

Рецензия на статью
Ю. В. Таранникова "О числе разбиений
гиперкуба Z_q^n на большие подкубы"

В данной статье рассматривается задача об асимптотике числа разбиений гиперкуба на большие подкубы. Такие разбиения удобно представлять в виде звездной матрицы, где каждая строка задает некоторый подкуб. В разбиениях на гиперкубы в первую очередь интересны A -примитивные разбиения, т.е. такие которые нельзя свести к разбиениям гиперкуба предыдущей размерности просто удалив некоторую координату. Из прошлых результатов автора статьи известно, что для фиксированного m начиная с некоторой размерности N^{coord} A -примитивных разбиений не существует, поэтому для асимптотики нужно найти значение N^{coord} . Для этого в рецензируемой статье предложена конструкция фрактальной матрицы и операция взрыва для звездных матриц. Идея в том, что фрактальная матрица является единственной матрицей, соответствующей A -примитивному разбиению, которая при взрыве не превращается в звездную матрицу некоторого A -примитивного разбиения, но большей размерности. Так как размерность A -примитивных разбиений не может расти бесконечно, то получается что размерность фрактальной матрицы и есть искомая, откуда вытекает асимптотика.

Задача разбиения гиперкуба на различные непересекающиеся множества, в частности гиперкубы, изучается многими авторами в связи с задачами криптографии, теории кодирования, статистики и комбинаторики в целом. Например, такие разбиения можно использовать для построения новых комбинаторных объектов и оценок на их число. Также отметим, что в рецензируемой статье получена точная асимптотика для числа разбиений, хотя в подобных задачах продвинуться дальше тривиальных верхних и нижних оценок часто не получается, не говоря уже о точной оценке.

Я считаю что получены интересные, красивые результаты которые вносят важный вклад в изучение задач комбинаторики, в том числе связанных с криптографией, теорией кодирования и статистикой. Доказательства корректны и статья хорошо написана.

Поэтому, я рекомендую принять статью к публикации в журнале Сибирские электронные математические известия.

Небольшие замечания по статье

1) Стоит отметить, что разбиение на подкубы одинаковой размерности является частным случаем $A(n, q, w, t)$ -дизайнов, выражение числа которых через многомерные перманенты рассматривалось в [Potapov V.N. On the multidimensional permanent and q -ary designs (<http://semr.math.nsc.ru/v11/p451-456.pdf>) // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2014. V. 11, 451–456.]

2) В формулировке Теоремы 1 где-то пропущено "такое".

3) Обозначения N^{coord} , c^{coord} , c^{coord*} нужно ввести где-то вне формулировок теорем, так как из формулировки теоремы не следует, что обозначение действует везде в статье. Лучшее место - после Теоремы 1. Что-то типа "Введём следующие обозначения:

- $N_q^{coord}(m)$ — наименьшее N из Теоремы 1,
- $c_q^{coord}(n, m)$ — число различных неупорядоченных разбиений ... ,
- $c_q^{coord*}(n, m)$ — число различных неупорядоченных A -примитивных разбиений

"

Это максимально упростит поиск нужного определения, если читателю нужно будет вспомнить обозначение.

4) Последний параграф раздела 2: "Естественно, мы могли сформулировать наши леммы и в более общем виде, однако не преследовали эту цель, ограничившись формулировкой и доказательством лемм в минимальном виде, нужном для полноты изложения наших последующих результатов."

Это можно сказать про любую лемму любой статьи. Предлагается либо удалить фразу, либо проинформировать, в каком направлении леммы могут быть обобщены, тогда это замечание что-то интересное скажет читателю.

5) В выносной формуле на с.5 слева вроде бы должно быть $\prod_{i=0}^{m-1} (n - i)^{q^i}$ или то, что написано, но без степени j , что вроде бы соответствует асимптотике справа.

6) С.5. В параграфе начинающемся с "Заметим" не совсем понятно, что такое шаг. Вроде бы как описано в предыдущем параграфе, у нас только m шагов, но согласно последующей формуле тогда надо запрещать разбиение по координатам, уже использовавшимся не только на предыдущих шагах, но и на этом шаге. Либо просто сказать, что в процессе мы разбиваем всего $(q^m - 1)/(q - 1)$ кубов, и договоримся что все $(q^m - 1)/(q - 1)$ будут разные.

7) С.7, сноска 6. Мне кажется, в этом конкретном месте уместно пояснение сделать в скобках, а не в виде сноски.

8) С.7. Свойство 1 уже содержит в себе утверждение Свойства 2. Кроме того, при прочтении Свойства 1 возникает естественный вопрос, а что такое n . Поэтому логично сформулировать свойства в таком порядке: 2, 3, и только потом 1, соответственно перенумеровав.

9) С.7, Наблюдение 1. n здесь конфликтует с n из Свойства 1. Как вариант, в Свойстве 1 n везде можно заменить на $(q^m - 1)/(q - 1)$.

10) С.8 начало "составляющие подматрицу T столбцы за пределами подматрицы $T \dots$ " звучит парадоксально. Может, "пересекающиеся с подматрицей T столбцы за пределами подматрицы $T \dots$ ". То же в Лемме 4, но про строки.

11) С.11. Начало доказательства Леммы 5 странно упорядочено, что сильно затрудняет понимание. Сначала вообще непонятно какое основание и почему не требуется доказывать, но для тупых сделана сноска, в которой сказано что можно что-то пояснить, но почему-то все равно делать это не

обязательно. И только потом говорится что по Лемме 2 порядок имеет вид kq (до чего читатель как-бы должен и сам уже догадаться если понял базу индукции, которую ему было не обязательно пояснять).

Гораздо естественнее сказать сначала, что По Лемме 2 размер любого столбца имеет вид kq , где каждая цифра повторяется в столбце q раз. Мы проведем доказательство индукцией по k . При $k = 1$ стержень столбца сам является трансфракталом, что дает базу индукции.

12) С.12. "Рис. 7. Рисунок к доказательству леммы 5". Лучше "Рис. 7. Иллюстрация к доказательству леммы 5"

13) С.12. последняя строка. Мне кажется вместо "по следствию 1" в этом месте лучше написать "по Лемме 4" (она легче читается и из нее прямо следует то что нужно)

14) С.12. строка 5 "По построению". Лучше "По условию выбора" так как никто ничего не строил, мы их выбирали в прошлом предложении.

15) С.13, строчка 4: "Рассмотрим полосу R_i и среди всех лежащих в ней стержней столбцов выберем множество T_i таких стержней столбцов, которые не покрываются другими такими стержнями."

Кажется по логике доказательства вместо "выберем множество" тут должно быть что-то вроде "выберем максимальное по включению множество". Иначе получается, что в формуле (5) мы посчитали не все столбцы из трансфракталов, и с одной стороны оценка завышена, а с другой остались дополнительные столбцы из трансфракталов (которые как раз и должны входить в формулу), но мы про них забыли и они портят итоговую оценку.

16) С.13, в доказательстве Следствия 2: "Из определения трансфрактала следует, что строки r_1 и r_2 не имеют столбца, в котором в этих строках стоят разные числа"

Мне не удалось понять, почему "следует". Понятная мне цепочка использует также Следствие 1. Предлагается написать более подробно, например, "Из определения трансфрактала и Следствие 1 следует, что строки r_1 и r_2 не имеют столбца, в котором в этих строках стоят разные числа (действительно, по определению трансфрактала такой столбец не может пересекаться ни с одним из трансфракталов с ведущим столбцом t_1 или t_2 , значит по следствию 1 он покрывает как t_1 , так и t_2 , что противоречит нашему предположению)".

17) По возможности, актуализировать ссылку [1], если есть журнальная версия принятая в печать и т.п.