2}$$

Доказательство. Поскольку отображение D^* действует из $C(n, d)$ в $C(n, d-1)$, мы имеем $\dim H(n, d) = \dim \ker D^* = \dim C(n, d) - \dim C(n, d-1)$. Подсчитаем $C(n, d)$.

поскольку D^* , очевидно, сюръективно

При $n = 1$ все цепи Аника из $C(1, d)$ имеют вид $[x(d)]$, $x \in X$, поэтому $\dim C(1, d) = m$ для всех $d \geq 0$. Таким образом, $\dim H(1, d) = m\delta_{d,0}$.

При $n > 1$ цепь Аника из $C(n, d)$ имеет вид $[x_1(m_1)| \dots | x_{n-1}(m_{n-1})| x_n(s)]$, где $x_i \in X$, $s \geq 0$, $m_1 + \dots + m_{n-1} = d - s$. Число таких цепей нетрудно подсчитать:

$m_1, \dots, m_{n-1} \geq N$,

$$\dim C(n, d) = m^n \sum_{s \geq 0} A_N(n-1, d-s),$$

где $A_N(n, d)$ — число размещений d одинаковых шаров по n различным ящикам так, чтобы в каждом ящике было не менее N шаров. Очевидно, что

$$A_N(n, d) = \begin{cases} A_1(n, d - (N-1)n), & d \geq nN, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Хорошо известно (т. н. «метод перегородок»), что $A_1(n, d) = \binom{d-1}{n-1}$.

Обозначим через $\Psi(x, y)$ производящую функцию целочисленной последовательности $\dim C(n, d)$, $n \geq 1, d \geq 0$:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= \sum_{n \geq 1, d \geq 0} \dim C(n, d) x^n y^d \\ &= \sum_{d \geq 0} \left(mx y^d + \sum_{n \geq 2} \sum_{s \geq 0} m^n A_N(n-1, d-s) x^n \right) y^d \\ &= mx \left(\sum_{d \geq 0} y^d \right) + \sum_{n \geq 2} (mx)^n \left(\sum_{j \geq 0} A_N(n-1, j) y^j \right) \left(\sum_{s \geq 0} y^s \right) \\ &= \frac{1}{1-y} \left(mx + \sum_{n \geq 2} (mx)^n \left(\sum_{j \geq 0} A_N(n-1, j) y^j \right) \right). \end{aligned}$$

Здесь мы сделали замену индекса $j = d - s$.

Заметим, что искомая функция Φ может быть выражена через Ψ :

$$\Phi(x, y) = \sum_{n \geq 1, d \geq 0} (C(n, d) - C(n, d-1)) x^n y^d = (1-y)\Psi(x, y)$$

Следовательно,

$$\Phi(x, y) = mx + \sum_{n \geq 2} (mx)^n \left(\sum_{j \geq 0} A_N(n-1, j) y^j \right).$$

В правой части этого равенства суммирование по j достаточно проводить для $j \geq N(n-1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} A_N(n-1, j) y^j &= \sum_{j \geq N(n-1)} \binom{j - N(n-1) + n - 2}{n-2} y^j \\ &= \sum_{s \geq 0} \binom{s + n - 2}{n-2} y^{s + N(n-1)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $s = j - N(n-1)$. Сдвигая индекс n , окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= mx + \sum_{n \geq 0} (mx)^{n+2} \sum_{s \geq 0} \binom{s+n}{n} y^{s+N(n+1)} \\ &= mx + (mx)^2 y^N \sum_{n, s \geq 0} \binom{n+s}{n} (mxy^N)^n y^s \\ &= mx + \frac{(mx)^2 y^N}{1-y-mxy^N} = mx \frac{1-y}{1-y-mxy^N}, \end{aligned}$$

что и требовалось. \square

Следующая лемма вытекает из приведенного доказательства и понадобится нам в последующем.

Лемма 1. Производящая функция последовательности $A_N(n, d)$, $n \geq 0$, $d \geq 0$, имеет вид

$$A_N(x, y) = \sum_{n \geq 0, d \geq 0} A_N(n, d) x^n y^d = 1 + \frac{xy^N}{1-y-xy^N} = \frac{1-y}{1-y-xy^N}. \quad (4)$$

Действительно, для получения этой формулы достаточно прибавить слагаемое $A_N(0, 0) = 1$ к формуле, полученной в ходе вывода $\Phi(x, y)$.

5. СВОБОДНАЯ КОММУТАТИВНАЯ КОНФОРМНАЯ АЛГЕБРА С ОДНИМ ПОРОЖДАЮЩИМ

Рассмотрим конформную алгебру $\text{ConfCom}(X; N)$, универсальную в классе всех коммутативных конформных алгебр, порожденных множеством X с ограничением на локальность образующих $N : X \times X \rightarrow \mathbb{Z}_+$. Строение такой алгебры даже при $|X| = 1$ до конца не ясно: неизвестен линейный базис такой алгебры. Однако мы можем использовать результат работы [8] об алгебре $A = \mathcal{A}_+(\text{ConfCom}(X; N))$ для того, чтобы вычислить производящую функцию пространства когомологий конформной алгебры $\text{ConfCom}(X; N)$ со скалярными коэффициентами.

Предложение 3 ([8]). Базис Гребнера — Ширшова ассоциативной алгебры $A = \mathcal{A}_+(\text{ConfCom}(X; N))$ при $X = \{a\}$ относительно лексикографического порядка на образующих $a(n)$, $n = 0, 1, \dots$ состоит из однородных соотношений второй степени со старшими частями $a(n)a(m)$, где или $n > m$, или $n \geq (N+1)/2$ при любом $m \geq 0$.

Записать подробнее: используя (3)

Пример
 $H^2(C, \mathbb{R})$

все нетрив.
центр расширения
увеличивают
локальность

$$\Phi = mx \frac{1-y}{1-xy^N-y}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \sum_{d \geq 0} \dim H(2, d) y^d$$

$$\Phi' = m \frac{1-y}{1-y-xy^N} + mx \frac{(1-y)y^N}{(1-xy^N-y)^2}$$

$$\Phi'' \Big|_{x=0} = \frac{m^2(1-y)y^N}{(1-y)^2} + 0 + m^2 \frac{(1-y)y^N}{(1-y)^2} = 2m^2 \frac{y^N}{1-y}$$

$$\Rightarrow \dim H(2, d) = \begin{cases} m^2, & d \geq N \\ 0, & d < N \end{cases}$$

неприв. 2-коэффициенты: $\varphi_\lambda(e_i, e_j) = c_{ij} \lambda^d \quad \forall (e_{ij})$
 $m \times m$
 матрицы

$$(3) \Rightarrow \sum_{n \geq 0, d \geq 0} A_\nu(n, d) x^n y^d = 1 + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ s \geq 0}} \binom{n+s-1}{n-1} y^{s+Nn} x^n$$

$$= 1 + \sum_{\substack{n \geq 0 \\ s \geq 0}} \binom{n+s}{n} y^s (xy^N)^{n+1} = 1 + xy^N \frac{1}{1-y-xy^N}$$

$$= \frac{1-y}{1-y-xy^N}$$

Заметим, что в коммутативной конформной алгебре значение функции локальности $N(a, a)$ всегда является нечетным числом.

Как и в предыдущем разделе, обозначим через $C(n, d)$ пространство, порожденное цепями Аника вида $[a(m_1)|a(m_2)|\dots|a(m_n)]$, у которых $\sum_i m_i = d$. Тогда пространство когомологий конформной алгебры $\text{ConfCom}(a; N)$ градуировано,

$$H^\bullet(\text{ConfCom}(a; N), \mathbb{k}) = \bigoplus_{n \geq 1, d \geq 0} H(n, d),$$

где $H(n, d)$ — ядро оператора D^* на $C(n, d)$. При этом

$$\dim H(n, d) = \dim C(n, d) - \dim C(n, d - 1).$$

Цель данного раздела — найти производящую функцию $\Phi(x, y)$ последовательности $\dim H(n, d)$, $n \geq 1, d \geq 0$, для свободной коммутативной конформной алгебры.

Теорема 2. Для конформной алгебры $\text{ConfCom}(a; N)$ производящая функция $\Phi(x, y)$ имеет вид

$$\Phi(x, y) = -1 + y + \left(\frac{(1 - y)^2}{1 - y - xy^{(N+1)/2}} \right) (1 + x)(1 + xy)(1 + xy^2) \dots (1 + xy^{(N-1)/2})$$

Доказательство. Определяющие соотношения, составляющие базис Грёбнера — Ширшова для алгебры $A = \mathcal{A}_+(\text{ConfCom}(a; N))$, разбиваются на два класса: соотношения коммутативности и соотношения локальности. Старшие части соотношений коммутативности имеют вид $a(n)a(m)$, где $n > m$. Соотношения локальности, приведенные по модулю коммутативности, имеют старшие части $a(n)a(m)$, где $n \geq (N + 1)/2, m \geq 0$. Следовательно, цепи Аника длины n для алгебры A имеют вид

$$[m_1 | \dots | m_{n-t} | k_t | \dots | k_1], \quad m_i \geq (N + 1)/2, \quad k_1 < k_2 < \dots < k_t \leq (N - 1)/2,$$

где $t \geq 0$. Согласно введенным выше обозначениям, количество таких цепей Аника, что $\sum_i m_i + \sum_j k_j = d$, равно $\dim C(n, d)$. Достаточно вычислить производящую функцию

$$\Psi(x, y) = \sum_{n \geq 1, d \geq 0} \dim C(n, d) x^n y^d,$$

поскольку $\Phi(x, y) = (1 - y)\Psi(x, y)$.

Любая цепь Аника длины n и степени d состоит из двух независимых частей: возрастающей последовательности $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_t \leq (N - 1)/2$ длины $t \geq 0$ и произвольной последовательности $m_1, \dots, m_{n-t} \geq (N + 1)/2$. Количество последних совпадает с рассмотренным выше числом $A_{(N+1)/2}(n - t, k)$, где $k = m_1 + \dots + m_{n-t}$. Производящая функция такой последовательности представлена в лемме 1. **числа**

Для фиксированного M обозначим через $Y_M(n, d)$ количество последовательностей $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq M, k_1 + \dots + k_n = d$. Тогда

$$\dim C(n, d) = \sum_{k \geq 0, t \geq 0} Y_{(N-1)/2}(t, d - k) A_{(N+1)/2}(n - t, k)$$

при $n \geq 1$. Эта же формула остается верной при $n = 0$, поскольку $Y_M(0, d) = A_N(0, d) = \delta_{d,0}$.

может быть единственным образом представлена как конкатенация

Легко видеть, что производящая функция последовательности $\dim C(n, d)$, $n \geq 1$, $d \geq 0$, выражается через произведение производящих функций двух последовательностей:

$$1 + \Psi(x, y) = Y_{(N-1)/2}(x, y)A_{(N+1)/2}(x, y),$$

где $Y_{(N-1)/2}(x, y)$ — производящая функция последовательности $Y_{(N-1)/2}(n, d)$, $n \geq 0$, $d \geq 0$.

Предложение 4. Производящая функция $Y_M(x, y)$ целочисленной последовательности $Y_M(n, d)$, $n \geq 0$, $d \geq 0$, имеет вид многочлена

$$Y_M(x, y) = (1+x)(1+xy)\dots(1+xy^M).$$

Доказательство. При $M = 0$ существует только одна непустая подходящая последовательность $m_1 = 0$. Таким образом, $Y_0(x, y) = 1 + x$.

При $M > 0$ представим

$$Y_M(k, t) = Y_{M-1}(k, t) + Y_{M-1}(k-1, t-M).$$

Действительно, последовательность целых чисел вида $M \geq m_1 > \dots > m_{k-1} > m_k \geq 0$, у которой $m_1 + \dots + m_k = t$, либо начинается на $m_1 \leq M-1$, либо получается присоединением $m_1 = M$ к такой же последовательности из $k-1$ числа, ограниченной $m_2 \leq M-1$.

Рассмотрим

$$Y_M^{(k)}(y) = \sum_{t \geq 0} Y_M(k, t)y^t.$$

Тогда

$$Y_M^{(k)}(y) = Y_{M-1}^{(k)}(y) + y^M Y_{M-1}^{(k-1)}(y).$$

Применяя эту рекуррентную формулу M раз, получим функциональное равенство

$$\begin{aligned} Y_M^{(k)} &= Y_{M-1}^{(k)} + y^M Y_{M-1}^{(k-1)} \\ &= Y_{M-2}^{(k)} + (y^{M-1} + y^M) Y_{M-2}^{(k-1)} + y^{M-1} y^M Y_{M-2}^{(k-2)} \\ &= \dots \\ &= Y_0^{(k)} + s_1 Y_0^{(k-1)} + s_2 Y_0^{(k-2)} + \dots + s_M Y_0^{(k-M)}, \end{aligned}$$

где $s_i = s_i(y, y^2, \dots, y^M)$ — элементарные симметрические многочлены от M переменных, вычисленные в точке (y, y^2, \dots, y^M) . Поскольку при $M = 0$ есть только два ненулевых слагаемых, получаем

$$Y_M^{(k)}(y) = s_k(y, y^2, \dots, y^M) + s_{k-1}(y, y^2, \dots, y^M).$$

Эта формула верна для всех $k \geq 0$, если принять естественное соглашение $s_0 = 1$, $s_{-1} = 0$, **$s_k = 0$ при $k > M$.**

Наконец,

$$\begin{aligned} Y_M(x, y) &= \sum_{k \geq 0} x^k Y_N^{(k)}(y) \\ &= 1 + x(s_1 + 1) + x^2(s_2 + s_1) + \dots + x^M(s_M + s_{M-1}) + x^{M+1}s_M \\ &= 1 + xs_1 + \dots + x^M s_M + x(1 + xs_1 + \dots + x^M s_M) = (1+x)(1 + xs_1 + \dots + x^M s_M) \\ &= (1+x)(1+xy)(1+xy^2)\dots(1+xy^M), \end{aligned}$$

что и требовалось. \square

Завершим доказательство теоремы. По лемме 1 и предложению 4 получаем

$$1 + \Psi(x, y) = \left(\frac{1-y}{1-y-xy^{(N+1)/2}} \right) (1+x)(1+xy)(1+xy^2) \dots (1+xy^{(N-1)/2}),$$

откуда искомая формула следует ввиду $\Phi(x, y) = (1-y)\Psi(x, y)$. \square

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00504).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Anick, D. J.: On the homology of associative algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 296, no. 2, 641–659 (1986).
- [2] Bakalov, B., D' Andrea, A., Кас, V. G.: Theory of finite pseudoalgebras. Adv. Math. 162, 1–140 (2001).
- [3] Bakalov, B., Кас, V.G., Voronov A.: Cohomology of conformal algebras. Comm. Math. Phys. 200, 561–589 (1999).
- [4] Forman, R.: A user's guide to discrete Morse theory. Sem. Loth. de Comb. 48 (2002).
- [5] Jöllenbeck, M., Welker, V.: Minimal resolutions via algebraic discrete Morse theory. Mem. Am. Math. Soc. 197, no. 923 (2009).
- [6] Кас, V. G.: Vertex Algebras for Beginners. Univ. Lect. Ser., 10, Am. Math. Soc., Providence, RI (1998).
- [7] Roitman, M.: On free conformal and vertex algebras. J. Algebra 217, 496–527 (1999).
- [8] Roitman, M.: Universal enveloping conformal algebras, Sel. Math. New Ser. 6, 319–345 (2000).
- [9] Sköldbёrg, E.: Morse theory from an algebraic viewpoint. Trans. Amer. Math. Soc. 358, no. 1, 115–129 (2006).

Лопаткин Виктор Евгеньевич
 Факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ
 Покровский бульвар, д.11
 Москва, Россия, 109028
 Email address: wickktor@gmail.com

Пример
 $H(2, d)$:
 при $d < N$
 — есть ли
 ненулевые?
 если есть, то
 какие?

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(0, y) = (1-y) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(0, y) \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{(1-y)y^{N+1/2}}{(1-y-xy^{N+1/2})^2} (1+x)(1+xy) \dots (1+xy^{N-1/2})$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{y^{N+1/2}}{1-y} + \sum_{i=0}^{N-1/2} y^i = \frac{y^{N+1/2} + 1-y^{N+1/2}}{1-y} + \frac{1-y}{1-y-xy^{N+1/2}} \left(\sum_{i=0}^{N-1/2} y^i (1+x) \dots (1+xy^{N-1/2}) \right)$$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(0, y) = 1$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(0, y) = \frac{2y^{N+1}(1-y)}{(1-y)^3} \cdot 1 + \frac{(1-y)y^{N+1/2}}{(1-y)^2} \left(\sum_{i=0}^{N-1/2} y^i \right) + \frac{(1-y)y^{N+1/2}}{(1-y)^2} \left(\sum_{i=0}^{N-1/2} y^i \right) + 1 \cdot \left(\sum_{i \neq j=0}^{N-1/2} y^i y^j \right)$$

$$= \frac{2 y^{N+1}}{(1-y)^2} + \frac{2 y^{N+1/2} \cdot \frac{1-y^{N+1/2}}{1-y}}{1-y} + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq \frac{N-1}{2}} y^{i+j}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(0, y) = \frac{y^{N+1}}{(1-y)^2} + \frac{y^{N+1/2} - y^{N+1}}{(1-y)^2} + \sum_{0 \leq i < j \leq \frac{N-1}{2}} y^{i+j}$$

$x(1-y)$:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(0, y) = \frac{y^{N+1/2}}{1-y} + (1-y) \sum_{0 \leq i < j \leq \frac{N-1}{2}} y^{i+j}$$

$$\begin{array}{l} 1x \\ -yx \end{array} \left| \begin{array}{ccccccc} i=0 & i=1 & & \dots & i=\frac{N-5}{2} & & i=N-3/2 \\ \sum_{j=1}^{N-1/2} y^j & + \sum_{j=2}^{N-1/2} y^{j+1} & + \sum_{j=3}^{N-1/2} y^{j+2} & + \dots & + (y^{N-4} + y^{N-3}) & + y^{N-2} & \\ & - \sum_{j=1} y^{j+1} & - \sum_{j=2}^{N-1/2} y^{j+2} & & & & - (y^{N-3} + y^{N-2}) \\ & & & & & & - y^{N-1} \end{array} \right.$$

$$= \sum_{j=1}^{N-1/2} y^j - y^2 - y^4 - \dots - y^{N-3}$$

Итого:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(0, y) = \left(y^{N+1/2} + y^{N+3/2} + \dots \right) + y + y^2 + \dots + y^{N-1/2} - y^2 - y^4 - \dots - y^{N-3} = y + y^3 + y^5 + \dots + y^{N-2} + y^N + \dots$$