

О ЧИСЛЕ УЗЛОВ
С ЗАДАНЫМ ДУГОВЫМ ИНДЕКСОМ

А.В. МАЛЮТИН, М.Н. СТУПАКОВ

Abstract: It is proved that for $k \geq 5$, the number A_k of oriented knot types with arc index at most k is at least $n!$, where n is the integer part of $(k+4)/11$. In particular, if $k \geq 5$, then $A_k > (k/22)^{k/22}$, while if $k \geq 10^7$, then $A_k > (k/12)^{k/12}$.

Keywords: Alexander closure, knot, link, arc index, braid group, manifold, JSJ decomposition, solid torus, incompressible surface, foliation, fibering, isotopy, homotopy, homeotopy, hyperbolic.

1 Введение

Мы исследуем структуру и статистические характеристики множества классических ручных узлов и зацеплений, включая глобальные и локальные свойства графов преобразований узлов и скорость роста числа узлов относительно различных мер сложности (см. [24, 5, 6, 2] и приведенную там литературу, а также список литературы в данной статье).

MALYUTIN, A.V., STUPAKOV, M.N., ON THE NUMBER OF KNOTS WITH A GIVEN ARC INDEX.

© 2024 Малютин А.В., Ступаков М.Н.

Работа выполнена в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2022-289 от 06/04/2022).

Данная работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Поступила 1 января 2023? г., опубликована 31 декабря 2023? г.

В настоящей работе получены оценки на скорость роста числа простых узлов по отношению к дуговому индексу узла.

Теорема 1. При $k \geq 5$ число A_k изотопических классов ориентированных простых узлов в $\mathbb{R}^3 \subset S^3$, дуговой индекс которых не превышает k , составляет по меньшей мере $n!$, где n – целая часть числа $(k+4)/11$. В частности, при $k \geq 5$ выполняется неравенство $A_k > (k/22)^{k/22}$, а при $k \geq 10^7$ выполняется неравенство $A_k > (k/12)^{k/12}$.

Мы доказываем теорему 1 с помощью так называемых *усложненных Александеровских замыканий* кос, – конструкций, сопоставляющих элементам групп кос узлы и зацепления. Как и классическое Александеровское замыкание, усложненные замыкания имеют ясно выраженный геометрический смысл и являются липшицевыми отображениями по отношению к словарным метрикам на группах кос и их графах Кэли и метрике вложенных перестроек на множестве узлов и зацеплений и соответствующем гордиевом графе. При этом, в отличие от Александеровского замыкания, дающего сюръективное отображение из множества кос в множество зацеплений (теорема Александера [1]) и склеивающего классы сопряженности (и не только), специальным образом сконструированные усложненные Александеровские замыкания сюръективного отображения не дают, но инъективны на крашенных косах (предложение 1, раздел 4.1). Эта инъективность и позволяет получать оценки на скорость роста числа узлов. Центральными моментами настоящей работы являются описание примера усложненного Александеровского замыкания (раздел 2) и доказательство его инъективности (раздел 4.1).

2 Усложненное Александеровское замыкание: определение отображения $f_n: PB_n \rightarrow \mathcal{K}$

В настоящем разделе для произвольного $n \geq 3$ определяется отображение $f_n: PB_n \rightarrow \mathcal{K}$ из группы крашенных кос PB_n на n нитях в множество \mathcal{K} классов объемлемо изотопных ориентированных узлов в трехмерной сфере S^3 . Образ $f_n(\beta)$ косы $\beta \in PB_n$ мы называем *усложненным Александеровским замыканием* косы β . На геометрическую конструкцию, дающую отображение f_n , как и на само это отображение, мы также ссылаемся как на *усложненное Александеровское замыкание*.

Предварим определение отображения f_n обсуждением общей идеи, лежащей в основе конструкции усложненных Александеровских замыканий. Напомним, что у алгебраических кос из групп B_1, B_2, \dots имеется стандартная геометрическая реализация в виде наборов «нитей» в цилиндре $D^2 \times [0, 1]$, а классическое Александеровское замыкание косы можно представлять себе как зацепление, получающееся в результате

отображения этого цилиндра (с содержащимися в нем представляющими косу «нитьями») в трехмерную сферу S^3 (или евклидово пространство \mathbb{R}^3) с отождествлением слоев $D^2 \times \{0\}$ и $D^2 \times \{1\}$ и переходом цилиндра в полноторий. Слегка варьируем эту конструкцию: будем считать, что цилиндр $D^2 \times [0, 1]$ вложен в S^3 , а для каждого n Александеровские замыкания кос из B_n получаются объединением вложенных в $D^2 \times [0, 1]$ геометрических представителей этих кос с фиксированным тривиальным n -компонентным тэнглом в шаре $S^3 \setminus \text{int}(D^2 \times [0, 1])$. Усложненные Александеровские замыкания, которые мы рассматриваем, получаются из этой конструкции, если (для заданного n) в шаре $S^3 \setminus \text{int}(D^2 \times [0, 1])$ вместо тривиального тэнгла выбрать и зафиксировать тот или иной специальным образом заузленный тэнгл. Это дает новые отображения из группы кос B_n в множество зацеплений: для каждой косы $\beta \in B_n$ мы рассматриваем ее стандартную геометрическую реализацию в цилиндре $D^2 \times [0, 1] \subset S^3$ и суммируем с фиксированным тэнглом в шаре $S^3 \setminus \text{int}(D^2 \times [0, 1])$.

Пример конструкции усложненного Александеровского замыкания на уровне плоских диаграмм представлен на рис. 1: прямоугольник R в левой части рисунка отвечает цилиндру $D^2 \times [0, 1]$ в смысле вышеприведенного описания, а вся остальная часть рисунка представляет собой диаграмму фиксированного в $S^3 \setminus \text{int}(D^2 \times [0, 1])$ тэнгла. Пример на рис. 1 относится к случаю кос с пятью нитями ($n = 5$): взяв стандартную (см., например, [7]) плоскую диаграмму произвольной косы из группы кос B_5 и вставив эту диаграмму в прямоугольник R , мы получаем диаграмму зацепления. Ориентируем получающиеся зацепления (пусть, скажем, нити в прямоугольнике R ориентированы «снизу вверх») и обозначим через \mathfrak{F}_5 возникающее таким образом отображение из B_5 в множество ориентированных зацеплений. Как нетрудно заметить, за счет перестановки нитей в квадрате Q (центр верхней трети рисунка 1) отображение \mathfrak{F}_5 переводит крашенные косы в связные зацепления, т.е. в узлы. Сужение отображения \mathfrak{F}_5 на подгруппу крашенных кос $PB_5 \subset B_5$ обозначим через \mathfrak{f}_5 . Таким образом, \mathfrak{f}_5 есть отображение из PB_5 в \mathcal{K} .

Обратим внимание на то, что в правой нижней части рис. 1 располагается серия из четырех заузливаний: на крайнем левом заузливании пара нитей заузлена в форме узла-восьмерки, далее идут три однотипных заузливаний, на каждом из которых пара нитей заузлена в форме трилистника. Для произвольного $n \geq 3$ определим диаграмму \mathfrak{D}_n по аналогии с диаграммой \mathfrak{D}_5 на рис. 1: число «параллельных» нитей, входящих и выходящих из прямоугольника R на диаграмме \mathfrak{D}_n , возьмем равным n , а серию однотипных заузливаний пар нитей в форме трилистника сформируем из $(n - 2)$ таких заузливаний. Отображение $\mathfrak{f}_n: PB_n \rightarrow \mathcal{K}$ определим на основе диаграммы \mathfrak{D}_n по аналогии с вышеописанным отображением \mathfrak{f}_5 .

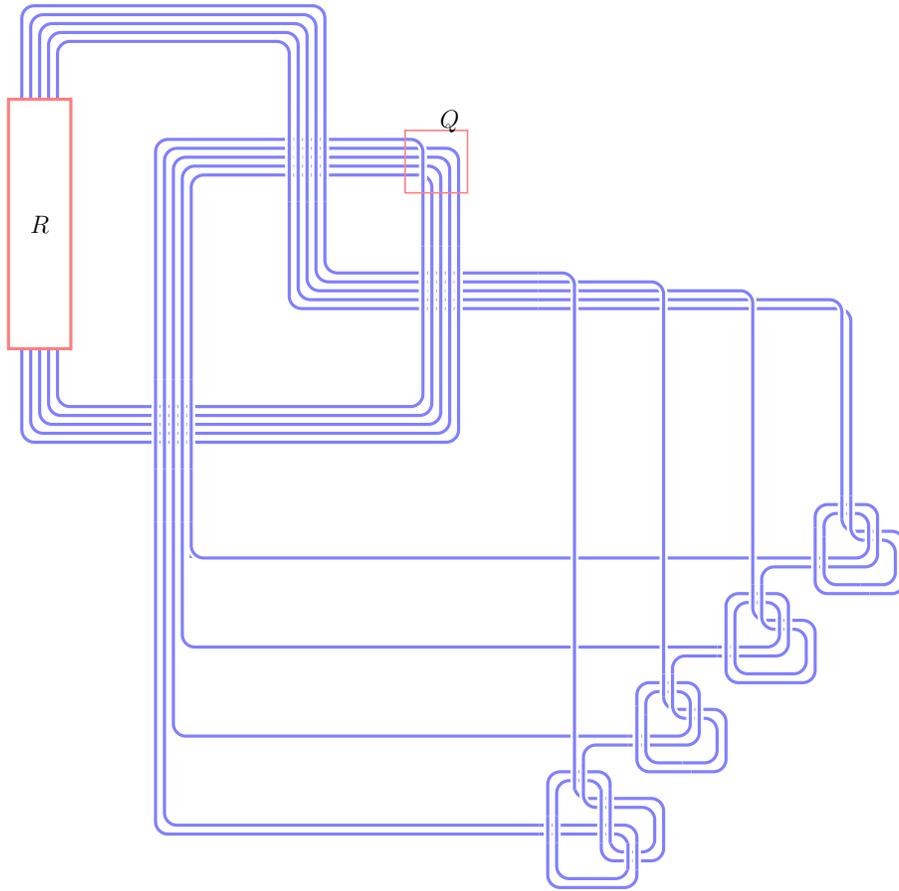


Рис. 1. Пример шаблона для усложненного Александерского замыкания

Дадим еще один эквивалентный вариант конструкции определения отображений f_n в терминах отображений трехмерных многообразий, — элементы этой конструкции потребуются нам для доказательства инъективности отображений f_n .

Пусть \mathbb{C} — комплексная плоскость. Выберем n различных точек на вещественном интервале $(-1; 1) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ и обозначим эти точки через z_1, \dots, z_n слева направо (т.е. так, что $z_1 < z_2 < \dots < z_n$ на \mathbb{R}). Точки множества $Z := \{z_1, \dots, z_n\}$ будем называть *исключительными*. Обозначим через D замкнутый диск единичного радиуса с центром в точке $0 \in \mathbb{C}$, и через D' — диск с проколами $D \setminus Z$.

Пусть V — полноторий, полученный отождествлением слоев $D \times \{0\}$ и $D \times \{3\}$ ($\{z\} \times \{0\} \sim \{z\} \times \{3\}$) цилиндра $D \times [0, 3]$. Слоение полнотория V на меридианные диски вида $D \times \{t\}$ будем называть *фиксированным* слоением. Подцилиндры $D \times [0, 1]$, $D \times [1, 2]$ и $D \times [2, 3]$ в полнотории V обозначим через V_C , V_S и V_B соответственно.

Для элементов группы кос B_n зафиксируем стандартное представление в виде изотопических классов наборов простых дуг с фиксированными концами в цилиндрах вида $D \times [a, b]$, поставив в соответствие артиновской образующей σ_i набор, состоящий из отрезков $\{z_j\} \times [a, b]$ для всех $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, i+1\}$ и дуг γ_i и γ'_i , где γ_i – простая дуга с концами в точках $\{z_i\} \times \{a\}$ и $\{z_{i+1}\} \times \{b\}$, трансверсальная к дискам фиксированного слоения и при проекции в D дающая простую дугу, относительная внутренность которой лежит в полуплоскости с отрицательной мнимой частью, а γ'_i – простая дуга, получающаяся из γ_i поворотом на угол π относительно отрезка $\{(z_i + z_{i+1})/2\} \times [a, b]$. При $a < b < c$ произведению кос $\beta_1\beta_2$ ставится в соответствие изотопический класс набора дуг в $D \times [a, c]$, являющегося объединением набора дуг в $D \times [a, b]$, представляющего косу β_1 , и набора дуг в $D \times [b, c]$, представляющего косу β_2 .

Для крашеной косы $\beta \in PB_n$ обозначим через β' набор дуг в $D \times [0, 3]$, являющийся объединением отрезков $Z \times [0, 1]$, того или иного набора дуг в V_S , представляющего косу

$$\delta_n := \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1,$$

и какого-либо набора дуг в V_B , представляющего косу β (набор β' представляет тем самым косу $\delta_n\beta$). Соответствующее подмножество в полнотории V обозначим через $\hat{\beta}'$. Заметим, что множество $\hat{\beta}'$ связно, поскольку коса δ_n , а значит и $\delta_n\beta$, задают циклическую перестановку множества $\{1, \dots, n\}$. Подмножества вида $\hat{\beta}'$ будем называть также *узлами* или *замкнутыми косами* (в V). Итак, мы получили отображение $\beta \mapsto \hat{\beta}'$ из группы крашенных кос PB_n в множество узлов в V .

Далее, для каждого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ выберем и обозначим через O_i какую-нибудь геометрическую окружность, лежащую во внутренности диска D и охватывающую из множества Z лишь точки z_i и z_{i+1} . Окружность $O_i \times \{i/n\}$ в $V_C \subset V$ обозначим через C_i , зацепление $C_1 \cup \dots \cup C_{n-1}$ в $V_C \subset V$ обозначим через C .

Обозначим через r минимум расстояний между компонентами множества $(Z \times [0, 1]) \cup C$, положим $\epsilon := r/(100n)$, и для каждого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ обозначим через B^i замкнутую ϵ -окрестность плоского диска, ограниченного окружностью C_i .

Для каждого $i \in \{1, \dots, n-1\}$ выберем во внутренности топологического шара B^i замкнутую трубчатую окрестность $U_i = U(C_i)$ окружности C_i . Дополняющее пространство $B^i \setminus \text{int } U_i$ обозначим через R_i . Многообразие R_i есть, таким образом, шар с вырезанным незаузленным открытым полноторием, или, что то же самое, полноторий с вырезанным открытым шаром. Будем называть такое многообразие *полноторием с дырой*.

Объединение $U_1 \cup \dots \cup U_{n-1}$ будем обозначать через $U(C)$ и U , многообразие $V \setminus \text{int}(U(C))$ обозначим через M . (Тем самым, M гомеоморфно сфере с исключенной открытой окрестностью тривиального n -компонентного зацепления.)

Экстраполируя свойства структуры диаграммы \mathfrak{D}_5 (рис. 1) на случай диаграммы \mathfrak{D}_n , мы видим, что в силу данных определений найдутся вложения $\phi_0: M \rightarrow V$ и $\phi_1: V \rightarrow S^3$, обладающие следующими свойствами:

- отображение ϕ_0 заузливает полноторий с дырой R_1 в узел-восьмерку;
- для каждого $i \in \{2, \dots, n-1\}$ отображение ϕ_0 заузливает полноторий с дырой R_i в трилистник;
- отображение ϕ_1 заузливает полноторий V в трилистник в S^3 ;
- для каждой косы $\beta \in PB_n$ композиция $\phi = \phi_1 \circ \phi_0$ в применении к замкнутой косе $\hat{\beta}' \subset M \subset V$ дает узел $\mathfrak{f}_n(\beta)$ (мы ориентируем узел $\phi(\hat{\beta}')$ в соответствии с направлением «от $D \times \{0\}$ к $D \times \{3\}$ » на нитях косы β').

В привязке к рисунку 1 отображение ϕ удобно представлять себе следующим образом: ϕ переводит подцилиндр $V_B \subset M \subset V$ в область, проектирующуюся в прямоугольник R (в левой части рисунка 1), участку δ_n в V_S при отображении ϕ отвечает фрагмент в квадрате Q (центр верхней трети рисунка 1), заузленным торам с дырами R_i отвечают фрагменты с заузливаниями в правой нижней части рисунка.

Предложение 1. *Для каждого натурального $n \geq 3$ вышеописанное отображение*

$$\mathfrak{f}_n: PB_n \rightarrow \vec{\mathcal{K}}$$

группы крашенных кос PB_n с n нитями в множество $\vec{\mathcal{K}}$ (классов объемлемо изотопных) ориентированных узлов в S^3 обладает следующими свойствами:

- отображение \mathfrak{f}_n инъективно;
- все узлы в образе $\mathfrak{f}_n(PB_n)$ – просты;
- все узлы в образе $\mathfrak{f}_n(PB_n)$ являются сателлитами;
- если коса $\beta \in PB_n$ представима в виде произведения из s перестановочных кос, то дуговой индекс узла $\mathfrak{f}_n(\beta)$ не превышает числа

$$n \cdot \max\{11, s + 8\} - 4.$$

Усложненное Александеровское замыкание \mathfrak{f}_n и предложение 1 являются стержневыми элементами настоящей работы. В дальнейшей части работы сперва излагается ряд сведений, использующихся в доказательстве предложения 1, затем дается доказательство предложения 1 (наиболее трудоемкой частью которого является доказательство инъективности), затем из предложения 1 выводятся оценки теоремы 1.

3 Предварительные сведения и вспомогательные утверждения

3.1. Сведения и утверждения о зацеплениях в расслоенных пространствах. Настоящий раздел содержит сведения о зацеплениях в

расслоенных пространствах, использующиеся в разделе 4.1 при доказательстве инъективности определенного в разделе 2 отображения f_n .

Подмногообразие расслоенного многообразия называется *вертикально-горизонтальным* (ВГ), если каждая из его компонент либо трансверсальна слоям во всех своих точках (*вертикальна*), либо лежит в слое (*горизонтальна*). Одномерные компактные подмногообразия, лежащие во внутренности трехмерного многообразия, называются *зацеплениями*.

В такой терминологии зацепления $\hat{\beta}' \cup C$ из определения отображения f_n вертикально-горизонтальны (по отношению к фиксированному слоению): коса $\hat{\beta}'$ – вертикальная часть зацепления, C – его горизонтальная часть.

Нам потребуется следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть L_1 и L_2 – объемлемо изотопные ВГ-зацепления в расслоенном на меридианные диски полнотории. Тогда L_1 и L_2 изотопны в классе ВГ. При этом для каждой объемлемой изотопии τ , переводящей L_1 в L_2 , найдется изотопия в классе ВГ, переводящая L_1 в L_2 и индуцирующая то же отображение на множествах компонент этих зацеплений, что и τ .*

Для доказательства теоремы 2 введем ряд вспомогательных понятий.

Пусть F – поверхность. Зацепление в $F \times \mathbb{R}$ называется *вертикально-расщепленным*, если его проекция в \mathbb{R} не связна, и – *горизонтально-расщепленным*, если не связна его проекция на F . Если зацепление L в $F \times \mathbb{R}$ изотопно вертикально/горизонтально-расщепленному, его называют *вертикально/горизонтально-расщепимым*. Ту компоненту двухкомпонентного вертикально-расщепленного зацепления в $F \times \mathbb{R}$, у которой \mathbb{R} -координаты больше, назовем *верхней*, а отличную от нее компоненту – *нижней*. Будем говорить, что вертикально-расщепленное двухкомпонентное горизонтальное зацепление в $F \times \mathbb{R}$ *допускает рокировку*, если в $F \times \mathbb{R}$ найдутся вертикально-расщепленное двухкомпонентное горизонтальное зацепление L' и изотопия между L и L' , переводящая верхнюю компоненту зацепления L в нижнюю компоненту зацепления L' . *Диском с проколами* будем называть поверхность, полученную из компактного двумерного диска удалением не более чем конечного числа точек внутренней.

Лемма 1. *Вертикально-расщепленное двухкомпонентное горизонтальное зацепление в $F \times \mathbb{R}$, где F – диск с проколами, допускает рокировку, если и только если проекции его компонент на F изотопны в F непесекающимся кривым.*

Доказательство леммы 1. Пусть L – вертикально-расщепленное двухкомпонентное горизонтальное зацепление в $F \times \mathbb{R}$, и пусть γ и λ – проекции его компонент на F , так что $L = (\gamma \times \{r\}) \sqcup (\lambda \times \{s\})$ для некоторых $r, s \in \mathbb{R}$.

Если γ и λ изотопны в F непересекающимся кривым γ^* и λ^* , то очевидным образом строимые изотопии дают рокировку

$$\begin{aligned} L &= (\gamma \times \{r\}) \sqcup (\lambda \times \{s\}) \rightarrow \\ &(\gamma^* \times \{r\}) \sqcup (\lambda^* \times \{s\}) \rightarrow \\ &(\gamma^* \times \{s\}) \sqcup (\lambda^* \times \{r\}) \rightarrow \\ &(\gamma \times \{s\}) \sqcup (\lambda \times \{r\}). \end{aligned}$$

Для доказательства обратной импликации предположим (желая прийти к противоречию), что γ и λ не изотопны в F непересекающимся кривым, но при этом L допускает рокировку, то есть переводится изотопией в некоторое вертикально расщепленное двухкомпонентное горизонтальное зацепление L' таким образом, что верхняя компонента зацепления L переходит в нижнюю компоненту зацепления L' . Мы можем не теряя общности считать, что $r = 1$ и $s = 2$, так что

$$L = (\gamma \times \{1\}) \sqcup (\lambda \times \{2\}),$$

а действие (изотопия) происходит внутри подпространства $F \times [0, 3]$.

Теперь заметим, что проекция на F изотопии из L в L' дает гомотопию между проекциями компонент зацеплений, а гомотопные простые замкнутые кривые в F изотопны (с учетом того, что мы рассматриваем неориентированные кривые; см. теоремы 2.1 и 3.3 в [17]), и что двухкомпонентное горизонтальное зацепление изотопией в классе горизонтальных переводится в положение, когда его проекция на \mathbb{R} есть произвольное заданное двухточечное множество. Отсюда следует, что L' (а значит и L) изотопно зацеплению

$$L'' = (\gamma \times \{2\}) \sqcup (\lambda \times \{1\})$$

(причем найдется изотопия, переводящая $\gamma \times \{1\}$ в $\gamma \times \{2\}$).

Из условия « γ и λ не изотопны непересекающимся кривым» легко следует, что ни одна из кривых γ и λ не стягиваема (ни к точке, ни к проколу) и не изотопна краю ∂F . Это показывает, что количество проколов в F составляет по меньшей мере 3, а эйлерова характеристика у F отрицательна. В таком случае на F можно ввести гиперболическую метрику, в которой край ∂F является геодезическим, а проколам соответствуют «острые рога». Введем такую метрику и отождествим универсальное накрывающее пространство U_F поверхности F с выпуклым в гиперболической метрике подмножеством гиперболической плоскости $U \subset \mathbb{H}^2$ (подробно эта конструкция описывается, например, в [26, 14, 22]). Тогда U компактифицируется до диска \bar{U} в пополненном абсолютом $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ диске \mathbb{H}^2 . Соответственно, универсальное накрывающее пространство многообразия $F \times [0, 3]$ отождествим с подмножеством $U \times [0, 3]$ в $\mathbb{H}^2 \times [0, 3] \subset \bar{\mathbb{H}}^2 \times [0, 3]$, а затем перейдем к вложенным компактификациям $\bar{U} \times [0, 3] \subset \bar{\mathbb{H}}^2 \times [0, 3]$ пространств $U \times [0, 3] \subset \mathbb{H}^2 \times [0, 3]$, получающимся факторизацией шара $\mathbb{H}^2 \times [0, 3]$ по каждой из образующих

$\{x\} \times [0, 3]$, $x \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$. (Пространство $\overline{\mathbb{H}^2 \times [0, 3]}$ естественно представлять себе как оптическую линзу, а его подпространство $\overline{U \times [0, 3]}$ – как линзу с выщербленными краями.)

Теперь заметим, что, поскольку γ и λ не изотопны паре непересекающихся кривых, то пересекаются и изотопные кривым γ и λ геодезические (в выбранной гиперболической метрике; см. [10, Lemma 2.3], [23, § 2.3]), откуда следует, что у γ и λ найдутся поднятия $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\lambda}$ в U такие, что пары предельных точек у $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\lambda}$ на абсолюте являются разбивающими (подробности о предельных точках поднятий кривых можно найти, например, в [10], [23]). Пусть P_γ – пара (лежащих на абсолюте) предельных точек кривой $\tilde{\gamma}$, P_λ – пара предельных точек кривой $\tilde{\lambda}$, а P'_γ и P'_λ – отвечающие им пары точек в компактификации $\overline{U \times [0, 3]} \subset \overline{\mathbb{H}^2 \times [0, 3]}$. Рассмотрим в $\overline{U \times [0, 3]} \subset \overline{\mathbb{H}^2 \times [0, 3]}$ четыре замкнутые кривые

$$\begin{aligned} C_{\gamma,1,3} &:= (\tilde{\gamma} \times \{1, 3\}) \cup P'_\gamma, \\ C_{\gamma,2,3} &:= (\tilde{\gamma} \times \{2, 3\}) \cup P'_\gamma, \\ C_{\lambda,0,2} &:= (\tilde{\lambda} \times \{0, 2\}) \cup P'_\lambda, \\ C_{\lambda,0,1} &:= (\tilde{\lambda} \times \{0, 1\}) \cup P'_\lambda. \end{aligned}$$

Ясно, что, поскольку пары P_γ и P_λ перекрещиваются, а $0 < 1 < 2 < 3$, то кривые $C_{\gamma,1,3}$ и $C_{\lambda,0,2}$ нетривиально зацеплены (зацепление Хопфа), а кривые $C_{\gamma,2,3}$ и $C_{\lambda,0,1}$ – не зацеплены. Заметим, что рассматриваемые кривые могут иметь дикое поведение в окрестностях точек пар P'_γ и P'_λ , однако, поскольку мы предполагаем «ручное» поведение во всех остальных точках и кривые не имеют общих точек с возможным диким поведением, это не мешает корректно определить коэффициенты зацепления.

При этом кривые $\tilde{\gamma} \times \{1\}$ и $\tilde{\lambda} \times \{2\}$ в $U \times [0, 3]$ являются компонентами прообразов компонент зацепления L , а кривые $\tilde{\gamma} \times \{2\}$ и $\tilde{\lambda} \times \{1\}$ – компонентами прообразов компонент зацепления L'' . Если некоторая изотопия переводит L в L'' , то ее поднятие в $U \times [0, 3]$ переводит $\tilde{\gamma} \times \{1\}$ в $\tilde{\gamma} \times \{2\}$, а $\tilde{\lambda} \times \{2\}$ – в $\tilde{\lambda} \times \{1\}$, причем кривые в процессе изотопии не пересекаются (поскольку покрывают непересекающиеся изотопируемые кривые в $F \times [0, 3]$). Это дает изотопию нетривиального (возможно, дикого в точках пар P'_γ и P'_λ) зацепления $C_{\gamma,1,3} \sqcup C_{\lambda,0,2}$ в тривиальное (с учетом возможности дикого поведения в точках пар P'_γ и P'_λ) зацепление $C_{\gamma,2,3} \sqcup C_{\lambda,0,1}$. Однако, поскольку в процессе изотопии зацепление сохраняется в классе зацеплений с четырьмя фиксированными дикими точками, коэффициент зацепления компонент определен на каждом моменте изотопии и не меняется.

Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Предложение 2. *В трехмерном многообразии, локально тривиально расслоенном над окружностью со слоем диск с проколами, горизонтальные зацепления изотопны если и только если они изотопны в классе горизонтальных.*

Доказательство предложения 2. Пусть F – диск с проколами, M – трехмерное многообразие, локально тривиально расслоенное над окружностью со слоем F , $L = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_m$ и $L' = C'_1 \sqcup \dots \sqcup C'_m$ – изотопные горизонтальные зацепления в M с компонентами C_1, \dots, C_m и C'_1, \dots, C'_m , соответственно, и пусть τ – какая-нибудь из изотопий в M , переводящих L в L' . Перенумеровав при необходимости компоненты в L' , будем считать, что τ переводит C_i в C'_i при каждом i .

Горизонтальное зацепление в M , ни одна пара компонент которого не лежит в одном слое, назовем *вполне расщепленным*. Поскольку каждое горизонтальное зацепление очевидно изотопно вполне расщепленному с изотопией в классе горизонтальных, нам достаточно рассмотреть случай, когда L и L' вполне расщеплены, что и предполагается в дальнейшем.

Пусть $\tilde{M} \rightarrow M$ – накрытие, отвечающее универсальному накрытию $\mathbb{R} \rightarrow S^1$, а \tilde{L} и \tilde{L}' – прообразы (поднятия) зацеплений L и L' в \tilde{M} . Тогда поднятие $\tilde{\tau}$ изотопии τ в \tilde{M} переводит \tilde{L} в \tilde{L}' в \tilde{M} .

Введем на базе S^1 и тем самым на M «угловые координаты», положив, скажем, $S^1 = [0, 2\pi]/\{0, 2\pi\}$ или, что эквивалентно, отождествив окружность S^1 с факторпространством вещественной прямой \mathbb{R} по сдвигу $x \mapsto x + 2\pi$. В согласовании с этими координатами отождествим накрывающее \tilde{M} с пространством $F \times \mathbb{R}$, – так, чтобы сдвиги на $\pm 2\pi k$ вдоль \mathbb{R} совпадали с группой скользящих накрывающего.

Для каждой компоненты C_i зацепления L выберем и обозначим через \tilde{C}_i одну из компонент ее прообраза в \tilde{M} , а через \tilde{C}'_i обозначим ту компоненту прообраза компоненты C'_i , в которую \tilde{C}_i переводится изотопией $\tilde{\tau}$. Обозначим через \tilde{s}_i и \tilde{s}'_i \mathbb{R} -координаты компонент \tilde{C}_i и \tilde{C}'_i . *Угловое смещение* Δ_i компоненты C_i (при изотопии τ) определим как разницу $\tilde{s}'_i - \tilde{s}_i$. (Очевидно, что от выбора компоненты \tilde{C}_i в прообразе угловое смещение Δ_i не зависит.)

Обозначим через F_r слой $F \times \{r\}$ в $\tilde{M} \cong F \times \mathbb{R}$. Пусть $\chi: \tilde{M} \rightarrow F_0$ – ретракция, гомеоморфно переводящая каждый слой F_r в F_0 . Изотопия $\tilde{\tau}$ между \tilde{C}_i и \tilde{C}'_i в \tilde{M} ретрагируется в гомотопию между $\chi(\tilde{C}_i)$ и $\chi(\tilde{C}'_i)$ в F_0 , так что, поскольку мы рассматриваем неориентированные кривые, $\chi(\tilde{C}_i)$ и $\chi(\tilde{C}'_i)$ изотопны в F_0 (см. [17]). Отсюда следует, что для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ в \tilde{M} найдется кольцо (трубка) с краями \tilde{C}_i и \tilde{C}'_i , везде трансверсальная слоям слоения $F \times \mathbb{R}$, и что существует изотопия $\tilde{t}^{(i)}: S^1 \times [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$, переводящая \tilde{C}_i и \tilde{C}'_i «с постоянной скоростью», то есть такая, что окружность $\tilde{t}^{(i)}(S^1) = \tilde{t}^{(i)}(S^1 \times \{t\})$ лежит в слое $F_{\tilde{s}_i + \Delta_i t} = F \times \{\tilde{s}_i + \Delta_i t\}$.

Проектируя изотопии $\tilde{\iota}^{(i)}$ в M , мы получаем набор изотопий $\iota^{(i)}$, где $\iota^{(i)}$ переводит C_i в C'_i (с постоянной угловой скоростью, сохраняя ее в классе горизонтальных). Назовем изотопии $\iota^{(i)}$ и $\iota^{(j)}$ при $i \neq j$ *совместимыми*, если их объединение является изотопией, а не гомотопией, то есть если ни при каком $t \in [0, 1]$ окружности $\iota_t^{(i)}(C_i)$ и $\iota_t^{(j)}(C_j)$ не пересекаются. Изотопии построенного набора могут не быть попарно совместимыми. Покажем, что их можно привести в совместимое положение небольшой корректировкой. Действительно, требование совместимости для некоторой пары $i, j \in \{1, \dots, m\}$ может нарушаться лишь в те моменты t_* , когда

$$(\tilde{s}_i + \Delta_i t_*) - (\tilde{s}_j + \Delta_j t_*) \in \{2\pi k\}_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Обозначим множество таких моментов t_* для пары $\{i, j\}$ через $T_{\{i, j\}}$. Поскольку мы предполагаем, что разные компоненты C_i, C_j лежат в разных слоях, наборы $T_{\{i, j\}}$ конечны. Кроме того, сколь угодно малым изменением исходного гомеоморфизма между окружностями $[0, 2\pi]/\{0, 2\pi\}$ и S^1 мы можем добиться того, чтобы для разных пар $\{i, j\}$ и $\{a, b\}$ множества $T_{\{i, j\}}$ и $T_{\{a, b\}}$ не пересекались. В результате мы получаем конечное число моментов $T \subset (0, 1)$, в которые та или иная пара изотопируемых окружностей находится в одном и том же слое, и в каждый из этих моментов имеется только один такой слой и ровно две изотопируемые окружности в нем. Покажем, что в каждый из этих моментов соответствующие окружности изотопны (в слое) непересекающимся окружностям. Отсюда следует, что для каждого из моментов $t_* \in T$ с попаданием пары окружностей в один слой нам достаточно локально подправить соответствующие изотопии в окрестности момента t_* так, чтобы в момент t_* прохода через один и тот же слой изотопируемые окружности были в положении, когда они не пересекаются. Это даст набор попарно совместимых изотопий, что позволит объединить их в изотопию зацепления L .

Итак, пусть $t_* \in T_{\{i, j\}}$. Пусть F_* – слой, содержащий окружности $\iota_{t_*}^{(i)}(C_i)$ и $\iota_{t_*}^{(j)}(C_j)$, пусть \tilde{F}_* – какая-нибудь из компонент прообраза слоя F_* в \tilde{M} , и пусть $\kappa^{(i)}: S^1 \times [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ и $\kappa^{(j)}: S^1 \times [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ – такие поднятия изотопий $\iota^{(i)}$ и $\iota^{(j)}$ в \tilde{M} , у которых окружности $\kappa^{(i)}(S^1 \times \{t_*\})$ и $\kappa^{(j)}(S^1 \times \{t_*\})$ содержатся в \tilde{F}_* . (Изотопии $\kappa^{(i)}$ и $\kappa^{(j)}$ получаются из изотопий $\tilde{\iota}^{(i)}$ и $\tilde{\iota}^{(j)}$ под действием скольжений накрытия.) Обратимся к горизонтальным двухкомпонентным зацеплениям

$$K := \kappa^{(i)}(S^1 \times \{0\}) \sqcup \kappa^{(j)}(S^1 \times \{0\}),$$

$$K' := \kappa^{(i)}(S^1 \times \{1\}) \sqcup \kappa^{(j)}(S^1 \times \{1\}).$$

По построению зацепления K и K' являются поднятиями зацеплений $C_i \sqcup C_j$ и $C'_i \sqcup C'_j$, а поднятие изотопии τ переводит K в K' . При этом в процессе изотопий $\kappa^{(i)}$ и $\kappa^{(j)}$ изотопируемые окружности движутся вдоль оси \mathbb{R} с постоянными (и отличающимися друг от друга) скоростями Δ_i

и Δ_j , а в момент времени t_* их \mathbb{R} -координаты совпадают. Это означает, что гомотопия $\kappa^{(i)} \sqcup \kappa^{(j)}$ (а значит и изотопия, являющаяся поднятием изотопии τ) переводит верхнюю компоненту зацепления K в нижнюю компоненту зацепления K' . Отсюда в силу леммы 1 вытекает, что $\iota_{t_*}^{(i)}(C_i)$ и $\iota_{t_*}^{(j)}(C_j)$ в F_* изотопны непересекающимся кривым, что и завершает доказательство. \square

Доказательство теоремы 2. Пусть τ_t , $t \in [0, 1]$, $\tau_0 = \text{id}_V$, – изотопия полнотория V , переводящая L_1 в L_2 . Обозначим через $\widehat{\beta}_1$ и $\widehat{\beta}_2$, соответственно, – вертикальные, а через C_1 и C_2 – горизонтальные части зацеплений L_1 и L_2 . Следуя традиции, вертикальные части $\widehat{\beta}_1$ и $\widehat{\beta}_2$ мы называем также *замкнутыми косами*. Заметим, что $\tau_1(\widehat{\beta}_1) = \widehat{\beta}_2$ и $\tau_1(C_1) = C_2$, поскольку изотопия не меняет индексов проекций компонент зацепления на базу расслоения – окружность. Этот же аргумент показывает, что индексы замкнутых кос $\widehat{\beta}_1$ и $\widehat{\beta}_2$ (в данном случае под индексами понимаются числа точек пересечения этих кос со слоями) совпадают. Обозначим индексы кос через n . (Случай пустой вертикальной части $n = 0$ не требует отдельного рассмотрения.) Из результатов работы [25] следует, что найдется послойная изотопия $\chi_t: V \rightarrow V$, $t \in [0, 1]$, $\chi_0 = \text{id}_V$, переводящая $\widehat{\beta}_1$ в $\widehat{\beta}_2$ и такая, что автогомеоморфизмы τ_1 и χ_1 связаны изотопией, в каждый момент переводящей $\widehat{\beta}_2$ в $\widehat{\beta}_2$. Пусть η – такая связывающая изотопия, а η^\dagger – ее сужение на $V^\dagger := V \setminus \widehat{\beta}_2$. Заметим, что V^\dagger есть ориентируемое многообразие, локально тривиально расслоенное над окружностью со слоем D^\dagger , где D^\dagger – двумерный диск с проколами, а $C_2 = \tau_1(C_1)$ и $\chi_1(C_1)$ – интерпретируются как горизонтальные зацепления в V^\dagger , связанные изотопией η^\dagger . Тогда в силу предложения 2 зацепления $\chi_1(C_1)$ и C_2 изотопны в V^\dagger в классе горизонтальных. Композиция объемлемой изотопии зацеплений, отвечающей послойной изотопии χ и переводящей L_1 в $\chi_1(L_1) = \widehat{\beta}_2 \cup \chi_1(C_1)$, и изотопии, переводящей $\chi_1(C_1)$ в C_2 в классе горизонтальных в $V^\dagger := V \setminus \widehat{\beta}_2$, переводит L_1 в L_2 в классе вертикально-горизонтальных.

Условие о том, что изотопия в классе ВГ, переводящая L_1 в L_2 , может быть подобрана таким образом, чтобы действовать на множествах компонент зацеплений так же, как и исходная изотопия, автоматически следует из конструкций доказательств работы [25] и предложения 2: эти доказательства конструктивны и описываемые в них изотопии в классах вертикальных и горизонтальных зацеплений по построению действуют на множествах компонент так же, как и исходные изотопии. \square

Вертикально-горизонтальное зацепление назовем *моноциклическим*, если оно не изотопно никакому ВГ-зацеплению с двумя горизонтальными компонентами в одном слое. (В силу теоремы 2, ВГ-зацепление, не являющееся моноциклическим, не только изотопно, но и ВГ-изотопно ВГ-зацеплению с двумя горизонтальными компонентами в одном слое.)

Лемма 2. При $n \geq 3$ для каждой крашеной косы $\beta \in PB_n$ зацепление $\hat{\beta}' \cup C$ из конструкции раздела 2 моноциклично.

Доказательство. Пусть N – многообразие, локально тривиально расслоенное над окружностью со связным слоем, и пусть L – вертикально-горизонтальное зацепление в N , ни одна пара горизонтальных компонент которого не лежит в одном слое.

Две горизонтальные компоненты в L назовем *соседними*, если они лежат в одной компоненте пространства, получающегося при удалении из N всех слоев, содержащих отличные от двух рассматриваемых горизонтальных компоненты зацепления L .

Если в L имеется по меньшей мере три горизонтальных компоненты, то *локальным цилиндром* двух соседних горизонтальных компонент C' и C'' в L будем называть содержащую C' и C'' компоненту многообразия (с индуцированным расслоением), получающегося из N при удалении слоев, содержащих отличные от C' и C'' горизонтальные компоненты зацепления L , и последующем удалении вертикальной части зацепления L .

Если горизонтальная часть у L состоит из двух компонент C' и C'' , возьмем в N два слоя F' и F'' таким образом, чтобы объединение $F' \cup F''$ не пересекалось с объединением $C' \cup C''$ и компоненты C' и C'' лежали в разных компонентах связности пространства $N \setminus (F' \cup F'')$, и назовем *локальными цилиндрами* пары C' и C'' многообразия (с индуцированными расслоениями) $N \setminus (F' \cup L_v)$ и $N \setminus (F'' \cup L_v)$, где L_v – вертикальная часть зацепления L .

Будем говорить, что две соседние горизонтальные компоненты в L *допускают рокировку*, если они допускают рокировку хотя бы в одном из их локальных цилиндров.

Из теоремы 2 и леммы 1 очевидным образом следует, что L не является моноциклическим если и только если какие-то две соседние компоненты допускают рокировку.

Покажем, что никакие две соседние горизонтальные компоненты зацепления $\hat{\beta}' \cup C$ рокировки не допускают.

Действительно, как следует из определений, набор $(C_1, C_2), (C_2, C_3), \dots, (C_{n-1}, C_1)$ исчерпывает множество соседних горизонтальных компонент для $\hat{\beta}' \cup C$ (см. раздел 2).

Каждый из локальных цилиндров каждой пары из этого набора раслаивается над интервалом со слоем проколотый диск D' .

При проекции каждого из этих локальных цилиндров в D' мы видим, что соседние компоненты переходят в простые замкнутые кривые, каждая из которых окружает по два прокола, и при этом пересечение множеств окружаемых проколов в каждом из случаев состоит из одного прокола. (Для пары (C_{n-1}, C_1) это обусловлено тем, что косы δ_n и $\delta_n \beta$ индуцируют циклическую перестановку $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n$ на множестве проколов.)

Отсюда в силу леммы 1 вытекает, что никакие две соседние горизонтальные компоненты зацепления $\hat{\beta}' \cup C$ рокировки не допускают.

Следовательно, зацепление $\hat{\beta}' \cup C$ моноциклично. \square

Предложение 3. Пусть L_1 и L_2 – объемлемо изотопные моноцикличные вертикально-горизонтальные зацепления в расслоенном на меридианные диски полнотории $D \times S^1$. Предположим, что множество слоев, содержащих горизонтальные компоненты зацепления L_1 , совпадает с множеством слоев, содержащих горизонтальные компоненты зацепления L_2 , и что L_1 и L_2 связаны объемлемой изотопией, переводящей хотя бы одну из горизонтальных компонент зацепления L_1 в горизонтальную компоненту зацепления L_2 , лежащую в том же слое. Тогда L_1 и L_2 связаны послойной изотопией полнотория $D \times S^1$, в каждый момент переводящей каждый слой $D \times \{x\}$ в него же.

Доказательство. По теореме 2 найдется ВГ-изотопия ρ , переводящая L_1 в L_2 и в конечный момент переводящая одну из горизонтальных компонент зацепления L_1 в ее исходный слой.

Поскольку ВГ-изотопия моноциклического зацепления в силу определений сохраняет циклический порядок на множестве горизонтальных компонент, отсюда следует, что изотопия ρ в конечный момент переводит каждую из горизонтальных компонент зацепления L_1 в ее исходный слой.

Заметим, что ВГ-изотопиям моноциклических зацеплений отвечают послойные изотопии многообразия, поскольку в процессе ВГ-изотопии моноциклического зацепления никакие его различные горизонтальные компоненты не оказываются в один и тот же момент в одном и том же слое.

Следовательно, для $D \times S^1$ найдется послойная изотопия τ , переводящая L_1 в L_2 и такая, что $\tau_1(D_x) = D_x$, если D_x – слой, содержащий горизонтальную компоненту зацепления L_1 . Подправив при необходимости изотопию τ на цилиндрах, ограниченных соседними слоями, содержащими горизонтальные компоненты, мы можем считать, что $\tau_1(D_x) = D_x$ и для каждого слоя D_x , так что τ_1 индуцирует тождественный автоморфизм базы S^1 .

Пусть $p(\tau)$ – изотопия базы S^1 , индуцированная послойной изотопией τ , \tilde{p} – «поднятие» изотопии $p(\tau)$ в $D \times S^1$, доставляемое произведением изотопии $p(\tau)$ и тождественной изотопии слоя, а \tilde{p}' – изотопия, обратная к \tilde{p} в том смысле, что $\tilde{p}'_t = \tilde{p}_t^{-1}$. Тогда изотопия-произведение $\chi = \tau \star \tilde{p}'$, задаваемая правилом $\chi_t = \tau_t \circ \tilde{p}'_t$, очевидно обладает искомым свойством. \square

3.2. Предварительные сведения о JSJ-разложении. Детальное описание сведений о JSJ-разложении дополнений узлов можно найти в работе [8] и приведенной там литературе.

Лемма 3. *В терминах раздела 2, для любой крашеной косы $\beta \in PB_n$ вложенный тор T в дополнении $S^3 \setminus \phi(\hat{\beta}')$ узла $\phi(\hat{\beta}')$ является несжимаемым если и только если T изотопен одному из торов набора $\phi(\partial M)$. Более того, набор торов $\phi(\partial M)$ представляет набор JSJ-разложения для (дополнения) узла $\phi(\hat{\beta}') = f_n(\beta)$.*

Доказательство. Торы из $\phi(\partial M)$ несжимаемы в $S^3 \setminus \phi(\hat{\beta}')$, поскольку каждый из этих торов заузлен, а узел $\phi(\hat{\beta}')$ проходит в ограничиваемом каждым из этих узлов полнотории с ненулевым индексом вращения (winding number) относительно полнотория. (По построению, узел $\phi(\hat{\beta}')$ имеет индекс n в полнотории, ограниченном тором $\phi(\partial V)$, и индекс 2 в полноториях, ограниченных торами из $\phi(\partial U)$.)

Торы из $\phi(\partial M)$ входят в JSJ-разложение, поскольку заузлены в несателлитные узлы.

Торы из $\phi(\partial M)$ попарно не параллельны, – в S^3 они по построению вкладываются в набор попарно непересекающихся шаров.

Покажем, что каждый несжимаемый тор в дополнении $S^3 \setminus \phi(\hat{\beta}')$ изотопен одному из торов набора $\phi(\partial M)$.

Предположим, желая прийти к противоречию, что некоторый несжимаемый тор T в $S^3 \setminus \phi(\hat{\beta}')$ не изотопен ни одному из торов набора $\phi(\partial M)$.

В таком случае, поскольку ни один из торов набора $\phi(\partial M)$ не завязан в сателлитный узел, тор T изотопией в $S^3 \setminus \phi(\hat{\beta}')$ переводится во внутренность многообразия $\phi(M)$, так что определен прообраз $\phi^{-1}(T)$ в M , и этот прообраз несжимаем и не параллелен краю в M .

Изотопией переведем тор $T' = \phi^{-1}(T)$ в состояние общего положения по отношению к фиксированному слоению меридианными дисками в V и стандартными методами теории несжимаемых поверхностей минимизируем количество особенностей на индуцированном (фиксированным слоением меридианными дисками) слоении с особенностями на T' .

Тор T' не переводится в «вертикальное» положение, где особенности на индуцированном слоении отсутствуют, поскольку в таком случае на пересечении тора с произвольным меридианным диском образовывалась бы простая замкнутая кривая, охватывающая лишь часть нитей замкнутой косы $\hat{\beta}'$ (поскольку предполагается, что тор T' не параллелен краю ∂V , а ни одна из окружностей C_i все нити косы не охватывает), которая при изотопии полного оборота над базой не задевала бы ни одной окружности из набора C , что невозможно, поскольку наличие такой изотопии позволяло бы найти на проколоте диске D' простую замкнутую кривую, не изотопную краю $\partial D'$ и не пересекающую ни одной окружности набора O_1, \dots, O_{n-1} .

На невертикально расположенном торе T' кроме седловых точек присутствуют также экстремальные точки «максимумов» и «минимумов». (Чтобы убедиться в этом, заметим, что две непересекающиеся замкнутые

простые кривые на торе либо изотопны, либо одна из кривых стягиваема, и применим это наблюдение к высекаемым меридианными дисками простым замкнутым кривым на торе T' .)

Стандартный анализ показывает, что единственным препятствием к сокращению количества особенностей и/или переводению максимума и минимума в тонкую окрестность одного меридианного диска в нашем случае могут служить лишь компоненты подзацепления C . При этом в случае, если компонента C_i служит таким препятствием, в торе T' имеется кольцо A , отделяемое меридианом, содержащим C_i . Натянув кольцо A' от кольца A к окружности C_i и анализируя пересечение кольца A' и тора T' , мы видим, что предполагаемая несжимаемость тора T' позволяет изотопиями очистить кольцо A' от пересечений с T' , за исключением кривых, параллельных окружности C_i , которые могут возникать исключительно в результате пересечений с другими – параллельными кольцу A – кольцами тора T' , отсекаемыми от T' меридианом, содержащим окружность C_i .

Ближайшее к $\partial(U_i)$ из указанных подколец изотопией в M переводится в положение «касания» с $\partial(U_i)$. Получающаяся таким образом кривая касания γ_i на T' не стягиваема в T' , поскольку C_i не стягиваема в $V \setminus \hat{\beta}'$.

Так как тор T' не параллелен тору $\partial(U_i)$, в паре к кривой касания γ_i на T' аналогичным образом возникает кривая касания $\gamma_j \subset T'$ с параллелью тора $\partial(U_j)$ одной из компонент C_j , отличных от C_i . В таком случае ограниченное кривыми γ_i и γ_j кольцо на T' дает в M правильно вложенное несжимаемое кольцо с краями-параллелями на $\partial(U_i)$ и $\partial(U_j)$. Наличие такого кольца показывает, что C_i и C_j изотопны в $(V \setminus (\hat{\beta}' \cup C)) \cup C_i \cup C_j$. Однако это невозможно, поскольку $\hat{\beta}' \cup C$ моноциклично в V (лемма 2).

Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Замечание. Из моноцикличности зацепления $\hat{\beta}' \cup C$ в V (лемма 2) и спецификации расположения окружностей зацепления C в силу рассуждений, приведенных в доказательстве леммы 3, вытекает, что в M отсутствуют также и правильно вложенные несжимаемые кольца (anannularity). Отсюда в силу гиперболизационной теоремы Терстона следует гиперболичность (внутренности) многообразия M , или, что то же самое, многообразия $V \setminus (\hat{\beta}' \cup C)$.

Напомним, что на крае вложенного в трехмерную сферу S^3 полнотория определены изотопические классы *меридиана* и *параллели* (см., например, [9, Theorem 3.1]).

Лемма 4. Пусть O – вложенный в трехмерную сферу S^3 полноторий, K – узел в $\text{int}(O)$, а τ_t , $t \in [0, 1]$, $\tau_0 = \text{id}_{S^3}$ – изотопия трехмерной сферы, переводящая K в K с сохранением ориентации, причем $\tau_1(O) = O$. Предположим, что K имеет в O ненулевой индекс вращения (или, что

то же самое, меридиан полнотория O имеет ненулевой индекс зацепления с K). Тогда сужение автогомеоморфизма τ_1 на тор ∂O изотопно (на торе ∂O) тождественному отображению.

Доказательство. Заметим, что τ_1 переводит ∂O в ∂O с сохранением ориентации, а также что τ_1 переводит меридианы полнотория O – в меридианы, а параллели – в параллели. Из того, что меридианы полнотория O имеют ненулевой индекс зацепления с K , а τ_1 переводит K в K с сохранением ориентации, вытекает, что τ_1 переводит меридианы полнотория O в меридианы также с сохранением ориентации. Отсюда очевидным образом следует требуемое. \square

3.3. Лемма об обметывающих наборах кривых.

Лемма 5. Пусть $n \geq 3$, а D' и C_1, \dots, C_{n-1} – проколотый диск и простые кривые на нем из конструкции раздела 2. Пусть $h: D' \rightarrow D'$ – сохраняющий ориентацию автогомеоморфизм, переводящий каждую из кривых C_1, \dots, C_{n-1} в изотопную ей кривую. Тогда h изотопен тождественному автогомеоморфизму.

Доказательство. С помощью стандартных методов теории автоморфизмов поверхностей, индукцией по $k \in \{1, \dots, n-1\}$ демонстрируется, что h изотопен автогомеоморфизму, тождественному на подмножестве $C_1 \cup \dots \cup C_k$.

Из того, что h изотопен автогомеоморфизму, тождественному на подмножестве $C_1 \cup \dots \cup C_{n-1}$, следует требуемое в силу того, что каждая из компонент множества $D' \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_{n-1})$ гомеоморфна либо открытому диску, либо открытому диску с проколом, либо кольцу с одной компонентой края. \square

Замечание. Потребовав дополнительно при определении окружностей C_1, \dots, C_{n-1} , чтобы ни для какого i окружности C_i и C_{i+2} не пересекались, мы можем разбить набор C_1, \dots, C_{n-1} на два простых подмногочисления $C_1 \cup C_3 \cup \dots$ и $C_2 \cup C_4 \cup \dots$ и воспользоваться для доказательства леммы 5 методами гиперболической геометрии (см., например, [10]).

4 Доказательство предложения 1 о свойствах отображения f_n

4.1. Доказательство инъективности отображения f_n . Предположим, что у двух крашенных кос β_1 и β_2 из PB_n образы $f_n(\beta_1)$ и $f_n(\beta_2)$ совпадают.

В терминах базовой конструкции раздела 2 это означает, что узлы $\phi(\hat{\beta}'_1)$ и $\phi(\hat{\beta}'_2)$ объемлемо изотопны в S^3 (с учетом ориентации).

Обратимся к теории несжимаемых поверхностей и JSJ-разложения и воспользуемся тем, что объемлемая изотопия между узлами продолжима на несжимаемые поверхности в дополнении узла, представляющие те или иные канонически привязанные к узлу изотопические классы таких

поверхностей. (В частности, изотопия между узлами продолжается на наборы торов JSJ-разложений дополнений узлов или на канонические поднаборы таких наборов, – к примеру, на все торы JSJ-разложения, имеющие тот или иной фиксированный тип заузленности.)

В силу леммы 3 набор торов $\phi(\partial M)$ является изотопическим инвариантом узла $\phi(\hat{\beta}^1)$. Следовательно, найдется изотопия τ_t , $t \in [0, 1]$, $\tau_0 = \text{id}_{S^3}$, сферы S^3 , переводящая узел $\phi(\hat{\beta}_1^1)$ в узел $\phi(\hat{\beta}_2^1)$, а набор торов $\partial\phi(M) = \phi(\partial M)$ – в тот же набор торов.

Поскольку оба узла $\phi(\hat{\beta}_1^1)$ и $\phi(\hat{\beta}_2^1)$ лежат в многообразии $\phi(M)$ (и тем самым – в одной и той же компоненте связности пространства $S^3 \setminus \partial\phi(M)$), такая изотопия переводит также $\phi(M)$ в $\phi(M)$.

Следовательно, композиция $\alpha := \phi^{-1} \circ \tau_1 \circ \phi$ дает автогомеоморфизм $M \rightarrow M$ многообразия M , переводящий узел $\hat{\beta}_1^1$ в узел $\hat{\beta}_2^1$. (Отсюда в силу известной теоремы Артина следует, что косы β_1^1 и β_2^1 сопряжены, но требуется показать большее: что $\beta_1^1 = \beta_2^1$.)

Заметим, что изотопия τ переводит тор $\phi(\partial V)$ в него же, поскольку $\phi(\partial V)$ – единственная компонента края ∂M , относительно которой узлы $\phi(\hat{\beta}_1^1)$ и $\phi(\hat{\beta}_2^1)$ имеют индекс вращения $n \geq 3$ (индексы вращения указанных узлов относительно каждой из остальных компонент края ∂M равны двум). При этом, поскольку τ переводит узел $\phi(\hat{\beta}_1^1)$ в узел $\phi(\hat{\beta}_2^1)$ с учетом ориентации, по лемме 4 сужение автогомеоморфизма τ_1 на тор $\phi(\partial V)$ изотопно тождественному отображению тора.

Заметим также, что изотопия τ переводит тор $\phi(\partial U(C_1))$ в него же, поскольку $\phi(\partial U(C_1))$ – единственная компонента края $\partial\phi(M)$, заузленная в узел-восьмерку, и что (в силу леммы 4) сужение автогомеоморфизма τ_1 на тор $\phi(\partial U(C_1))$ изотопно тождественному отображению тора.

Это означает, что автогомеоморфизм α переводит тор ∂V в тор ∂V , а тор $\partial U(C_1)$ – в тор $\partial U(C_1)$, причем получающиеся автогомеоморфизмы торов изотопны тождественным.

Вообще говоря, имеющийся набор данных позволяет на текущем этапе доказательства продемонстрировать, что автогомеоморфизм α переводит в себя – причем гомеоморфизмом, изотопным тождественному – каждую из компонент края ∂M , но известное нам доказательство этого утверждения довольно трудоемко, и мы выстраиваем дальнейшую цепь рассуждений в обход этого факта.

Обратим теперь внимание на то, что все торы набора $\phi(\partial U_2), \dots, \phi(\partial U_{n-1})$ заузлены, так что на каждом из них имеется выделенная система изотопических классов параллелей и меридианов (в качестве которых для каждого $\phi(\partial U_i)$ мы выбираем изотопические классы единственного ограниченного заузленным тором $\phi(\partial U_i)$ полнотория в S^3 ; см. [9, Theorem 3.1]).

Автогомеоморфизм τ_1 , переводя $\phi(\partial U_2 \cup \dots \cup \partial U_{n-1})$ в $\phi(\partial U_2 \cup \dots \cup \partial U_{n-1})$, переводит при этом меридианы – в меридианы, а параллели – в параллели (поскольку τ_1 изотопен тождественному).

Напомним, что узлы $\phi(\hat{\beta}'_1)$ и $\phi(\hat{\beta}'_2)$ имеют ненулевые индексы вращения в каждом из ограничиваемых торами $\phi(\partial U_i)$ полноториев, и что τ_1 переводит $\phi(\hat{\beta}'_1)$ в $\phi(\hat{\beta}'_2)$ с сохранением ориентации. Отсюда следует, что на выделенных системах параллелей и меридианов торов $\phi(\partial U_i)$ можно ввести согласованные ориентации, так что τ_1 будет действовать на изотопических классах меридианов и параллелей с учетом указанной ориентации. (Ср. с леммой 4).

Отметим, наконец, что отображение ϕ в силу определения заузливает полнотории с дырами R_2, \dots, R_{n-1} идентично, так что, в частности, изотопические классы меридианов полноториев U_2, \dots, U_{n-1} на торах $\partial U_2, \dots, \partial U_{n-1}$ под действием отображения ϕ переходят в изотопические классы на торах $\phi(\partial U_2), \dots, \phi(\partial U_{n-1})$, одинаково выражающиеся через выбранные на этих торах системы ориентированных параллелей и меридианов.

Из перечисленного вытекает, в частности, что автогомеоморфизм α переводит изотопические классы меридианов полноториев U_2, \dots, U_{n-1} на торах $\partial U_2, \dots, \partial U_{n-1}$ в изотопические классы меридианов.

Отсюда следует, что, скорректировав при необходимости изотопию τ в (сколь угодно тонкой) окрестности края $\partial\phi(M)$, мы приходим к ситуации, когда автогомеоморфизм α переводит в самих себя произвольные предварительно фиксированные меридианные слоения на ∂V и на $\partial U(C)$.

Из того, что автогомеоморфизм $\alpha: M \rightarrow M$ сохраняет систему меридианов на $\partial U(C)$ и при этом $\alpha(\partial U_1) = \partial U_1$, следует, что на основе гомеоморфизма α мы можем сконструировать автогомеоморфизм $\bar{\alpha}: V \rightarrow V$ полнотория V , переводящий зацепление $\hat{\beta}'_1 \cup C$ в зацепление $\hat{\beta}'_2 \cup C$, а компоненту C_1 – в компоненту C_1 , а из того, что сужение гомеоморфизма α на край ∂V изотопно тождественному отображению, следует, что сужение такого $\bar{\alpha}$ на ∂V изотопно тождественному отображению.

Поскольку группа тождественных на крае гомеотопий полнотория связна, автогомеоморфизм $\bar{\alpha}$ изотопен тождественному. Это доказывает существование изотопии полнотория V , переводящей зацепление $\hat{\beta}'_1 \cup C$ в зацепление $\hat{\beta}'_2 \cup C$, а компоненту C_1 – в компоненту C_1 . При этом в силу леммы 2 зацепления $\hat{\beta}'_1 \cup C$ и $\hat{\beta}'_2 \cup C$ моноцикличны. Отсюда в силу предложения 3 следует, что найдется изотопия $\rho_t, t \in [0, 1], \rho_0 = \text{id}_V$ полнотория V , обладающая следующими свойствами:

- (P1) ρ_1 переводит зацепление $\hat{\beta}'_1 \cup C$ в зацепление $\hat{\beta}'_2 \cup C$;
- (P2) ρ в каждый момент переводит каждый меридианный диск (фиксированного расслоения полнотория V на меридианные диски) в тот же меридианный диск.

Кроме того, ρ может быть выбрана обладающей вдобавок свойством

- (P3) ρ поточечно тождественна на крае ∂V полнотория V .

В качестве комментария отметим, что в силу конструкции подзацепления C всякая изотопия ρ полнотория V , обладающая указанными свойствами (P1) и (P2), некоторой изотопией χ полнотория V , обладающей свойством (P1) и неподвижной на $\hat{\beta}'_2 \cup C$, дополняется до автогомеоморфизма $\chi_1 \circ \rho_1$, тождественного на цилиндре $V_C = D \times [0, 1]$ и крае ∂V (см. описание базовой конструкции в разделе 2).

Для наших целей достаточно показать меньшее – а именно, нам достаточно показать, что найдется изотопия η полнотория V , обладающая свойством (P1) и такая, что сужение автогомеоморфизма $\eta_1: V \rightarrow V$ на меридианный диск $D_0 = D \times \{0\}$ полнотория V является тождественным отображением. Покажем это.

Для этого проанализируем свойства сужения изотопии ρ со свойствами (P1)–(P3) и автогомеоморфизма ρ_1 на диск D_0 .

Обозначим через D'_0 проколотый диск $D_0 \setminus Z = D_0 \setminus \hat{\beta}'_1 = D_1 \setminus \hat{\beta}'_2$. Поскольку $\rho_1(\hat{\beta}'_1) = \hat{\beta}'_2$, автогомеоморфизм ρ_1 переводит D'_0 в D'_0 .

Пусть $p: V_C \rightarrow D_0$ – проекция входящего в полноторий V цилиндра $V_C = D \times [0, 1] = D_0 \times [0, 1]$ на D_0 , а I_i – «кольцо» $C_i \times [0, i/n]$, соединяющее C_i с проекцией $p(C_i)$. Тогда проекция p образа $\rho_1(I_i)$ дает изотопию между $p(C_i)$ и $\rho_1(p(C_i))$ на D_0 . Следовательно, поскольку $\rho_1(I_i)$ не пересекает набора сегментов $V_1 \cap \hat{\beta}'_1$, кривые $p(C_i)$ и $\rho_1(p(C_i))$ изотопны на проколоте диске D'_0 . Таким образом, сужение $\rho_1|_{D'_0}$ гомеоморфизма ρ_1 на проколотый диск D'_0 переводит в изотопную каждую из кривых набора $C_1 = p(C_1), p(C_2), \dots, p(C_{n-1})$. Отсюда в силу леммы 5 получаем, что $\rho_1|_{D'_0}$ изотопен тождественному (в классе изотопий, не фиксирующих край поточечно).

Пусть ζ – продолжение изотопии проколотого диска D'_0 , связывающей автогомеоморфизм $\rho_1|_{D'_0}$ с тождественным автогомеоморфизмом $\text{id}_{D'_0}$, до изотопии всего полнотория V с носителем в малой окрестности объединения $D_0 \cup \partial V$ и неподвижной на $\hat{\beta}'_2$ (на ∂V продолжаем изотопию с $\partial D'_0$ прямым послойным поднятием). Тогда композиция $\zeta_1 \circ \rho_1$ есть гомеоморфизм, тождественный на множестве $D_0 \cup \partial V$ и переводящий $\hat{\beta}'_1$ в $\hat{\beta}'_2$. Воспользовавшись трюком Александра, мы заключаем, что автогомеоморфизм $\zeta_1 \circ \rho_1$ связан с тождественным автогомеоморфизмом полнотория V изотопией, неподвижной на $D_0 \cup \partial V$.

Таким образом, узлы $\hat{\beta}'_1$ и $\hat{\beta}'_2$ связаны изотопией полнотория, неподвижной на $D_0 \cup \partial V$, а отвечающие им наборы дуг β'_1 и β'_2 в цилиндре $D \times [0, 3]$ связаны изотопией цилиндра, неподвижной на крае цилиндра. Из теоремы Артина [3] об изотопных косах прямо вытекает, что в этом случае наборы дуг β'_1 и β'_2 связаны неподвижной на крае и послойной изотопией цилиндра. Это в точности означает, что наборы дуг β'_1 и β'_2 в цилиндре $D \times [0, 3]$ представляют один и тот же элемент группы кос.

Поскольку наборы дуг β'_1 и β'_2 представляют косы $\delta_n\beta_1$ и $\delta_n\beta_2$, это означает, что $\delta_n\beta_1 = \delta_n\beta_2$ и тем самым $\beta_1 = \beta_2$. Это доказывает инъективность отображения f_n .

4.2. Доказательство простоты и сателлитности узлов из образа отображения f_n . Сателлитность узла $f_n(\beta) = \phi(\hat{\beta}')$ для произвольной косы $\beta \in PB_n$ следует из наличия в дополнении $S^3 \setminus \phi(\hat{\beta}')$ несжимаемых торов $\phi(\partial M)$ (лемма 3), простота узла $\phi(\hat{\beta}')$ следует из отсутствия в множестве несжимаемых торов в дополнении $S^3 \setminus \phi(\hat{\beta}')$ характерных для составных узлов несжимаемых торов, относительно которых узел имеет единичный индекс вращения (лемма 3).

4.3. Доказательство оценки из предложения 1. Оценка на дуговой индекс узла $f_n(\beta) = \phi(\hat{\beta}')$ получается через так называемые прямоугольные диаграммы (см. [15, 16] и приведенную там литературу). Ориентируясь на определения раздела 2 и структуру диаграммы на рис. 1, нетрудно заключить, что:

- узел $\phi_1(\hat{e}')$ (см. описание вложения ϕ_1 в разделе 2) для тривиальной косы e реализуется прямоугольной диаграммой сложности $5n$ (5 – дуговой индекс трилистника);
- узел $\phi(\hat{e}')$ реализуется прямоугольной диаграммой сложности $5n + 8 + 6(n - 2)$: при переходе от диаграммы узла $\phi_1(\hat{e}')$ к диаграмме узла $\phi(\hat{e}')$ сложность увеличивается на 8 при добавлении двуниточного заузливания в узел-восьмерку (дуговой индекс узла-восьмерки равен шести), и увеличивается на $6(n - 2)$ при добавлении $n - 2$ двуниточных заузливаний в трилистник (см. нижнюю правую часть рисунка 1);
- при переходе от диаграммы узла $\phi(\hat{e}')$ к диаграмме узла $\phi(\hat{\beta}')$ для реализации любого перестановочного участка в косе β достаточно добавить в диаграмму «ступень» на участке из n параллельных дуг, что увеличивает сложность диаграммы на n ;
- при этом в представленном на рис. 1 шаблоне имеется шесть «свободных углов», что с учетом альтернирования знаков при обходе этих углов позволяет реализовать три перестановочных косы без добавления «ступеней».

Суммируя, получаем

$$5n + 8 + 6(n - 2) + n \cdot \max\{s - 3, 0\} = n \cdot \max\{s + 8, 11\} - 4.$$

5 Доказательство теоремы 1

Обратимся к стандартной биекции между перестановками множества $\{1, \dots, n\}$ и положительными перестановочными косами в B_n . Заметим, что для произвольной перестановки π множества $\{1, \dots, n\}$ произведение $\beta_\pi\beta_{\pi^{-1}}$, где β_π и $\beta_{\pi^{-1}}$ – положительные перестановочные косы из B_n , отвечающие перестановке π и обратной π^{-1} , является крашеной косой,

а разным перестановкам при отображении $\pi \mapsto \beta_\pi \beta_{\pi^{-1}}$ отвечают разные косы, поскольку нити с индексами i и j у косы $\beta_\pi \beta_{\pi^{-1}}$ зацеплены между собой если и только если они пересекаются в стандартной диаграмме косы β_π . Следовательно, в PB_n имеется по меньшей мере $n!$ элементов, каждый из которых представим в виде произведения двух перестановочных кос. Отсюда в силу предложения 1 заключаем (подставляя $s = 2$ в формулу предложения), что для любого натурального $k \geq 11 \cdot 3 - 4 = 29$ найдется по меньшей мере $n!$, где

$$n = \left\lceil \frac{k+4}{11} \right\rceil,$$

элементов группы PB_n , отправляемых отображением f_n в попарно не совпадающие простые ориентированные узлы с дуговым индексом $\leq k$.

При $k \in [5, 18)$, когда $\lceil (k+4)/11 \rceil = 1$, справедливость доказываемой оценки $A_k \geq 1! = 1$ обеспечивается трилистником, дуговой индекс которого равен 5.

При $k \in [18, 29)$, когда $\lceil (k+4)/11 \rceil = 2$, справедливость доказываемой оценки $A_k \geq 2! = 2$ обеспечивается простыми узлами с дуговым индексом, не превосходящим 18.

Из неравенства $A_k \geq n!$ вытекают искомые экспоненциальные неравенства. Действительно, поскольку

$$m! \geq \left(\frac{m+1}{2} \right)^{\frac{m+1}{2}}$$

и

$$\left\lceil \frac{k+4}{11} \right\rceil + 1 \geq \frac{k+5}{11},$$

мы получаем, что

$$n! = \left\lceil \frac{k+4}{11} \right\rceil! \geq \left(\frac{k+5}{22} \right)^{\frac{k+5}{22}} > \left(\frac{k}{22} \right)^{\frac{k}{22}}.$$

Из формулы Стирлинга вытекает, что при $n \geq a + b$ выполняется неравенство

$$n! \geq \left(\frac{a}{e} \right)^a \cdot a^b = a^a \cdot \left(\frac{a^b}{e^a} \right),$$

так что $n! > a^a$ при $a > e^{a/b}$.

Отсюда (заметив, что $n > k/(11,01)$ при $k > 6 \cdot 1101$ и) положив

$$a = \frac{k}{12} \quad \text{и} \quad b = \frac{k}{11,01} - \frac{k}{12} = \frac{0,99}{132,12} \cdot k,$$

получаем, что $n! > y^y$, где $y = k/12$, при $k \geq 10^7 > 12e^{12}$.

References

- [1] J. W. Alexander, *A lemma on systems of knotted curves*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **9**:3 (1923), 93–95.
- [2] I. S. Alekseev, A. M. Vershik, A. V. Malyutin, *On the growth of the number of prime knots*, Algebra i Analiz, **36**:1 (2024), 17–39.
- [3] E. Artin, *Theorie der Zöpfe*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **4** (1925), 47–72.
- [4] Y. Bae, C.-Y. Park, *An upper bound of arc index of links*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **129**:3 (2000), 491–500.
- [5] Yu. Belousov, A. Malyutin, *Hyperbolic knots are not generic*, preprint arXiv:1908.06187, 2019.
- [6] Yu. S. Belousov, M. V. Karev, A. V. Malyutin, A. Yu. Miller, E. A. Fominykh, *Ler-naean knots and band surgery*, St. Petersburg Math. J. **33** (2022), 23–46.
- [7] J. S. Birman, *Braids, Links, and Mapping Class Groups*, Annals of Math. Stud., **82**, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1974.
- [8] R. Budney, *JSJ-decompositions of knot and link complements in S^3* , Enseign. Math. (2), **52**:2 (2006), 319–59.
- [9] G. Burde, H. Zieschang, *Knots*, 2nd ed., de Gruyter Stud. Math. **5**, de Gruyter, Berlin, 2003.
- [10] A. Casson, S. Bleiler, *Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston*, London Math. Soc. Student Texts, vol. **9**, Cambridge Univ. Press, 1988.
- [11] P. R. Cromwell, *Embedding knots and links in an open book. I. Basic properties*, Topology Appl., **64**:1 (1995), 37–58.
- [12] P. R. Cromwell, *Arc presentations of knots and links*, in: “Knot theory (Warsaw, 1995)”, 57–64, Banach Center Publ., **42**, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 1998.
- [13] P. R. Cromwell, I. J. Nutt, *Embedding knots and links in an open book. II. Bounds on arc index*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **119**:2 (1996), 309–319.
- [14] P. Dehornoy, I. Dynnikov, D. Rolfsen, B. Wiest, *Why are braids orderable?*, Panoramas et synthèses, **14**, Soc. Math. Francais, 2002.
- [15] I. A. Dynnikov, *Arc-presentations of links: monotonic simplification*, Fund. Math., **190** (2006), 29–76.
- [16] I. A. Dynnikov, M. V. Prasolov, *Bypasses for rectangular diagrams. A proof of the Jones conjecture and related questions*, Trans. Moscow Math. Soc., **74** (2013), 97–144.
- [17] D. B. A. Epstein, *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta Math., **115** (1966), 83–107.
- [18] C. Ernst, D. W. Sumners, *The growth of the number of prime knots*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **102**:2 (1987), 303–315.
- [19] G. T. Jin, H. J. Lee, *Prime knots whose arc index is smaller than the crossing number*, J. Knot Theory Ramifications, **21**:10 (2012), 1250103.
- [20] G. T. Jin, W. K. Park, *Prime knots with arc index up to 11 and an upper bound of arc index for non-alternating knots*, J. Knot Theory Ramifications, **19**:12 (2010), 1655–1672.
- [21] C. Kassel, V. Turaev, *Braid Groups*, Grad. Texts in Math., vol. **247**, Springer, New York, 2008.
- [22] A. V. Malyutin, *Twist number of (closed) braids*, St. Petersburg Math. J., **16** (2005), 791–813.
- [23] A. V. Malyutin, *Classification problems in the theory of automorphism groups of low-dimensional manifolds*, Dissertation ... doct. phys.-math. sciences, St. Petersburg State University, St. Petersburg, 2009.
- [24] A. V. Malyutin, *On the question of genericity of hyperbolic knots*, Int. Math. Res. Not., **2020**:21 (2020), 7792–7828.

- [25] A. V. Malyutin, *Generalization of Artin's theorem on the isotopy of closed braids. I*, Sib. Math. J., **65** (2024), 582–588.
- [26] H. Short, B. Wiest, *Orderings of mapping class groups after Thurston*, Enseign. Math., **46** (2000), 279–312.
- [27] A. Stoimenow, *On the number of links and link polynomials*, Q. J. Math., **55**:1 (2004), 87–98.
- [28] C. Sundberg, M.B. Thistlethwaite, *The rate of growth of the number of prime alternating links and tangles*, Pacific J. Math., **182**:2 (1998), 329–358.
- [29] M.B. Thistlethwaite, *On the structure and scarcity of alternating links and tangles*, J. Knot Theory Ramifications, **7**:7 (1998), 981–1004.
- [30] D. J. A. Welsh, *On the number of knots and links*, in: “Sets, Graphs and Numbers (Proceedings of 1991 Budapest conference)”, 713–718. Colloq. Math. Soc. János Bolyai 60, Amsterdam: North-Holland, 1992.

ANDREI VALERYEVICH MALYUTIN
ST. PETERSBURG DEPARTMENT
OF STEKLOV MATHEMATICAL INSTITUTE,
FONTANKA, 27,
191023, ST. PETERSBURG, RUSSIA
Email address: malyutin@pdmi.ras.ru

MIKHAIL NIKOLAEVICH STUPAKOV
ST. PETERSBURG DEPARTMENT
OF STEKLOV MATHEMATICAL INSTITUTE,
FONTANKA, 27,
191023, ST. PETERSBURG, RUSSIA
Email address: stupakov.mn@gmail.com