О числе разбиений гиперкуба $\mathbf{Z}_q^n$ на большие подкубы

Ю. В. Таранников*

Аннотация

Доказано, что число разбиений гиперкуба $\mathbf{Z}_q^n$ на q^m подкубов размерности $n-m$ каждый при фиксированных q, m и $n \to \infty$ асимптотически равно $n^{\frac{q^m-1}{q-1}}$.

Для доказательства введена операция взрыва звездной матрицы и показано, что любая звездная матрица, кроме фрактала, расширяема некоторым взрывом, в то время как фрактал при любом взрыве остается фракталом.

Аннотация

We prove that the number of partitions of the hypercube $\mathbf{Z}_q^n$ into q^m subcubes of dimension $n-m$ each for fixed q, m and growing n is asymptotically equal to $n^{(q^m-1)/(q-1)}$.

For the proof, we introduce the operation of the bang of a star matrix and demonstrate that any star matrix, except for a fractal, is expandable under some bang, whereas a fractal remains to be a fractal under any bang.

Ключевые слова: комбинаторика, перечисление, асимптотика, разбиение, разбиение гиперкуба, подкуб, звездный паттерн, звездная матрица, фрактальная матрица, ассоциативный блок-дизайн.

УДК 519.115.5; MSC 05A18

1 Введение

Пусть q, m, n — целые числа, $q \geq 2$, $n \geq m \geq 0$. Подкубом размерности $n-m$ в $\mathbf{Z}_q^n$ называется такое подмножество наборов $\mathbf{Z}_q^n$, у которого некоторые m компонент фиксированы, а каждая из остальных $n-m$ компонент пробегает все возможные значения из $\mathbf{Z}_q$.

При *разбиении на подкубы* каждый набор из $\mathbf{Z}_q^n$ должен попасть ровно в один подкуб. Разбиение на подкубы называется *Агиевич-примитивным*, или просто *А-примитивным*[1], если каждая компонента зафиксирована хотя бы в одном из подкубов разбиения.

Наиболее известна задача о разбиении на подкубы малой размерности. Так, если все подкубы разбиения булева куба имеют размерность 1, то эти подкубы являются ребрами, а разбиения

*Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; e-mail: yutarann@gmail.com
Теоремы 4 и 5 получены при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075–15–2022–284, теоремы 7 и 6 получены за счет Российского Научного Фонда, грант №22–11–00266, `https://rscf.ru/en/project/22-11-00266/`.

[1] Агиевич в [5] ввел для этого понятия (в более общем случае разбиения на аффинные подпространства) термин «примитивный», однако использование этого термина небесспорно, поскольку он характеризует скорее некоторую невырожденность разбиения. Кроме того, подобного рода невырожденность разбиения можно определять разными способами, а слово «примитивный» в математике вообще перегружено. В то же время давать другой термин тоже представляется неправильным, поэтому в [4] было предложено называть такое разбиение *примитивным по Агиевичу* или *А-примитивным*. Заметим, что в [2] авторы использовали для этого же понятия термин «*tight*», который также не представляется нам «точным».

называются совершенными паросочетаниями, и задача об их числе хорошо известна. В [1] рассматриваются задачи разбиения булева куба на подкубы, преимущественно малых размерностей, которые в том числе могут быть разными в составе одного разбиения.

Разбиения на подкубы (не обязательно одной размерности) с дополнительным условием неприводимости исследуются в [2]. Разбиениям на одномерные подкубы в не обязательно двоичном случае посвящена работа [3].

Главным предметом изучения в [4] были разбиения на аффинные подпространства, а для разбиений на подкубы, являющихся частным случаем разбиений на аффинные подпространства, доказаны следующие утверждения, ориентированные на разбиения на подкубы одинаковой большой размерности.

Теорема 1. *[4] Пусть $q \geq 2$. Для любого натурального m существует наименьшее натуральное $N = N_q^{\mathrm{coord}}(m)$, что при $n > N$ не существует A-примитивных разбиений $\mathbf{Z}_q^n$ на q^m подкубов размерности $n-m$.*

Теорема 2. *[4] Справедлива формула*

$$c_q^{\mathrm{coord}}(n,m) = \sum_{h=m}^{N_q^{\mathrm{coord}}(m)} \binom{n}{h} c_q^{\mathrm{coord}*}(h,m), \tag{1}$$

где $c_q^{\mathrm{coord}}(n,m)$ — число различных неупорядоченных разбиений $\mathbf{Z}_q^n$ на q^m подкубов размерности $n-m$; $c_q^{\mathrm{coord}*}(n,m)$ — число различных неупорядоченных A-примитивных разбиений $\mathbf{Z}_q^n$ на q^m подкубов размерности $n-m$; $\binom{n}{h}$ — обычный биномиальный коэффициент.

Теорема 3. *[4] Пусть q и m фиксированы, $n \to \infty$. Тогда имеет место асимптотика*

$$c_q^{\mathrm{coord}}(n,m) \sim C' n^{N_q^{\mathrm{coord}}(m)},$$

где $C' = \frac{c_q^{\mathrm{coord}*}(N_q^{\mathrm{coord}}(m),m)}{N_q^{\mathrm{coord}}(m)!}$.

Также в [4] получены оценки $\frac{q^m-1}{q-1} \leq N_q^{\mathrm{coord}}(m) \leq m \cdot q^{m-1}$ и установлены точные значения $N_q^{\mathrm{coord}}(2) = q+1$.

Главным результатом настоящей работы является следующая теорема 6, полное доказательство [2] которой будет получено в конце работы после введения необходимых понятий и доказательства вспомогательных утверждений.

Теорема 6. *Пусть q, m — фиксированные натуральные числа, $q > 1$. Тогда при $n \to \infty$ справедлива асимптотика*

$$c_q^{\mathrm{coord}}(n,m) \sim n^{\frac{q^m-1}{q-1}}. \tag{2}$$

[2]Заметим, что в 2024 г. нами были направлены на конференцию «Проблемы теоретической кибернетики» следующие теоремы 4 и 5 без доказательств.

Теорема 4. *Имеют место точные значения $N_2^{\mathrm{coord}}(4) = 15$, $N_2^{\mathrm{coord}}(5) = 31$, $N_q^{\mathrm{coord}}(3) = q^2+q+1$, $c_2^{\mathrm{coord}*}(15,4) = 15!$, $c_2^{\mathrm{coord}*}(31,5) = 31!$, $c_q^{\mathrm{coord}*}(q^2+q+1,3) = (q^2+q+1)!$.*

Теорема 5. *При $n \to \infty$ справедливы асимптотики $c_2^{\mathrm{coord}}(n,4) \sim n^{15}$, $c_2^{\mathrm{coord}}(n,5) \sim n^{31}$, $c_q^{\mathrm{coord}}(n,3) \sim n^{q^2+q+1}$.*

Доказательства теорем 4 и 5, полученные первоначально существенно другим методом, в настоящей работе не приводятся, поскольку их утверждения являются частными случаями теорем 7 и 6, соответственно.

2 Звездные матрицы разбиений и их свойства

Звездным паттерном подкуба гиперкуба $\mathbf{Z}_q^n$ называется набор длины n над $\mathbf{Z}_q \cup \{*\}$, где элементы $\mathbf{Z}_q$ соответствуют зафиксированным компонентам, в то время как $*$ соответствует «свободной» компоненте.

Например, набор $(0, *, 1, 0, *)$ является звездным паттерном следующего подкуба в $\mathbf{Z}_2^5$:

$$\begin{aligned} \{ \quad & (0,0,1,0,0), \\ & (0,0,1,0,1), \\ & (0,1,1,0,0), \\ & (0,1,1,0,1) \quad \}. \end{aligned}$$

Матрица, по строкам которой выписаны звездные паттерны всех подкубов разбиения, называется *звездной матрицей* разбиения.

Например, звездная матрица

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & * \\ 0, & 1, & * \\ 1, & *, & 0 \\ 1, & *, & 1 \end{pmatrix}$$

задает разбиение $\mathbf{Z}_2^3$ на 2^2 подкубов размерности $3-2=1$ каждый.

Легко видеть, что разбиение $\mathbf{Z}_q^n$ на q^m подкубов одинаковой размерности $n-m$ задается звездной матрицей, имеющей в точности q^m строк и n столбцов, и является A-примитивным тогда и только тогда, когда его звездная матрица не содержит столбца из одних $*$. Звездную матрицу A-примитивного разбиения будем также называть *A-примитивной.*

Заметим, что частным случаем разбиения на подкубы являются *ассоциативные блок-дизайны (АБД),* которые были введены Ривестом [6] для использования в алгоритмах хеширования и изучались в ряде работ (см., например, [7, 8, 9, 10]). АБД — это разбиение $\mathbf{Z}_2^n$ на подкубы одинаковой размерности с дополнительным требованием: в матрице разбиения каждый столбец содержит одно и то же число звездочек. Из определения очевидно, что АБД является A-примитивным разбиением. В работах по АБД были развиты элементы техники изучения звездных матриц, которые полезны и в более общем, чем АБД, случае.

Размером столбца звездной матрицы будем называть количество чисел в нем. *Перекрытием* двух столбцов будем называть множество строк, в которых эти столбцы одновременно содержат числовые значения, а количество таких строк — *размером перекрытия.* Если размер перекрытия двух столбцов равен нулю, то мы говорим, что эти столбцы *не перекрываются,* а если размер перекрытия совпадает с размером одного из столбцов, то мы будем говорить, что столбец меньшего размера *вложен* в столбец большего размера. Подматрицу ширины 1, состоящую из всех чисел, входящих в столбец, и только из них, будем называть *стержнем* столбца.

Утверждение теоремы 6 явится следствием из теоремы 7, в которой будут установлены точные значения величин $N_q^{\mathrm{coord}}(m)$ и $c_q^{\mathrm{coord}*}\big(N_q^{\mathrm{coord}}(m), m\big)$. В свою очередь, для установления значений, выписанных в формулировке теоремы 7, будет произведен анализ A-примитивных звездных матриц размера $q^m \times N_q^{\mathrm{coord}}(m)$. Дадим формулировки и доказательства нескольких нужных нам лемм о строении звездных матриц.

Лемма 1. *В звездной матрице разбиения гиперкуба $\mathbf{Z}_q^n$ для любых двух различных строк найдется столбец, имеющий в этих строках разные значения из $\mathbf{Z}_q$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть в звездной матрице разбиения найдутся две различные строки, для которых нет столбца, имеющего в этих строках разные значения из $\mathbf{Z}_q$. Тогда можно заменить звездочки в этих строках на числа так, что обе строки станут одинаковыми. Получившийся набор принадлежит обоим подкубам, задаваемым звездными паттернами строк, поэтому эти подкубы пересекаются, чего в разбиении быть не может. □

Лемма 2. *В звездной матрице M разбиения гиперкуба $\mathbf{Z}_q^n$ на подкубы одинаковой размерности в любом столбце все значения из $\mathbf{Z}_q$ встречаются одинаковое число раз.*

Доказательство. Рассмотрим i-й столбец матрицы M. Если некоторая строка звездной матрицы M имеет $*$ в i-м столбце, то соответствующий подкуб для каждого $a \in \mathbf{Z}_q$ содержит в точности q^{n-m-1} наборов со значением a в i-м столбце. Если некоторая строка звездной матрицы имеет a в i-м столбце, $a \in \mathbf{Z}_q$, то все q^{n-m} наборов соответствующего подкуба имеют a в i-м столбце. Любой набор из $\mathbf{Z}_q^n$ принадлежит в точности одному подкубу разбиения. Отсюда вытекает утверждение леммы 2. □

Лемма 3. *Пусть M — звездная матрица разбиения гиперкуба $\mathbf{Z}_q^n$ на подкубы одинаковой размерности, i и j — номера двух ее различных столбцов и π — некоторая перестановка из S_q. Рассмотрим множество R всех таких строк из M, которые одновременно имеют в столбцах i и j числовые значения из $\mathbf{Z}_q$. Тогда сумма $(m_{r,i} + \pi(m_{r,j})) \pmod q$, взятая по всем строкам r из R, принимает каждое значение из $\mathbf{Z}_q$ одинаковое число раз.*

Доказательство. Если для всех наборов $a = (a_1, \ldots, a_n)$ из $\mathbf{Z}_q^n$ рассмотреть сумму $(a_i + \pi(a_j)) \pmod q$, то эта сумма, очевидно, будет принимать каждое из q значений из $\mathbf{Z}_q$ одинаковое число раз. Если рассмотреть такую сумму для всех наборов подкуба, звездный паттерн которого содержит звездочку хотя бы в одном из двух разрядов i и j, то эта сумма тоже, очевидно, будет принимать каждое из q значений из $\mathbf{Z}_q$ одинаковое число раз, потому что наборы из подкуба объединяются в этом случае в подмножества по q наборов, отличающихся только в разряде, соответствующем звездочке, и сумма $(a_i + \pi(a_j)) \pmod q$ на наборах подмножества принимает каждое из q значений по одному разу (потому что сумма по модулю q — групповая операция). Следовательно, для совокупности подкубов, соответствующих строкам из R, сумма $(a_i + \pi(a_j)) \pmod q$ по всем наборам из этих подкубов должна принимать каждое из q значений из $\mathbf{Z}_q$ одинаковое число раз. Однако для наборов из подкуба, соответствующего строке r из R сумма $(a_i + \pi(a_j)) \pmod q$ принимает одно и то же значение, равное $(m_{r,i} + \pi(m_{r,j})) \pmod q$, а подкубы по условию содержат одинаковое количество наборов. Отсюда следует утверждение леммы 3. □

Леммы, близкие к приведенным выше, в чем-то более общие, в чем-то более частные, содержатся в [6, 7, 8, 9, 10, 11].

Естественно, мы могли сформулировать наши леммы и в более общем виде, однако не преследовали эту цель, ограничившись формулировкой и доказательством лемм в минимальном виде, нужном для полноты изложения наших последующих результатов.

3 Очевидная нижняя асимптотическая оценка числа разбиений

Нижняя асимптотическая оценка

$$c_q^{\mathrm{coord}}(n, m) \geq n^{\frac{q^m - 1}{q - 1}} (1 + o(1)) \tag{3}$$

является очевидной. Заметим, что ее необязательно доказывать отдельно, потому что асимптотика величины $c_q^{\mathrm{coord}}(n, m)$, представленная в формуле (2) теоремы 6, получится автоматически из теоремы 3 после того, как мы в теореме 7 установим точные значения величин $N_q^{\mathrm{coord}}(m) = \frac{q^m - 1}{q - 1}$ и

$c_q^{\mathrm{coord}*}(\frac{q^m-1}{q-1}, m) = \left(\frac{q^m-1}{q-1}\right)!$. Тем не менее, сейчас мы приведем рассуждения, показывающие справедливость оценки (3), поскольку эти рассуждения позволят прочувствовать смысл и важность фрактальной матрицы, определение которой мы дадим в следующем разделе.

Итак, разрежем гиперкуб $\mathbf{Z}_q^n$ по одной из координат на q подкубов[3] размерности $n-1$. Это можно сделать n способами. Каждый из q получившихся подкубов разрежем одним из $n-1$ способов по одной из его оставшихся координат на подкубы размерности $n-2$ и т. д., пока не получим разбиение на q^m подкубов размерности $n-m$ каждый. Описанный выше процесс можно осуществить

$$\prod_{i=0}^{m-1} \prod_{j=1}^{q^i} (n-i)^j \sim n^{\frac{q^m-1}{q-1}}$$

способами.

Заметим, что некоторые из этих способов приведут к одинаковым разбиениям. Можно было бы доказать, что доля повторов будет асимптотически мала, но мы поступим более просто и надежно. На каждом из шагов запретим осуществлять разбиение по координатам, уже использовавшимся на предыдущих шагах для хотя бы одного из подкубов. Все равно у нас число множителей конечно (потому что q и m конечны), а n стремится к бесконечности.

При таком ограничении разбиения, очевидно, будут получаться разными, а их число равно

$$\prod_{i=1}^{\frac{q^m-1}{q-1}} (n-i+1) \sim n^{\frac{q^m-1}{q-1}},$$

т. е. асимптотически, несмотря на ограничения, окажется тем же самым.

Тем самым справедливость оценки (3) установлена.

Заметим, что описанными выше процедурами можно получить не все разбиения. Так, например, в разбиении, задаваемом звездной матрицей, приведенной в статье Ривеста [6], разрез исходного гиперкуба по любой из координат приведет к разрезанию некоторых подкубов разбиения, потому что в каждом столбце есть звездочки (см. рис. 1). Поэтому вопрос о верхней оценке величины $c_q^{\mathrm{coord}}(n,m)$ требует дополнительного исследования, которое мы проведем в данной работе.

$$M_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & 0 \\ 1 & 0 & 0 & * \\ * & 1 & 0 & 0 \\ 1 & * & 1 & 0 \\ 1 & 1 & * & 1 \\ 0 & 1 & 1 & * \\ * & 0 & 1 & 1 \\ 0 & * & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рис. 1. Звездная матрица со звездочками во всех столбцах.

[3] Если кого-то смущает, что одним разрезом гиперкуб разделяется на q подкубов, то можно представить, как после одного срезания корешка книги она распадается на несколько блоков.

4 Фрактальные звездные матрицы и их свойства

Введем матрицы $M_{q,m}$ рекурсивно следующим образом. Матрица $M_{q,0}$ имеет одну строку и нуль столбцов[4], матрица $M_{q,m}$, $m = 1, \ldots$, определяется через матрицу $M_{q,m-1}$, как представлено на рис. 2, где $\ast_{q,m-1}$ — матрица того же размера, что и $M_{q,m-1}$, но состоящая из одних звездочек.

$$M_{q,m} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & M_{q,m-1} & \ast_{q,m-1} & \cdots & \ast_{q,m-1} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} & \ast_{q,m-1} & M_{q,m-1} & \cdots & \ast_{q,m-1} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \begin{matrix} q-1 \\ \vdots \\ q-1 \end{matrix} & \ast_{q,m-1} & \ast_{q,m-1} & \cdots & M_{q,m-1} \\ \hline \end{array}$$

Рис. 2. Рекурсивная конструкция фрактальной матрицы.

Матрицы $M_{q,m}$ мы будем называть *фрактальными* звездными матрицами, или просто *фракталами*[5].

Приведем примеры фрактальных звездных матриц (см. рис.3):

$$M_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 1 & * & 0 \\ 1 & * & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & 1 & * & * & * \\ 1 & * & * & * & 0 & 0 & * \\ 1 & * & * & * & 0 & 1 & * \\ 1 & * & * & * & 1 & * & 0 \\ 1 & * & * & * & 1 & * & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 2 & * & * \\ 1 & * & 0 & * \\ 1 & * & 1 & * \\ 1 & * & 2 & * \\ 2 & * & * & 0 \\ 2 & * & * & 1 \\ 2 & * & * & 2 \end{pmatrix}.$$

Рис. 3. Примеры фрактальных матриц.

Матрицы, получающиеся из фрактальных перестановкой строк и столбцов, мы также будем называть фрактальными.

[4]Если матрица с одной строкой и нулем столбцов кому-то кажется казуистической, то можно начинать с матрицы $M_{q,1}$, имеющей q строк и один столбец и представляющей собой вертикальный столбец из выписанных подряд в возрастающем порядке всех чисел из $\mathbf{Z}_q$.

[5]Такое название выбрано потому, что матрицы $M_{q,m}$ обладают некоторым самоподобием.

Замечание 1. Ясно, что перестановка строк звездной матрицы задает другое упорядоченное, но то же самое неупорядоченное разбиение на подкубы.

Замечание 2. Можно было бы определить, как фрактальную, звездную матрицу, получающуюся из фрактальной заменой в некотором ее столбце всех числовых символов в соответствии с некоторой перестановкой π из S_q, но делать это необязательно, потому что такая матрица автоматически будет фрактальной в силу уже данных определений, поскольку ее можно получить перестановкой строк и столбцов исходной звездной матрицы. Действительно, если перестановку π числовых символов применить к самому левому столбцу матрицы $M_{q,m}$ на рис. 2, то такого же результата можно добиться и перестановками π^{-1} горизонтальных и вертикальных полос[6].

Несложно проверить, что фрактальная звездная матрица обладает свойствами, которые будут перечислены дальше по ходу этого раздела.

Свойство 1. *Фрактальная звездная матрица $M_{q,m}$ задает разбиение гиперкуба $\mathbf{Z}_q^n$ на q^m подкубов размерности $n-m$ каждый.*

Доказательство. Непосредственно следует по индукции из задания рекурсивной конструкции матрицы $M_{q,m}$. □

Свойство 2. *Число строк во фрактальной звездной матрице $M_{q,m}$ равно q^m.*

Доказательство. Следует по индукции из рекурсивного определения фрактала. □

Свойство 3. *Число столбцов во фрактальной звездной матрице $M_{q,m}$ равно $\frac{q^m-1}{q-1}$.*

Доказательство. Индукция по m. При $m=0$ число столбцов равно $\frac{q^0-1}{q-1}=0$. Пусть утверждение верно при $m-1$. Тогда для параметра m число столбцов по определению фрактальной матрицы равно $1+q\cdot\frac{q^{m-1}-1}{q-1}=\frac{q^m-1}{q-1}$, что и требовалось доказать. □

Наблюдение 1. *Фрактальная звездная матрица после вставки в нее столбцов из одних звездочек до общего количества столбцов, равного n, превращается в звездную матрицу разбиения, получающуюся последовательностью разрезов, представленной во второй части раздела 3 для доказательства асимптотической нижней оценки (3).*

Свойство 4. *Число различных неупорядоченных разбиений, задаваемых фрактальными матрицами с параметрами q и m, равно в точности $\left(\frac{q^m-1}{q-1}\right)!$.*

Доказательство. Мы уже отметили в замечании 1, что перестановка строк не дает нового неупорядоченного разбиения. В свойстве 3 мы установили, что во фрактальной матрице с указанными параметрами в точности $\frac{q^m-1}{q-1}$ столбцов. То, что все перестановки столбцов дают разные разбиения гиперкуба, можно понять из обдумывания процесса разрезов гиперкуба, описанного во второй части раздела 3, а можно воспользоваться индуктивной процедурой построения фрактала. Действительно, пусть утверждение верно для $m-1$, тогда для m имеем, что число различных разбиений равно

$$\frac{q^m-1}{q-1}\cdot\binom{\frac{q^m-1}{q-1}-1}{\frac{q^{m-1}-1}{q-1},\ldots,\frac{q^{m-1}-1}{q-1}}\left(\left(\frac{q^{m-1}-1}{q-1}\right)!\right)^q=\left(\frac{q^m-1}{q-1}\right)!,$$

что и требовалось доказать. □

[6]Вертикальные полосы отсчитываются без учета самого левого столбца.

Будем говорить, что подматрица[7] T звездной матрицы является *трансфракталом,* если она является фракталом[8] и все составляющие подматрицу T столбцы за пределами подматрицы T состоят из одних звездочек.

На рисунке 4 черной рамкой выделен трансфрактал.

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & * & * & * \\
0 & 0 & 1 & * & * & * \\
0 & 1 & 0 & * & * & * \\
0 & 1 & 1 & * & * & * \\
1 & * & * & 0 & 0 & * \\
1 & * & * & 0 & 1 & * \\
1 & * & * & 1 & * & 0 \\
1 & * & * & 1 & * & 1
\end{pmatrix}
$$

Рис. 4. Пример трансфрактала выделен черной рамкой.

Число строк в трансфрактале будем называть *размером трансфрактала.* Входящий в состав трансфрактала столбец, размер которого совпадает с размером трансфрактала, будем называть *ведущим столбцом* трансфрактала. Из определения фрактала легко видеть, что у любого трансфрактала в точности один ведущий столбец. Стержень ведущего столбца трансфрактала будем называть также *стержнем трансфрактала.* На рис. 4 красным выделен стержень трансфрактала. *Размером стержня трансфрактала* будем называть размер трансфрактала.

Наблюдение 2. *Все числовые элементы трансфрактала покрываются непересекающимся образом стержнем ведущего столбца и q трансфракталами меньшего размера.*

Доказательство. По построению фрактала. □

Наблюдение 3. *Каждый столбец фрактала является ведущим столбцом некоторого трансфрактала.*

Доказательство. По построению фрактала. □

Лемма 4. *Пусть в звездной матрице M разбиения гиперкуба $\mathbf{Z}_q^n$ на подкубы одинаковой размерности есть подматрица T, являющаяся трансфракталом. Тогда все составляющие подматрицу T строки за пределами подматрицы T полностью совпадают как строки.*

Доказательство. Доказательство индукцией по размеру трансфрактала. По свойству 2 фрактала размер трансфрактала есть степень числа q.

Пусть размер трансфрактала T равен q. Тогда по лемме 2 ведущий столбец $\vec{t}$ трансфрактала T содержит каждое число из $\mathbf{Z}_q$ ровно один раз. Рассмотрим столбец $\vec{s}$, лежащий за пределами трансфрактала T. По лемме 3 размер перекрытия столбцов $\vec{s}$ и $\vec{t}$ должен делиться на q. Значит, он или 0, или q. Если размер перекрытия равен 0, то в строках подматрицы T в столбце $\vec{s}$ стоят одни

[7]Строки и столбцы подматрицы в исходной матрице не обязаны идти подряд, на некоторых последующих рисунках строки и столбцы подматрицы изображены в исходной матрице идущими подряд исключительно для удобства восприятия.

[8]Естественно, мы считаем, что у трансфрактала параметр q такой же, как и у содержащей его звездной матрицы.

звездочки, и, значит, все такие строки в столбце $\vec{s}$ совпадают. Пусть размер перекрытия столбцов $\vec{s}$ и $\vec{t}$ равен q, т. е. в строках подматрицы T в столбце $\vec{s}$ стоят только числа. Предположим, в этом перекрытии в столбце $\vec{s}$ найдутся два разных числовых значения: $m_{r_1,s} \neq m_{r_2,s}$. Мы уже констатировали, что $m_{r_1,t} \neq m_{r_2,t}$, поэтому можно подобрать перестановку $\pi \in S_q$ так, чтобы выполнялось $(m_{r_1,t} + \pi(m_{r_1,s})) \pmod q = (m_{r_2,t} + \pi(m_{r_2,s})) \pmod q$, например, положив $\pi(m_{r_1,s}) = m_{r_2,t}$, $\pi(m_{r_2,s}) = m_{r_1,t}$. Однако это сразу же приводит к противоречию с утверждением леммы 3. Следовательно, оказалось неверным предположение о двух разных числовых значениях в столбце $\vec{s}$ в его перекрытии со столбцом $\vec{t}$. Поэтому все строки трансфрактала T в столбце $\vec{s}$ совпадают. В качестве столбца $\vec{s}$ можно было взять любой столбец за пределами трансфрактала T, поэтому утверждение леммы доказано для трансфрактала T с числом строк q, что составляет основание индукции.

Докажем теперь индуктивный переход. Пусть утверждение леммы верно для трансфракталов размера q^{l-1}. Рассмотрим трансфрактал с q^l строками. По строению фрактала (свойство 2) и лемме 2 ведущий столбец $\vec{t}$ трансфрактала содержит каждое значение из $\mathbf{Z}_q$ ровно q^{l-1} раз. Тем самым трансфрактал T разбивается на q полос с одинаковым значением в столбце $\vec{t}$ внутри каждой полосы. По строению трансфрактала в каждой из полос есть ведущий столбец размера q^{l-1} меньшего трансфрактала. Отсюда по индуктивному предположению для каждой из q полос все строки этой полосы совпадают за пределами трансфрактала T. Рассмотрим произвольный столбец $\vec{s}$, лежащий за пределом трансфрактала T. Из сказанного выше, внутри каждой из q полос в столбце $\vec{s}$ находится один и тот же элемент (число или звездочка). Отсюда каждая пара элементов $(m_{r,t}, m_{r,s})$ в q^l строках трансфрактала T дублируется по q^{l-1} раз. Воспользуемся леммой 3. Сгруппируем q^{l-1} совпадающих значений в столбцах $\vec{t}$ и $\vec{s}$ в каждой полосе в одно значение. Это не нарушит результат анализа утверждения леммы 3 применительно к числу совпадающих значений сумм по модулю q. Таким образом, мы перешли к двум столбцам высоты q каждый, для которых можно повторить рассуждения из доказательства основания индукции доказываемой нами леммы. Тем самым мы показываем, что все строки трансфрактала T в столбце $\vec{s}$ совпадают. В силу произвольности выбора столбца $\vec{s}$ за пределами трансфрактала T мы доказали индуктивный переход, а с ним и всю лемму. □

Следствие 1. *Пусть $\vec{t}$ — столбец, входящий в состав трансфрактала T, а $\vec{s}$ — столбец, внешний по отношению к T. Тогда столбцы $\vec{t}$ и $\vec{s}$ либо не перекрываются, либо столбец $\vec{t}$ покрывается столбцом $\vec{s}$, причем в последнем случае каждое число столбца $\vec{t}$ лежит в одной строке с одним и тем же числом a в столбце $\vec{s}$.*

5 Операция взрыва звездной матрицы

Введем операцию взрыва звездной матрицы. Операцию определяем только для звездных матриц А-примитивных разбиений на подкубы одинаковой размерности.

Пусть M — звездная матрица А-примитивного разбиения на подкубы одинаковой размерности. Выбираем столбец $\vec{i}$ и значение a из $\mathbf{Z}_q$. Осуществляем следующие действия.

- 1. Удаляем столбец $\vec{i}$.
- 2. Удаляем все строки, в которых в столбце $\vec{i}$ находилось числовое значение, отличное от a.
- 3. Каждую из строк, в которых в столбце $\vec{i}$ находилось числовое значение a, дублируем до q одинаковых строк.

- 4. Для каждой из образовавшихся полос из q одинаковых строк приписываем к матрице столбец, в котором за пределами полосы одни звездочки, а в пределах полосы — каждое числовое значение по одному разу.

- 5. Если в матрице есть столбцы из одних звездочек, то удаляем их.

Описанная последовательность действий определяет *операцию взрыва*[9] звездной матрицы M. Иногда мы для удобства вместо взрыва матрицы будем говорить о взрыве столбца $\vec{i}$, подразумевая те же самые действия.

Если i-й столбец содержал kq чисел, то при его взрыве из матрицы удалилось $k(q-1)$ строк, но столько же и добавилось за счет дублирования, поэтому общее число строк осталось тем же. В строках со звездочками в i-м столбце чисел не удалялось и не появлялось, а в строках, получившихся из строки с числом a в i-м столбце, это число a исчезло, но добавилось число во вновь приписанном столбце. Таким образом, общее количество чисел во всех строках осталось одинаковым и таким же, как в матрице M. Несложно видеть, что любые две строки получившейся матрицы будут содержать разные числа хотя бы в одном столбце — проблемы по ходу возникали только с дублирующимися строками, но они получили различные числовые значения во вновь приписанном столбце. Наконец, в силу последней операции в матрице не будет столбцов из одних звездочек. Таким образом, в результате взрыва получится А-примитивная звездная матрица, являющаяся матрицей разбиения на такое же число подкубов одинаковой размерности, что и исходная матрица M. Однако число столбцов в матрице может измениться.

Опишем неформально, что происходит при взрыве с разбиением. Сначала фактически происходит удаление из пространства i-й координаты. Остаются только те наборы, которые имели числовое значение a в i-й компоненте. При этом если звездный паттерн подкуба содержал звездочку в i-й компоненте, то размерность подкуба уменьшается на 1; подкубы с числовым значением в i-й компоненте, отличным от a, полностью пропадают; подкубы с числовым значением в i-й компоненте, равным a, полностью остаются. Таким образом, в разбиении оказываются подкубы разных размерностей, которые могут отличаться на 1. Однако приписывание новых столбцов вновь уравнивает размерности — к звездным паттернам меньших подкубов приписываются одни звездочки, и каждая такая звездочка увеличивает размерность на 1, а к звездным паттернам больших подкубов один раз припишется число — и за счет этого размерности уравняются.

Приведем пример взрыва звездной матрицы. Процесс взрыва представлен на рис. 5.

Для примера мы взяли матрицу из статьи Ривеста [6]. Здесь $q = 2$. Взрываем левый столбец со значением 0. Взорванный столбец удаляется из матрицы; удаляются также 2-я, 4-я и 5-я строки, как имеющие во взорванном столбце числовые значения, отличные от 0; в то же время 1-я, 6-я и 8-я строки, как имеющие во взорванном столбце 0, расщепляются на две каждая, после чего для каждой пары клонированных строк справа приписываем свой столбец, в котором в строках из этой пары стоят по разу значения из $\mathbf{Z}_2$ (т. е. 0 и 1), а в остальных строках звездочки. Таким образом, всего приписано три новых столбца. Столбцов из одних звездочек в результате взрыва не получилось, поэтому ничего больше удалять не надо.

Получившуюся в результате взрыва звездную матрицу взорвем снова. Процесс повторного взрыва представлен на рис. 6.

Вновь взрываем левый столбец со значением 0. Взорванный столбец удаляется из матрицы; удаляются также 3-я, 4-я и 5-я строки, как имеющие во взорванном столбце числовые значения, отличные от 0; в то же время 1-я, 2-я и 6-я строки, как имеющие во взорванном столбце 0, расщепляются на две, после чего для каждой пары клонированных строк справа приписываем свой столбец, в котором в строках из этой пары стоят по разу значения из $\mathbf{Z}_2$ (т. е. 0 и 1), а в остальных строках

[9] Термин «взрыв» для описанного процесса представляется нам точным. Действительно, при взрыве уничтожаются некоторые столбцы и строки, еще часть строк расщепляется, а куски их содержимого улетают в сторону.

$$
\begin{array}{cccc}
0&0&\ast&0\\
1&0&0&\ast\\
\ast&1&0&0\\
1&\ast&1&0\\
1&1&\ast&1\\
0&1&1&\ast\\
\ast&0&1&1\\
0&\ast&0&1
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{cccc}
0&0&\ast&0\\
1&0&0&\ast\\
\ast&1&0&0\\
1&\ast&1&0\\
1&1&\ast&1\\
0&1&1&\ast\\
\ast&0&1&1\\
0&\ast&0&1
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{cccccc}
0&\ast&0&0&\ast&\ast\\
0&\ast&0&1&\ast&\ast\\
1&0&0&\ast&\ast&\ast\\
1&1&\ast&\ast&0&\ast\\
1&1&\ast&\ast&1&\ast\\
0&1&1&\ast&\ast&\ast\\
\ast&0&1&\ast&\ast&0\\
\ast&0&1&\ast&\ast&1
\end{array}
$$

Рис. 5. Пример взрыва звездной матрицы.

$$
\begin{array}{cccccc}
0&\ast&0&0&\ast&\ast\\
0&\ast&0&1&\ast&\ast\\
1&0&0&\ast&\ast&\ast\\
1&1&\ast&\ast&0&\ast\\
1&1&\ast&\ast&1&\ast\\
0&1&1&\ast&\ast&\ast\\
\ast&0&1&\ast&\ast&0\\
\ast&0&1&\ast&\ast&1
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{cccccc}
0&\ast&0&0&\ast&\ast\\
0&\ast&0&1&\ast&\ast\\
1&0&0&\ast&\ast&\ast\\
1&1&\ast&\ast&0&\ast\\
1&1&\ast&\ast&1&\ast\\
0&1&1&\ast&\ast&\ast\\
\ast&0&1&\ast&\ast&0\\
\ast&0&1&\ast&\ast&1
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{cccccccc}
\ast&0&0&\ast&\ast&0&\ast&\ast\\
\ast&0&0&\ast&\ast&1&\ast&\ast\\
\ast&0&1&\ast&\ast&\ast&0&\ast\\
\ast&0&1&\ast&\ast&\ast&1&\ast\\
1&1&\ast&\ast&\ast&\ast&\ast&0\\
1&1&\ast&\ast&\ast&\ast&\ast&1\\
0&1&\ast&\ast&0&\ast&\ast&\ast\\
0&1&\ast&\ast&1&\ast&\ast&\ast
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{ccccccc}
\ast&0&0&\ast&0&\ast&\ast\\
\ast&0&0&\ast&1&\ast&\ast\\
\ast&0&1&\ast&\ast&0&\ast\\
\ast&0&1&\ast&\ast&1&\ast\\
1&1&\ast&\ast&\ast&\ast&0\\
1&1&\ast&\ast&\ast&\ast&1\\
0&1&\ast&0&\ast&\ast&\ast\\
0&1&\ast&1&\ast&\ast&\ast
\end{array}
$$

Рис. 6. Повторный взрыв.

звездочки. Таким образом, всего приписано три новых столбца. При этом образовался столбец из одних звездочек — удаляем его из матрицы.

Если приглядеться, то можно заметить, что получившаяся 8×7 матрица является фрактальной. Как мы поймем в дальнейшем, это не случайно.

6 Нерасширяемые звездные матрицы

Звездную матрицу A-примитивного разбиения на подкубы одинаковой размерности назовем *расширяемой,* если при некотором взрыве количество столбцов в ней увеличивается. Соответственно, звездную матрицу A-примитивного разбиения на подкубы одинаковой размерности назовем *нерасширяемой,* если количество столбцов в ней не увеличивается при любом взрыве.

В этом разделе мы покажем, что нерасширяемыми являются только фрактальные матрицы.

Лемма 5. *Пусть A-примитивная звездная матрица M разбиения гиперкуба $\mathbf{Z}_q^n$ на подкубы одинаковой размерности является нерасширяемой. Тогда всякий ее столбец имеет размер, равный степени числа q, и стержень этого столбца является стержнем ведущего столбца некоторого трансфрактала.*

Доказательство. Доказательство индукцией по размеру столбца. Основание индукции доказывать не требуется.[10] Рассмотрим столбец $\vec{s}$ размера kq (по лемме 2 размер любого столбца делится на q). По индуктивному предположению для всех столбцов меньшего размера утверждение леммы 5 выполнено, докажем его для столбца $\vec{s}$.

Осуществим взрыв столбца $\vec{s}$ при значении 0. По определению взрыва из матрицы удалится столбец $\vec{s}$ и добавятся k новых столбцов за счет расщепления строк полосы R_0, состоящей из всех строк матрицы M, имевших значение 0 в столбце $\vec{s}$. Также, возможно, удалится некоторое количество столбцов, которые станут состоять из одних звездочек. Оценим количество таких столбцов (см. рис. 7).

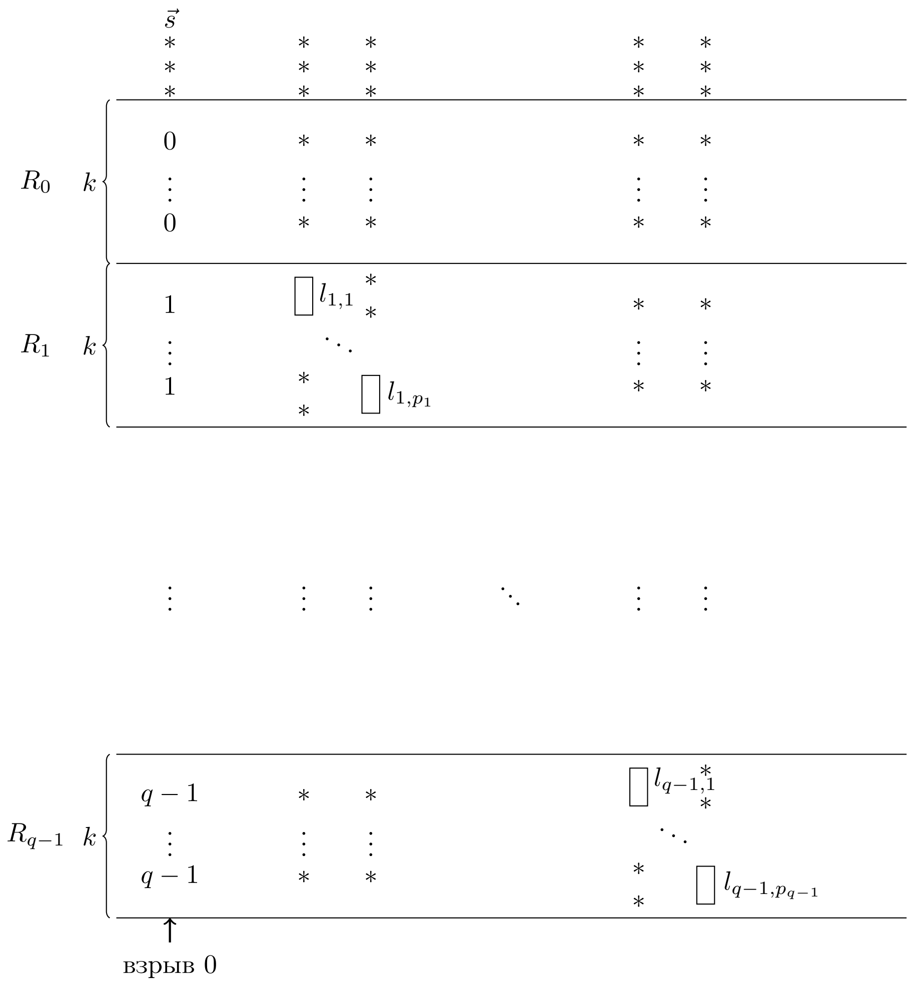

Рис. 7. Рисунок к доказательству леммы 5.

Пусть в столбце $\vec{t}$ матрицы M все числа пропадают при взрыве. Из определения взрыва легко видеть, что столбец $\vec{t}$ должен покрываться столбцом $\vec{s}$, причем строки с числами столбца $\vec{t}$ не могут иметь разных чисел в столбце $\vec{s}$ по следствию 1, поскольку по индуктивному предположению

[10] Можно указать, что стержень столбца размера q является стержнем ведущего столбца трансфрактала размера q с одним этим столбцом, но делать это не обязательно.

столбец $\vec{t}$ является ведущим столбцом некоторого трансфрактала, а столбец $\vec{s}$ по отношению к этому трансфракталу является внешним. Поэтому стержень столбца $\vec{t}$ должен находиться в одной из $q-1$ полос R_i размера k, где i-я полоса состоит из всех k строк матрицы M, имеющих значение i в столбце $\vec{s}$, $i = 1, \ldots, k-1$. Рассмотрим полосу R_i и среди всех лежащих в ней стержней столбцов выберем множество T_i таких стержней столбцов, которые не покрываются другими такими стержнями. По построению стержни из T_i являются стержнями ведущих столбцов попарно не содержащихся друг в друге трансфракталов. Следовательно, по следствию 1 стержни из T_i попарно не перекрываются. Пусть их размеры есть $l_{i,1}, \ldots, l_{i,p_i}$. Из попарного неперекрывания следует, что

$$\sum_{j=1}^{p_i} l_{i,j} \leq k. \tag{4}$$

По индуктивному предположению все стержни из T_i имеют размер, равный степени числа q, и являются стержнями ведущих столбцов некоторых трансфракталов, все столбцы которых также пропадут при взрыве. Число столбцов в трансфрактале мы знаем из определений трансфрактала, фрактала и свойства 3. Поэтому число N столбцов, которые при взрыве будут удалены из матрицы, можно оценить, учитывая (4), как

$$N = 1 + \sum_{i=1}^{q-1} \sum_{j=1}^{p_i} \frac{q^{\log_q l_{i,j}} - 1}{q-1} = 1 + \sum_{i=1}^{q-1} \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{p_i} l_{i,j} \right) - p_i}{q-1} \leq 1 + \sum_{i=1}^{q-1} \frac{k-1}{q-1} = k, \tag{5}$$

причем из неравенства в (5) легко видеть, что равенство $N = k$ может достигаться, только если все $p_i = 1$ и все $l_{i,1} = k$, $i = 1, \ldots, q-1$, т. е. когда все множества T_i состоят из одного стержня, размер которого равен числу строк в полосе R_i. Осуществляя взрыв столбца $\vec{s}$ со значением 1, получаем такое же требование для полосы R_0.

Отсюда следует, что число столбцов в матрице M не увеличится при некотором взрыве столбца $\vec{s}$, только если столбец $\vec{s}$ является ведущим столбцом трансфрактала и его размер kq есть степень числа q. Тем самым завершено доказательство индуктивного перехода. □

Следствие 2. *Пусть матрица M является нерасширяемой. Тогда матрица M является фрактальной матрицей.*

Доказательство. По лемме 5 каждый столбец матрицы M является ведущим столбцом некоторого трансфрактала. Предположим, что в матрице M есть два столбца $\vec{t}_1$ и $\vec{t}_2$, не покрывающиеся друг другом и никакими другими столбцами. Тогда по следствию 1 столбцы $\vec{t}_1$ и $\vec{t}_2$ не перекрываются. Возьмем строку $\vec{r}_1$ с числом в столбце $\vec{t}_1$ и возьмем строку $\vec{r}_2$ с числом в столбце $\vec{t}_2$. Из определения трансфрактала следует, что строки $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ не имеют столбца, в котором в этих строках стоят разные числа, что противоречит лемме 1 и сделанному предположению о наличии столбцов $\vec{t}_1$ и $\vec{t}_2$.

Значит, в матрице M есть столбец $\vec{t}_1$, покрывающий все остальные столбцы. Тогда столбец $\vec{t}_1$ должен содержать числа во всех строках, потому что если он содержит звездочку в некоторой строке r, то, ввиду отсутствия в M строки из одних звездочек, найдется столбец $\vec{t}_2$ с числом в строке r, но тогда столбец $\vec{t}_2$ не покрывается столбцом $\vec{t}_1$, что противоречит сделанному выше утверждению. Таким образом, столбец $\vec{t}_1$ содержит числа во всех строках и, следовательно, столбец $\vec{t}_1$ является ведущим столбцом всей матрицы M, которая, в свою очередь, является фрактальной матрицей. □

Наблюдение 4. *Фрактальная матрица является нерасширяемой.*

Доказательство. Этот факт можно проследить по доказательству леммы 5. Впрочем, делать это не обязательно, поскольку любая другая матрица, кроме фрактальной, по следствию 2 является расширяемой, а нерасширяемые матрицы существовать должны ввиду ограниченности по теореме 1 числа столбцов в А-примитивных матрицах при фиксированных q и m. □

7 Главные теоремы

Теорема 7. *Имеют место точные значения* $N_q^{\mathrm{coord}}(m) = \frac{q^m-1}{q-1}$, $c_q^{\mathrm{coord}*}\left(\frac{q^m-1}{q-1}, m\right) = \left(\frac{q^m-1}{q-1}\right)!$.

Доказательство. Вытекает из следствия 2, наблюдения 4 и свойства 4. □

Асимптотическая формула (2), выписанная в **теореме 6**, вытекает из теорем 3 и 7.

Следствие 3. *Пусть q, m — фиксированные натуральные числа, $q > 1$. Тогда при $n \to \infty$ число разбиений гиперкуба $\mathbf{Z}_q^n$ на подкубы размерности не менее $n - m$ асимптотически равно $n^{\frac{q^m-1}{q-1}}$.*

Доказательство. Для числа разбиений на подкубы размерности не менее $n - m$, очевидно, справедлива формула, аналогичная формуле (1), т. е. вопрос сводится к нахождению максимального числа столбцов в А-примитивных матрицах, содержащих в каждой строке не более m числовых значений. Однако если какая-то строка содержит менее m числовых значений, то соответствующий подкуб можно расщепить по новой координате на подкубы меньшей размерности, аналогично тому, как делалось по ходу операции взрыва, что приводит к увеличению столбцов матрицы. Поэтому максимальное число столбцов может быть достигнуто только на матрице, содержащей ровно m чисел в каждой строке, т. е. на матрице А-примитивного разбиения на подкубы размерности $n - m$ каждый. □

8 Заключение

Любая звездная матрица, за исключением фрактала, при некотором взрыве расширяется, а фрактал остается фракталом при любом взрыве.

Any star matrix, excepting a fractal, expands under some bang, whereas a fractal remains to be a fractal under any bang.

Список литературы

[1] **N. Alon, J. Balogh, V. N. Potapov.** Partitioning the hypercube into smaller hypercubes // ArXiv.org. 2024. arXiv:2401.00299v2 .

[2] **Y. Filmus, E. A. Hirsch, S. Kurz, F. Ihringer, A. Riazanov, A. V. Smal, M. Vinuals.** Irreducible Subcube Partitions // The Electronic Journal of Combinatorics. 2023. Vol. 30, № 3. Article Number P. 3.29.

[3] **V. N. Potapov.** Clique matchings in the k-ary n-dimensional cube // Siberian Mathematical Journal. 2011. Vol. 52, No. 2, pp. 303–310.

[4] **Yu. V. Tarannikov.** On the existence of Agievich-primitive partitions // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2022. V. 16, № 4. P. 809–820.

[5] **S. Agievich.** Bent rectangles // Proceedings of the NATO advanced study institute on Boolean functions in cryptology and information security, Amsterdam: IOS Press, 2008. P. 3–22. (NATO science for peace and security Series D: Information and communication security, Vol. 18).

[6] **R. L. Rivest.** On hash-coding algorithms for partial-match retrieval // Proceedings of the 15th Annual Symposium on Switching and Automata Theory, October 1974. 1974. P. 95–103.

[7] **A. E. Brouwer.** On associative block designs // Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976), North-Holland, Amsterdam. 1978. Vol. 18. P. 173–184.

[8] **J. H. van Lint.** $\{0, 1, *\}$-distance problems in combinatorics // Surveys in combinatorics: invited papers for the tenth British Combinatorial Conference, Glasgow, UK, July 22-26, 1985, Ed. I. Anderson). 1985. Cambridge: Cambridge University Press, P. 113–135.

[9] **J. H. van Lint, R. M. Wilson.** A Course in Combinatorics, Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 602 pp.

[10] **J. A. La Poutré.** A theorem on associative block designs //Discrete Math. 1986. Vol. 58, P. 205–208.

[11] **V. N. Potapov.** DP-colorings of uniform hypergraphs and splittings of Boolean hypercube into faces // Electron. J. Comb. 2022. V. 29, No. 3, ID P3.37. 7 pp.