

Рецензия на статью Е.Г. Родиковой и К.В. Кислаковой
**Сравнение весовых классов аналитических функций в круге
функций с ограничениями на характеристику Неванлинны и
Джрбашяна,**

для журнала «Сибирские электронные математические известия»

Исследования в статье дополняют теорию Неванлинны распределения значений мероморфных и голоморфных функций и её развитий в работах М.М. Джрбашяна и Ф.А. Шамояна, а также их учеников и последователей, к коим относятся и авторы статьи. Дальнейшее обсуждение статьи сопровождается моими замечаниями, порой критическими. Ниже обозначения близки к авторским, но могут несколько отличаться. Так, \mathbb{R} и \mathbb{C} — соответственно действительная прямая и комплексная плоскость. Библиографические ссылки те же, что и в статье.

Для чисел $\alpha > -1$ в обозначениях $x^+ := \max_{x \in \mathbb{R}}\{x, 0\}$ и Γ для гамма-функции Эйлера определяется известная α -характеристика Джрбашяна

$$T_\alpha(r, f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r^{-\alpha-1}}{2\pi\Gamma(\alpha+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^r (r-t)^\alpha \ln|f(te^{i\varphi})| dt \right)^+ d\varphi \quad (1)$$

При этом классическая характеристика Неванлинны вычисляется и как

$$T(r, f) = \lim_{-1 < \alpha \rightarrow -1} T_\alpha(r, f). \quad (2)$$

Замечание 1. Во первом абзаце введения почему-то в определении α -характеристики Джрбашяна написано $\alpha > -2$, хотя при $-1 \geq \alpha > -2$ положительные части внутренних интегралов в (1) равны $\pm\infty$ при каждом $r \in (0, 1)$, при котором $|f(re^{i\varphi})| \neq 1$, а характеристика $T_\alpha(r, f)$, вообще говоря, конечна при всех $r \in (0, 1)$ только для постоянных f с $|f| = 1$. Таким образом, из её конечности при $\alpha \in (-2, -1)$ следует её равенство нулю. Надеюсь, что $\alpha > -2$ — это просто описка авторов.

Замечание 2. В первом же абзаце введения функция \ln^+ определена, но не определена положительная часть x^+ произвольного действительного числа x , что на самом деле участвует в определении α -характеристики Джрбашяна. Надо бы определить, а возражения типа «и так понятно» как-то не очень приемлемы. Встречал ряд работ, где положительная часть обозначалась, к примеру, нижним индексом x_+ и проч.

Замечание 3. Вместо (2) в начале второй страницы написано равенство $T_{-1}(r, f) = T(r, f)$, которое по замечанию 2 верно только для $|f| = 1$.

Для $p \in (0, +\infty)$ и измеримой функции $\omega: (0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$, всюду ниже удовлетворяющей ограничениям

$$0 < \liminf_{1 > \lambda \rightarrow 1} \inf_{r > 0} \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leq \limsup_{1 > \lambda \rightarrow 1} \sup_{r > 0} \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} < +\infty, \quad (3)$$

в классе $\text{Hol}(\mathbb{D})$ всех голоморфных функций на открытом единичном круге $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ и ранее рассматривались классы

$$N_{\omega, \alpha}^p := \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \mid \int_0^1 \omega(1-r) T_\alpha^p(r, f) \, dr < +\infty \right\},$$

$$S_{\omega, \alpha}^p := \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) \mid \int_0^1 (1-r)^\alpha \omega(1-r) T^p(r, f) \, dr < +\infty \right\}.$$

Основной результата статьи, максимально обобщающий более ранний результат первого автора с конкретными $\omega(t) = t^\alpha$, — это

Теорема 1. $N_{\omega, \alpha}^p = S_{\omega, (\alpha+1)p}^p$ при любых $p \in (0, +\infty)$ и $\alpha > -1$.

Доказательство этой теоремы во втором разделе в части при $p > 1$ особых нареканий, если исключить мелкие замечания из списка ниже, не вызывает. Но в случае $0 < p < 1$ рассуждения со страницы 9 вызывают вопросы и даже сомнения. При оценках J_k сверху получаем неравенства вида $J_k \lesssim \dots$ с точностью до множителя. Потом происходит суммирование по k с аналогичным выводом для $I_2^p(r) \lesssim \dots$. Но если не знать множитель в $J_k \lesssim \dots$, то такое суммирование с неравенством \lesssim не правомочно. Считаю, что с этим авторы должны детально разобраться.

Приведем список также менее важных замечаний.

- Опечатка в «дифференцирования» на стр. 2 перед теоремой А.
- Теоремы Б, В, В, Д и лемма Г на стр. 3–4 должны быть, по-видимому, курсивом.
- Строки 8–10 снизу на стр. 4 — это тривиальное $u_\alpha = u_\alpha^+ - u_\alpha^-$, если предварительно определить, конечно, положительную и отрицательную части функции во введении. Сюда же впишется \ln^+ .
- В предпоследней строке на стр. 4 используется обозначение SH_ω^p для некоторого весового класса субгармонических функций без определения, а лишь со ссылкой. Потенциальный читатель и, тем более, рецензент не обязаны штудировать все труды, имеющие отношение к Вашей статье, или же помнить обозначения

из них. Необходимо определять все обозначения в статье, если только это не совсем уж общепринятое типа \mathbb{N} и т.п. И то лучше определить, если место позволяет. Думаю, в СЭМИ ограничения на число страниц не такие уж и жёсткие.

- Из той же серии, что и предыдущее. Ссылки на источники, щадя читателя, желательно давать как можно подробнее — [номер ссылки], номера главы, параграфа, теоремоподобного утверждения или формулы. Местами соблюдено, но часто и поверхностно.
- Стр. 5, 4–5-ая строки сверху — надо «интеграла $A(G)$ » и «интеграл $B(G)$ ».
- После формулы (9) — ветвь логарифмической функции, положительная на положительной полуоси или как?
- Стр. 5, 9-ая строка снизу — «где $\gamma > \dots$ » подразумевает «для любого $\gamma > \dots$ »? Если имеется ввиду квантор всеобщности, то надо это прописывать.
- Стр. 7, 8-ая строка сверху — фразу «интеграл \dots является *монотонно возрастающей* функций» следует пояснить или сослаться на что-то. То же самое встречается для ψ на стр. 9 во второй строке.
- Следствие в самом конце статьи надо привести с кратким или не очень доказательством с пояснениями в рамках статьи [6]. В СЭМИ ограничения на объём, видимо, не столь жёсткие, чтобы ограничиваться 11 страницами.

Считаю, что статья представляет собой полезное исследование в развивающейся области теории голоморфных функций в круге и актуальна для переноса результатов с одного класса функций на другой — так, как это удачно сделано в следствии в конце. После её достаточной доработки, особенно в части доказательства теоремы 1 согласно комментарию после её формулировки выше, а также по иным замечаниям и пожеланиям из списка выше, публикация статьи Е.Г. Родиковой и К.В. Кисляковой «**Сравнение весовых классов аналитических функций в круге функций с ограничениями на характеристику Неванлинны и Джрбашяна**» после исправления отмеченных недостатков и дополнительного рецензирования в журнале «**Сибирские электронные математические известия**» целесообразна. Готов рассмотреть вариант с исправлениями и правкой авторов.

С наилучшими пожеланиями,
рецензент. 07 декабря 2024 г.