

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ  
ИНФОРМАЦИИ В ОНЛАЙН СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ  
В РАМКАХ ПРИНЦИПА СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Т.А. Звонарева, О.И. Криворотько

*Представлено М.А. Шишлениным*

**Abstract:** The paper formulates and numerically studies the direct and inverse problems for the mean field game model, which describes the process of information dissemination in online social networks taking into account external influences. The mean field game model is reduced to a joint solution of initial-boundary value problems for the Kolmogorov-Fokker-Planck (KFP) and Hamilton-Jakobi-Bellman (HJB) equations, as well as the Nash optimality condition. Based on the Sobol global sensitivity analysis, the sensitivity of the control parameters and the initial condition of the KFP problem to the function of measuring the user density at a fixed time from the moment of information dissemination is shown. An algorithm for numerically solving inverse problems for the KFP and HJB equations that differ in the control function is constructed based on Bayesian optimization. It is shown that the reconstructed initial user density of the network describes the synthetic data of the inverse problem with greater accuracy in the case of fixed control, which is optimal for the exact solution of the inverse problem.

---

ZVONAREVA T.A., KRIVOROTKO O.I., MODILING OF THE INFORMATION  
DISSEMINATION IN ONLINE SOCIAL NETWORKS BASED ON MEAN-FIELD APPROACH.

© 2024 Звонарева Т.А., Криворотько О.И.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2024-0002 «Обратные некорректные задачи и машинное обучение в биологических, социально-экономических и экологических процессах».

*Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.*

**Keywords:** mean field control, source determination problem, inverse problem, optimization.

## 1 Введение

Социальные сети стали неотъемлемой частью нашей жизни, они способны влиять на различные аспекты общества. Активное развитие в последнее время получила область социальной информатики [1] — междисциплинарная область, в которой предпринимаются попытки использовать большие данные и сложные алгоритмы для решения задач из социальных наук. Но с развитием социальных сетей также возникают различные негативные моменты такие как, например, распространение неподтвержденной информации, доступ к персональным данным. В период распространения эпидемии COVID-19, социальные сети оказывали значительное влияние на общественное отношение (к вакцинации, строгости изоляции и др.), даже появился термин «инфодемия», который обозначает быстрое и широкое распространение как точной, так и неточной информации об эпидемии. Поэтому актуальность управления информацией в онлайн социальных сетях растет.

Процессы распространения информации при некоторых допущениях можно описать в рамках математических моделей. Модель SIR-типа была применена для описания распространения научных идей в 1964 году [2] и основана на обыкновенных дифференциальных уравнениях (ОДУ). В статье рассматривалось множество авторов ( $N = S + I + R$ ), написавших статьи по некоторой дисциплине, где  $I$  — авторы, написавшие статьи с некоторой идеей,  $R$  — авторы, которые по тем или иным причинам больше не выпускают работы с этой идеей.

Пороговая модель коллективного поведения [3] основана на статистическом моделировании. Автор изучал выбор агента, являющегося свидетелем протеста, «действовать» или «не действовать» и рассматривал изменение доли агентов, присоединившихся к бунту.

Независимая каскадная модель передачи информации из уст в уста [4] может быть рассмотрена как стохастический клеточный автомат. В статье рассматривается множество сетей, где связи между вершинами одной сети — сильные, а связи между узлами из разных сетей — слабые. Процесс протекает в виде дискретных шагов, и на каждом шаге неактивный узел может стать активным с некоторой вероятностью.

Диффузионно-логистическая модель (ДЛМ) распространения информации в онлайн социальных сетях [5] основана на уравнениях в частных производных. Авторы исследовали плотность пользователей, вовлеченных в процесс распространения информации, где под расстоянием понималось минимальное число дружеских связей между источником

(пользователем, создавшим информацию) и любым другим пользователем конкретной социальной сети. Было показано [6], что ДЛМ хорошо описывает динамику распространения информации, но не учитывает внешние воздействия (сдерживание распространения информации, продвижение желаемой новости и др.).

Современные работы по математическому моделированию социальных процессов посвящены моделям среднего поля и управлению средним полем. Например, в работе [7] автор исследовал динамику популяций с помощью модели среднего поля, предложил численный метод определения управления, основанный на методе градиентного спуска, и провел несколько численных экспериментов. В работе [8] модель игры среднего поля динамики мнений в социальных сетях рассматривает большую популяцию сетей (социальных групп), характеризующихся управляемым изменяющимся во времени поведением/состоянием/характеристиками. А функционал стоимости формулировался так, чтобы группа корректировала мнение и приближала его к среднему мнению других групп.

Модели среднего поля формулировались также и на основе SIR-моделей. Например, в работе [9] авторы исследуют модель игры среднего поля для управления распространением эпидемий в пространственной области, для предложенной модели предложены быстрые численные алгоритмы. В работе [10] описывается способ применения известных экономических моделей среднего поля для прогнозирования распространения COVID-19, а также приведен численный алгоритм решения задачи минимизации функционала стоимости. При некоторых ограничениях на Гамильтониан системы задачу среднего поля можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати [11].

В теории игр среднего поля рассматривались также постановки и методы решения обратных задач. Например, в статье [7] рассматривается задача восстановления функции управления градиентным методом. В работе [12] исследовалась задача восстановления слагаемых функционала стоимости градиентным методом.

В данной работе в разделе 2 предложена постановка модели среднего поля, основанная на комбинации ДЛМ описания распространения информации в социальных сетях и введения управления, схожего с эпидемиологическими ограничениями в условиях пандемии. В разделе 3 описана конечно-разностная схема решения задачи среднего поля, состоящей в совместном решении уравнений Колмогорова—Фоккера—Планка и Гамильтона—Якоби—Беллмана, начальные условия для которых заданы на разных концах временного интервала. Отличительной особенностью данной работы является анализ глобальной чувствительности модели среднего поля к измерениям интегральной плотности вовлеченных агентов в зависимости от времени (раздел 4). Данный анализ позволил сформулировать обратную задачу для модели среднего поля, состоящей в идентификации плотности начального распределения пользователей

в социальной сети по измерениям плотности в некоторые последующие моменты времени.

## 2 Модель среднего поля для описания процесса распространения информации

**2.1. Постановка начально-краевой задачи для диффузионно-логистической модели.** Для описания распространения информации в онлайн социальных сетях была предложена диффузионно-логистическая модель (ДЛМ) [6, 13]:

$$\begin{cases} u_t = Du_{xx} + \left(1 - \frac{u}{K_{cap}}\right) r(t)u, & x \in [0, 1], t \geq 1, \\ u(x, 1) = \varphi(x), & x \in [0, 1], \\ \beta_1 u_x(0, t) - \beta_2 u(0, t) = 0, u_x(1, t) = 0, & \beta_1, \beta_2 > 0, t \geq 1. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $u(x, t) \geq 0$  — плотность пользователей, вовлеченных в процесс распространения информации,  $D > 0$  — коэффициент диффузии,  $K_{cap} \geq \max_{(x,t) \in [0,1] \times [1,+\infty)} u(x, t)$  — константа, описывающая максимальную пропускную способность сети, а  $r(t)$  — скорость роста числа активных пользователей.

В работах [13, 14, 15] численно исследовалась задача определения начальной функции плотности  $\varphi(x) \geq 0$  по дополнительным данным о плотности пользователей при  $\beta_1 = 1$  и  $\beta_2 = 0$ . Были рассмотрены два вида дополнительных данных о плотности: в различных точках пространства и в различные моменты времени, а также интегральные данные в различные моменты времени. Обратная задача была сведена к задаче минимизации целевого функционала и решалась глобальными методами роя частиц, оптимизации тензорного произведения, локальными градиентными методами, методом Нелдера—Мида, а также комбинациями глобальных и локальных методов. На основе анализа сингулярных чисел оператора линеаризованной обратной задачи было показано, что рассматриваемая обратная задача некорректна, поэтому для построения решения обратной задачи применялись гиперболическая регуляризация и регуляризация А.Н. Тихонова. Было показано, что гиперболическая регуляризация незначительно улучшает решение обратной задачи, а применение регуляризации А.Н. Тихонова позволяет найти устойчивое решение поставленной обратной задачи.

Было показано [6], что ДЛМ хорошо описывает динамику распространения информации, но не учитывает внешние воздействия (сдерживание распространения информации, продвижение желаемой новости и др.). Поэтому мы рассматриваем модель среднего поля, чтобы изучить оптимальное управление процессом.

**2.2. Формулировка задачи управления.** Пусть под  $x \in [0, 1]$  понимается состояние пользователя, где 0 означает, что пользователь вовлечен в процесс распространения информации, а 1 — не вовлечен. И задача состоит в том, чтобы остановить распространение информации, то есть найти управление, при котором  $u^\alpha(0, t) = 0$ . Тогда предположение о том, что пользователи рациональны, то есть склонны выбирать стратегию, которая максимизирует выгоду, порождает задачу минимизации функционала стоимости, который отражает затраты пользователей в процессе распространения информации:

$$J(u^\alpha, \alpha) = \int_1^T \int_0^1 \left( d_1 \frac{u^\alpha \alpha^2}{2} + d_2 (x-1)^2 u^\alpha \right) dx dt. \quad (2)$$

Здесь  $d_1, d_2 > 0$  — весовые коэффициенты,  $\alpha(x, t) : [0, 1] \times [1, T] \rightarrow \mathbb{R}$  — стратегия пользователей, а плотность пользователей  $u^\alpha(x, t) : [0, 1] \times [1, T] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  удовлетворяет модели с уравнением типа Колмогорова—Фоккера—Планка (КФП):

$$\begin{cases} u_t^\alpha + \nabla(u^\alpha \alpha) + \left( \frac{u^\alpha}{K_{cap}} - 1 \right) r(t) u^\alpha - D u_{xx}^\alpha = 0, \\ u^\alpha(x, 1) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1], \\ \beta_1 u_x^\alpha(0, t) - \beta_2 u^\alpha(0, t) = 0, \quad u_x^\alpha(1, t) = 0, \quad \beta_1, \beta_2 > 0, \quad t \in [1, T]. \end{cases} \quad (3)$$

Для  $\alpha = 0$  начально-краевая задача (3) исследована в работе [14] и совпадает с задачей (1).

Задача среднего поля заключается в определении оптимальной стратегии и плотности пользователей социальной сети  $(u^{\alpha^*}, \alpha^*)$ , являющиеся решением задачи минимизации функционала стоимости:

$$(u^{\alpha^*}, \alpha^*) = \arg \min_{u^\alpha, \alpha} J(u^\alpha, \alpha), \quad (4)$$

где  $u^\alpha(x, t)$  удовлетворяет начально-краевой задаче для уравнения КФП (3).

**2.3. Вывод модели среднего поля.** Справедлива следующая лемма.

**Лемма 1.** Система с уравнением типа КФП (3) и система с уравнением типа Гамильтона—Якоби—Беллмана (ГЯБ)

$$\begin{cases} v_t + \alpha v_x + \left( 1 - \frac{2u^\alpha}{K_{cap}} \right) r(t) v + D v_{xx} = -d_1 \frac{\alpha^2}{2} - d_2 (x-1)^2, \\ v(x, T) = 0, \quad x \in [0, 1], \\ D v_x(0, t) + \left( \alpha(0, t) - D \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) v(0, t) = 0, \quad v_x(1, t) = 0, \quad t \in [1, T] \end{cases} \quad (5)$$

вместе с условием оптимальности

$$\begin{cases} d_1 \alpha + v_x = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [1, T], \\ \alpha(1, t) = 0, \quad t \in [1, T] \end{cases} \quad (6)$$

дают необходимые условия решения задачи минимизации (4).

*Доказательство.* По аналогии с работой [10] с помощью метода множителей Лагранжа [16] можно определить оптимальную стратегию пользователей  $\alpha^*$ . Для этого уравнение в (3) умножим на произвольную гладкую функцию  $v(x, t) \in C^\infty([0, 1] \times [1, T])$ :

$$L = \int_1^T \int_0^1 \left[ u_t^\alpha + \nabla(u^\alpha \alpha) + \left( \frac{u^\alpha}{K_{cap}} - 1 \right) r(t) u^\alpha - D u_{xx}^\alpha \right] v \, dx dt = 0. \quad (7)$$

Распишем подробно каждое слагаемое.

Используя формулу интегрирования по частям и начальные условия в (3) и (5), получаем следующее выражение для первого слагаемого:

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_0^1 \int_1^T u_t^\alpha v \, dt dx = \int_0^1 \left( u^\alpha v \Big|_1^T - \int_1^T u^\alpha v_t \, dt \right) dx \\ &= \int_0^1 [u^\alpha(x, T)v(x, T) - u^\alpha(x, 1)v(x, 1)] \, dx - \int_0^1 \int_1^T u^\alpha v_t \, dt dx \\ &= - \int_0^1 \varphi(x)v(x, 1) \, dx - \int_0^1 \int_1^T u^\alpha v_t \, dt dx. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в (7) после применения интегрирования по частям с учетом граничного условия в (6) имеет вид

$$\begin{aligned} L_2 &= \int_1^T \int_0^1 \nabla(u^\alpha \alpha) v \, dx dt = \int_1^T \left( u^\alpha \alpha v \Big|_0^1 - \int_0^1 u^\alpha \alpha v_x \, dx \right) dt \\ &= \int_1^T [u^\alpha(1, t)\alpha(1, t)v(1, t) - u^\alpha(0, t)\alpha(0, t)v(0, t)] \, dt - \int_1^T \int_0^1 u^\alpha \alpha v_x \, dx dt \\ &= - \int_1^T u^\alpha(0, t)\alpha(0, t)v(0, t) \, dt - \int_1^T \int_0^1 u^\alpha \alpha v_x \, dx dt. \end{aligned}$$

Третье слагаемое в (7) остается неизменным:

$$L_3 = \int_1^T \int_0^1 \left( \frac{u^\alpha}{K_{cap}} - 1 \right) r(t) u^\alpha v \, dx dt = \int_1^T \int_0^1 \left( \frac{u^\alpha}{K_{cap}} - 1 \right) r(t) v u^\alpha \, dx dt.$$

Четвертое слагаемое в (7) после двукратного применения интегрирования по частям с учетом краевых условий в (3) и правого краевого

условия в (3) имеет вид

$$\begin{aligned}
L_4 &= -D \int_1^T \int_0^1 u_{xx}^\alpha v \, dx dt = -D \int_1^T \left( u_x^\alpha v \Big|_0^1 - \int_0^1 u_x^\alpha v_x \, dx \right) dt \\
&= -D \int_1^T [u_x^\alpha(1, t)v(1, t) - u_x^\alpha(0, t)v(0, t)] \, dt + D \int_1^T u^\alpha v_x \Big|_0^1 dt \\
&\quad - D \int_1^T \int_0^1 u^\alpha v_{xx} \, dx dt = D \int_1^T \left[ \frac{\beta_2}{\beta_1} u^\alpha(0, t)v(0, t) - u^\alpha(0, t)v_x(0, t) \right] dt \\
&\quad - D \int_1^T \int_0^1 u^\alpha v_{xx} \, dx dt.
\end{aligned}$$

Складывая выражения для  $L_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , получим

$$\begin{aligned}
L &= \int_1^T \int_0^1 \left[ v_t + \alpha v_x + \left( 1 - \frac{u}{K_{cap}} \right) r(t)v + Dv_{xx} \right] u^\alpha \, dx dt \\
&\quad + \int_0^1 \varphi(x)v(x, 1) \, dx = 0.
\end{aligned}$$

Данное выражение справедливо при условии

$$Dv_x(0, t) + \left( \alpha(0, t) - D \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) v(0, t) = 0, \quad t \in [1, T].$$

Теперь функция Лагранжа, соответствующая рассматриваемой задаче минимизации (4), может быть записана в виде

$$\mathcal{L}(u^\alpha, \alpha, v) = J(u^\alpha, \alpha) - L.$$

Вариация  $\mathcal{L}$  по  $u^\alpha$ , то есть  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha}$ , приводит к системе с уравнением типа ГЯБ (5).

А вариация  $\mathcal{L}$  по  $\alpha$ , то есть  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha}$ , приводит к условию оптимальности (6), решение которого  $\alpha = \alpha^*$ .  $\square$

Таким образом, решением задачи среднего поля называются функции  $u^\alpha(x, t)$ ,  $v(x, t)$  и  $\alpha(x, t)$ , которые удовлетворяют системам (3) и (5) вместе с (6).

### 3 Численное решение прямой задачи для модели среднего поля

Прямая задача заключается в определении функций  $u^\alpha(x, t)$ ,  $v(x, t)$  и  $\alpha(x, t)$  из уравнений КФП, ГЯМ и условия оптимальности при заданных  $\varphi(x)$ ,  $d_1$  и  $d_2$ .

Модель среднего поля, состоящая из систем (3), (5) и (6), численно решалась с помощью конечно-разностной схемы, предложенной в работах [10, 17, 18, 19]. Значения функций  $u$  и  $v$  рассчитывались на равномерных сетках по времени  $t_l = l\tau$ ,  $l = 0, \dots, N_t$ ,  $\tau = (T - 1)/N_t$  и пространству  $x_{j+1/2} = (j + 1/2)h$ ,  $j = -1, \dots, N_x$ ,  $h = 1/N_x$ . Использовалась схема с порядком аппроксимации  $O(\tau + h^2)$ , где левые граничные условия приближались следующим образом:

$$u_{l,-1/2}^\alpha = \frac{2\beta_1 - h\beta_2}{2\beta_1 + h\beta_2} u_{l,1/2}, \quad v_{l,-1/2} = \frac{D/h - (D\beta_2/\beta_1 - \alpha_0^l)/2}{D/h + (D\beta_2/\beta_1 - \alpha_0^l)/2} v_{l,1/2}.$$

Решения КФП и ГЯБ сводится к виду

$$A^1 u = g^1, \quad A^2 v = g^2,$$

где  $A^1$  и  $A^2$  — разностные аппроксимации производных соответствующих функций по времени и пространству,  $g^1$  и  $g^2$  — разностные аппроксимации правых частей и слагаемых с управлением.

Значения же функции  $\alpha$ , в отличие от функций  $u$  и  $v$ , рассчитывались на равномерной сетке по пространству  $x_j = jh$ ,  $j = 0, \dots, N_x$ ,  $h = 1/N_x$ .

В численных экспериментах полагаем  $T = 24$ ,  $N_x = N_t = 336$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,  $d_1 = 100$ ,  $d_2 = 1$ .

Для моделирования прямой задачи (3), (5), (6) функция начальной плотности пользователей  $\varphi(x)$  определялась из вектора  $q^{exact} \in \mathbb{R}^d$  интерполяцией кубическими сплайнами [14]. Значения параметров  $q^{exact} = (5.8, 1.7, 1.9, 1, 0.95, 0.7)$ ,  $d = 6$  эмитируют данные новостного сайта Digg.com, представленные в [6]. Согласно [6]  $K_{cap} = 25$ ,  $D = 0.01$  и скорость роста числа вовлеченных пользователей со временем  $r(t)$  имеет вид

$$r(t) = \frac{r_2}{r_1} - e^{-r_1(t-1)} \left( \frac{r_2}{r_1} - r_3 \right), \quad \text{где } r_1 = 1.5, \quad r_2 = 0.375, \quad r_3 = 1.65.$$

Алгоритм 1 решения прямой задачи представлен далее.

При численном моделировании полагалось  $\varepsilon = 0.001$ .

**3.1. Модель без управления ( $\alpha = 0$ ).** На рисунке 1 показаны графики (а) плотности вовлеченных пользователей  $u_{l,j}^0$  модели с уравнением типа КФП (3) при  $\alpha = 0$  (значение функционала в таком случае  $J(u^\alpha, \alpha) = 122.78$ ) и (б) график абсолютной разности  $|u_{l,j}^0 - u_{l,j}|$ ,  $l = 0, \dots, N_t$ ,  $j = -1/2, \dots, N_x + 1/2$ . Здесь  $u_{l,j}$  — плотность вовлеченных пользователей, удовлетворяющая ДЛМ (1). Можно видеть, что разность

**Алгоритм 1** решения прямой задачи

**Вход:** Начальная функция плотности пользователей  $\varphi(x)$ , коэффициенты функционала стоимости  $d_1, d_2$ .

- 1: Положить  $\alpha = 0$ .
- 2: Получить  $u^\alpha$ , удовлетворяющую системе (3), и посчитать значение функционала стоимости  $J_0 = J(u^\alpha, \alpha)$ .
- 3: **Пока**  $|J_n - J_{n-1}| > \varepsilon$  **выполнять**
- 4:   Вычислить  $v$ , удовлетворяющую системе (5).
- 5:   Получить новое управление  $\alpha$ , удовлетворяющее системе (6).
- 6:   Получить новую функцию плотности  $u^\alpha$ , удовлетворяющую системе (3).
- 7:   Вычислить новое значение функционала стоимости  $J_n = J(u^\alpha, \alpha)$ .
- 8: **Конец цикла**

не превосходит значения 0.035. При этом отличия в значениях обусловлены тем, что для решения ДЛМ применялся явный конечно-разностный метод решения, в котором определение решения на следующем слое по времени происходил поэтапно (см. [13]).

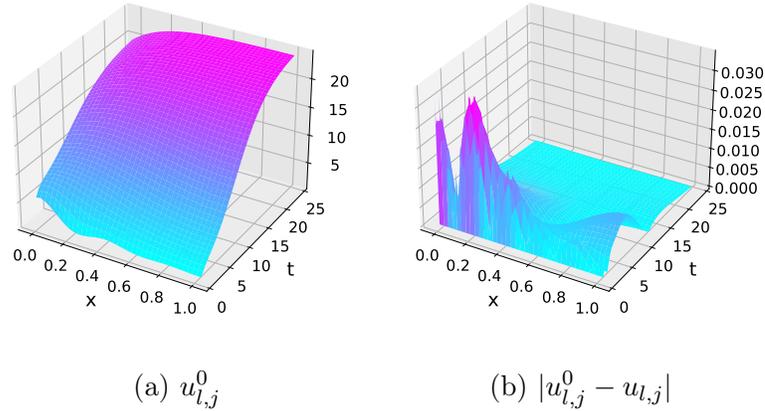


Рис. 1. Графики (а) плотности вовлеченных пользователей  $u_{l,j}^0$  модели с уравнением типа КФП (3) при  $\alpha = 0$  и (б) график абсолютной разности  $|u_{l,j}^0 - u_{l,j}|$ ,  $l = 0, \dots, N_t$ ,  $j = -1/2, \dots, N_x + 1/2$ .

**3.2. Модель с управлением ( $\alpha \neq 0$ ).** На рисунке 2 представлены графики (а) плотности вовлеченных пользователей  $u_{l,j}^\alpha$  модели с уравнением типа КФП (3), (б) функции стоимости  $v_{l,j}$  модели с уравнением

типа ГЯБ (5) и (с) функции управления  $\alpha_{l,j}$ , удовлетворяющей условию оптимальности (6). На последней итерации алгоритма 1 решения прямой задачи значение функционала составляло  $J(u^\alpha, \alpha) = 32.49$ . Целью было остановить распространение информации, то есть минимизировать плотность вовлеченных пользователей при  $x = 0$ . Можно видеть, что при найденной функции управления  $\alpha$  цель достигается почти для всех  $t$ . Здесь значения функции  $\alpha$  соответствуют реакции пользователей на новость, то есть в нулевой момент времени пользователи активно реагируют (положительно либо отрицательно), и с течением времени эта реакция затухает.

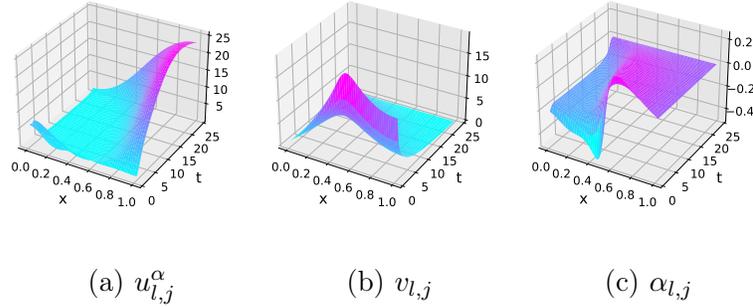


Рис. 2. Графики (а) плотности вовлеченных пользователей  $u_{l,j}^\alpha$  модели с уравнением типа КФП (3), (б) функции стоимости  $v_{l,j}$  модели с уравнением типа ГЯБ (5),  $l = 0, \dots, N_t, j = -1/2, \dots, N_x + 1/2$  и (с) функции управления  $\alpha_{l,j}$ , удовлетворяющей условию оптимальности (6),  $l = 0, \dots, N_t, j = 0, \dots, N_x$ .

#### 4 Обратные задачи

Начальное распределение пользователей в сети при появлении информации зачастую не известно. Возникает необходимость в решении обратной задачи, которая заключается в восстановлении набора параметров  $q = (q_0, q_1, \dots, q_{d-1})$ , характеризующего начальную функцию плотности  $\varphi(x)$ , из уравнений (3), (5), (6) по дополнительной информации о плотности вовлеченных пользователей в различные моменты времени следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{N_1} u^\alpha(x_i, t_k; q) = f_k^\alpha, \quad k = 1, \dots, N_2. \quad (8)$$

Здесь  $\varphi(x_m) = q_{m-1}$ ,  $m = 1, \dots, d$ ,  $d$  — число параметров. Другими словами, начальная функция плотности  $\varphi(x_m)$  аппроксимируется набором точек  $q_{m-1}$ ,  $m = 1, \dots, d$ .

Пусть  $u^\alpha(x, t; q), u^{\alpha^*}(x, t; q) \in L^2([0, 1] \times [1, T])$ . Здесь  $u^\alpha(x, t; q)$  — решение уравнения КФП (3) для заданного  $q$ , при котором  $\alpha(x, t)$  удовлетворяет условию оптимальности (6), то есть пара  $(u^\alpha, \alpha)$  является решением задачи среднего поля (4). Функция  $u^{\alpha^*}(x, t; q)$  является решением уравнения КФП (3) для заданного  $q$ , где  $\alpha^*(x, t)$  удовлетворяет условию оптимальности при  $q^{exact}$ , то есть управление  $\alpha^*$  оптимально при  $q = q^{exact}$ . Запишем функционал типа «невязки»:

$$IP(q; u^\alpha) = \gamma \sum_{k=1}^{N_2} \left| \sum_{i=1}^{N_1} u^\alpha(x_i, t_k; q) - f_k^\alpha \right|^2, \quad (9)$$

где  $\gamma = (T - 1)/N_2$ .

Обратная задача 1 состоит в минимизации функционала (9) по пространству параметров  $q \in (\mathbb{R}_0^+)^d$ , то есть

$$\hat{q}^{(1)} = \arg \min_{q \in (\mathbb{R}_0^+)^d} IP(q; u^\alpha).$$

Здесь для каждой аппроксимации решения  $q^n$ ,  $n$  — номер итерации алгоритма, обратной задачи определяется оптимальное управление  $\alpha(x, t)$ .

Обратная задача 2 состоит в минимизации функционала (9) по пространству параметров  $q \in (\mathbb{R}_0^+)^d$  при фиксированном управлении  $\alpha^*(x, t)$ , то есть

$$\hat{q}^{(2)} = \arg \min_{q \in (\mathbb{R}_0^+)^d} IP(q; u^{\alpha^*}).$$

Здесь  $\alpha^*(x, t)$  является оптимальным для  $q = q^{exact}$  и фиксировано для каждой аппроксимации решения  $q^n$  обратной задачи.

Было показано [20], что в случае  $\alpha = 0$  (без управления) решение обратной задачи минимизации функционала (9) неустойчиво.

**4.1. Анализ чувствительности.** Анализ чувствительности позволяет определять степень влияния параметров модели на результаты моделирования. Для определения чувствительности моделей (1) и (3) мы используем метод, основанный на глобальном анализе дисперсии модели [21]. В основе этого метода лежит рассмотрение полных индексов чувствительности Соболя  $S_m$ , которые выражаются как отношение дисперсии  $V_{p_m}(E_{P_{\sim m}}(f|p_m))$  по всем возможным значениям параметров  $p_m$  к общей дисперсии  $V(f)$ :

$$S_m = \frac{V_{p_m}(E_{P_{\sim m}}(f|p_m))}{V(f)}.$$

Здесь  $P_{\sim m}$  — сгенерированная матрица неизвестных параметров без  $p_m$ , а математическое ожидания  $E_{P_{\sim m}}(f|p_m)$  означает, что среднее значение

для  $f$  берется по всем возможным значениям  $P_{\sim m}$  при фиксированном  $p_m$ .

Считается, что при  $S_m \in (0.5, 1)$  измерения можно считать чувствительными к исследуемому параметру [21].

В численной реализации используется библиотека SALib на языке программирования Python (<https://github.com/SALib/SALib>).

При вычислении прямой задачи (3), (5), (6) важным вопросом является выбор коэффициентов  $d_1, d_2$  функционала стоимости (2) так, чтобы управление  $\alpha$  удовлетворяло ограничениям метода [10] и влияло на плотность пользователей. Поэтому была рассмотрена чувствительность данных вида  $f(t) = \int_0^1 u^\alpha(x, t) dx$  к коэффициентам  $d_1, d_2$  (см. рисунок 3).

Можно видеть, что система (3) более чувствительна к коэффициенту  $d_2$ .

Также отметим, что увеличение значения  $d_2$  приводит к необходимости измельчения сетки для удовлетворения ограничениям метода [10].

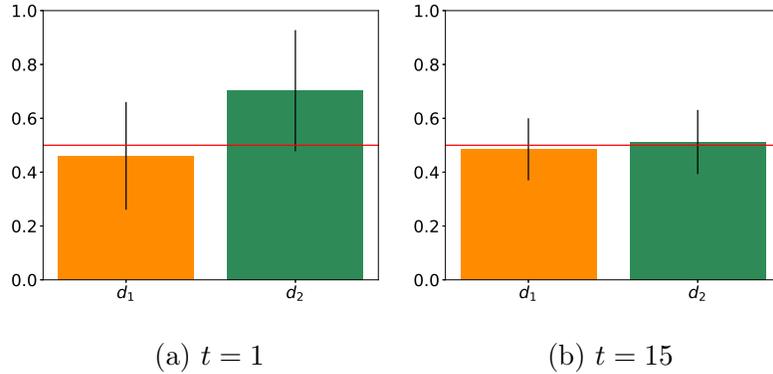


Рис. 3. Графики значений глобальных индексов чувствительности для коэффициентов  $d_1, d_2$  функционала стоимости (2) при (a)  $t = 1$  и (b)  $t = 1$ . Столбцы диаграмм представляют значения индексов  $S_m, m = 1, 2$ , черные линии — доверительные интервалы для  $S_m$ .

В случае обратной задачи (3), (5), (6), (8) рассматривается чувствительность данных вида  $f(t) = \int_0^1 \hat{u}(x, t) dx$  к набору параметров  $q$  при  $\hat{u}(x, t) = u(x, t)$  для ДЛМ и  $\hat{u}(x, t) = u^\alpha(x, t)$  для КФП. На рисунке 4 представлены графики значений глобальных индексов чувствительности Соболя для неизвестных параметров  $q$  (a) модели (1) для  $t = 1$  и (d)  $t = 15$ , (b) модели (3) для  $t = 1$  и (c)  $t = 15$ . Ранее было показано [20], что ДЛМ не чувствительна к параметрам  $q$  при  $t > 1$ , при этом рисунок 4(a) демонстрирует, что модель чувствительна к параметру  $q_0$  при

$t = 1$ . А для модели КФП результаты во все моменты времени показывают чувствительность к одному из параметров, например, на рисунке 4(b) показана чувствительность к параметру  $q_1$  при  $t = 1$ , а на рисунке 4(d) — к параметру  $q_2$  при  $t = 15$ .

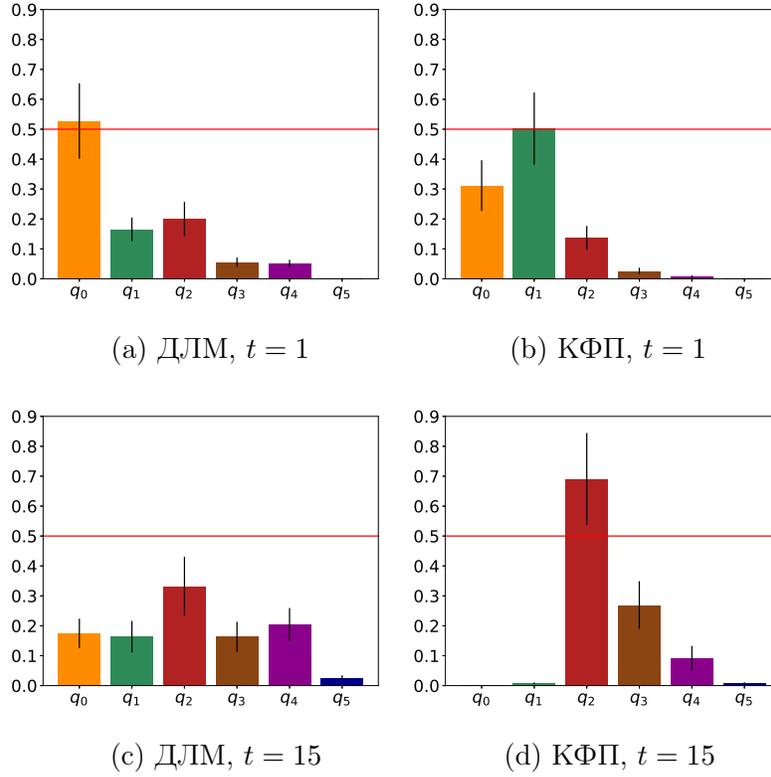


Рис. 4. Графики значений глобальных индексов чувствительности для неизвестных параметров  $q$  моделей (1) (а), (d) и (3) (b), (c) при  $t = 1$  и  $t = 15$ . Столбцы диаграмм представляют значения индексов  $S_m$ ,  $m = 0, \dots, 5$ , черные линии — доверительные интервалы для  $S_m$ .

Таким образом, чувствительность начальных условий для модели среднего поля выше, чем для модели ДЛМ без введения управления.

**4.2. Алгоритм решения обратных задач.** Обратные задачи 1 и 2 состоят в восстановлении вектора параметров  $q \in (\mathbb{R}_0^+)^d$ , характеризующего начальную функцию плотности  $\varphi(x)$  системы (3), по дополнительной информации  $f_k$ ,  $k = 1, \dots, N_2$  (8). И затем задачи сводятся к задачам минимизации квадратичных функционалов вида (9), решение которых обозначим  $\hat{q}^{(1)}$  и  $\hat{q}^{(2)}$  соответственно.

Для минимизации такого функционала при  $\alpha = 0$  применялись методы стохастической глобальной оптимизации роя частиц [13], градиентные методы [14], метод глобальной оптимизации тензорного поезда [15] и их комбинации. И для решения задачи минимизации функционала (9) при  $\alpha \neq 0$  также можно применять указанные методы. Алгоритмы 2 и 3 решения обратных задач для модели среднего поля показывают шаги в общем случае.

---

**Алгоритм 2** решения обратной задачи 1

---

**Вход:** Данные обратной задачи  $f_k^\alpha$ , коэффициенты функционала стоимости  $d_1, d_2$ .

- 1: Получить некоторое приближение  $q^n$  с помощью выбранного метода.
  - 2: Для найденного  $q^n$  решить прямую задачу (3), (5), (6) и определить  $u^{\alpha^*}, \alpha^*$ .
  - 3: Подставить  $u^{\alpha^*}$  в функционал  $IP$  (9).
- 

---

**Алгоритм 3** решения обратной задачи 2

---

**Вход:** Данные обратной задачи  $f_k^\alpha$ , точные значения параметров  $q^{exact}$ , коэффициенты функционала стоимости  $d_1, d_2$ .

- 1: Для точного вектора параметров  $q^{exact}$  решить прямую задачу (3), (5), (6) и определить функцию  $\alpha^*(x, t)$ .
  - 2: Получить некоторое приближение  $q^n$  с помощью выбранного метода.
  - 3: Для найденного  $q^n$  решить систему (3) и определить  $u^{\alpha^*}$ .
  - 4: Подставить  $u^{\alpha^*}$  в функционал  $IP$  (9).
- 

Дальнейшие шаги алгоритмов зависят от выбранного метода.

**4.3. Численное решение обратных задач.** В качестве синтетических данных  $f_k^\alpha$  были взяты значения функции плотности  $u^\alpha(x, t)$  прямой задачи (3), (5), (6) в точках  $x = 1, \dots, 6$  и  $t = 3, \dots, 24$ , то есть  $N_1 = 6$  и  $N_2 = 22$ . Необходимо восстановить  $q \in (\mathbb{R}_0^+)^d$ ,  $d = 6$  параметров.

Относительная ошибка решения обратной задачи вычислялась по формуле

$$err^{(l)} = \sum_{j=1}^d \frac{|q_j^{exact} - \hat{q}_j^{(l)}|}{q_j^{exact}}.$$

Здесь  $l = 1, 2$ ,  $\hat{q}^{(l)}$  — аппроксимация решения обратной задачи  $l$ , которая соответствует минимуму функционала  $IP(\hat{q}^{(l)}; u^{\alpha, (l)})$  (9).

В данной работе мы применяли метод Optuna [22] для решения задачи минимизации функционала (9). Границы изменения параметров были выбраны как  $[q^{exact} - q^{exact} \cdot 0.7, q^{exact} + q^{exact} \cdot 2.5]$ , а количество испытаний  $N_O = 1000$ .

На рисунке 5 представлены точные  $q^{exact}$  и восстановленные  $\hat{q}^{(1)}$ ,  $\hat{q}^{(2)}$  значения параметров обратных задач 1 и 2. В таком случае значения погрешностей  $err^{(1)} = 4.4$ ,  $err^{(2)} = 2.7$  и функционалов  $IP(\hat{q}^{(1)}; u^{\alpha, (1)}) = 1.2 \cdot 10^{-5}$ ,  $IP(\hat{q}^{(2)}; u^{\alpha, (2)}) = 7.6 \cdot 10^{-7}$ . Решение обратной задачи 2 ближе к точному, так как необходимо было определить только вектор неизвестных параметров  $q$ , тогда как при решении обратной задачи 1 для каждого приближения  $q^n$  также необходимо было определять функцию управления  $\alpha(x, t)$ .

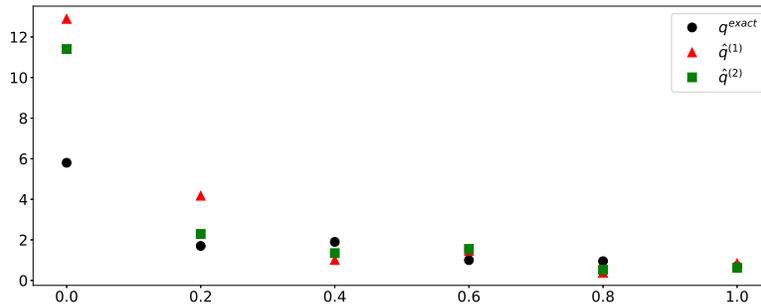


Рис. 5. Восстановленные значения вектора параметров  $q \in \mathbb{R}^6$ . Черные точки — точные значения параметров обратной задачи  $q^{exact}$ , красные треугольники — восстановленные значения параметров  $\hat{q}^{(1)}$  обратной задачи 1, зеленые квадраты — восстановленные значения параметров  $\hat{q}^{(2)}$  обратной задачи 2.

На рисунке 6 представлены графики абсолютных разностей функций  $u_{l,j}^{\alpha}$ ,  $\alpha_{l,j}$  прямой задачи (3), (5), (6) и функций  $u_{l,j}^{\alpha, (1)}$ ,  $\alpha_{l,j}^{(1)}$  обратной задачи 1. Функции  $u(x, t)$  и  $\alpha(x, t)$  для точного и найденного решений отличаются только в начальные моменты времени, то есть при решении прямой задачи среднего поля определяются оптимальные для функционала (2) значения этих функций.

## 5 Заключение

Построена и проанализирована модель среднего поля, которая описывает процесс распространения информации в онлайн социальных сетях с учетом внешнего воздействия. Определена оптимальная стратегия поведения пользователей, вовлеченных в процесс распространения информации, при условии ограничений на распространения информации. Изучена чувствительность параметров модели, влияющих на управление, и начальных условий. Анализ чувствительности показал, что модель более чувствительна к коэффициенту функционала стоимости, который

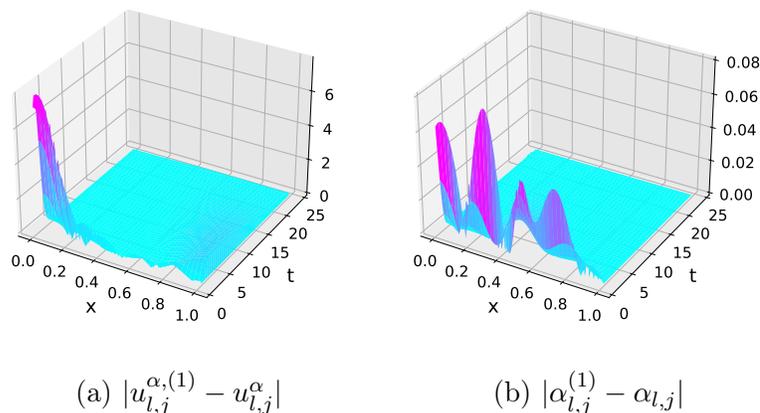


Рис. 6. Графики абсолютных разностей функций  $u_{l,j}^{\alpha}$ ,  $\alpha_{l,j}$  прямой задачи и функций  $u_{l,j}^{\alpha,(1)}$ ,  $\alpha_{l,j}^{(1)}$  обратной задачи 1 для (а) плотностей вовлеченных пользователей  $|u_{l,j}^{\alpha,(1)} - u_{l,j}^{\alpha}|$  и (б) функций управления  $|\alpha_{l,j}^{(1)} - \alpha_{l,j}|$ ,  $l = 0, \dots, N_t$ ,  $j = -1/2, \dots, N_x + 1/2$ .

отражает плату за текущее состояние пользователей. А также показано, что модель во все моменты времени чувствительна к начальной функции плотности уравнения Колмогорова—Фоккера—Планка, что позволяет исследовать задачу идентификации начальной плотности пользователей по данным изменений плотности в последующие моменты времени.

Сформулированы обратные задачи определения начального условия по дополнительной информации о процессе распространения информации при добавлении управления. Обратные задачи отличались между собой функцией управления и были сведены к задаче минимизации функционалов невязки. С помощью байесовской оптимизации численно исследованы решения полученных обратных задач для синтетических данных. Показано, что в случае заданного управления, являющегося оптимальным для синтетического точного решения обратной задачи, относительная погрешность решения обратной задачи меньше, чем в случае оптимального управления для каждой аппроксимации решения внутри итерационного процесса минимизации функционала невязки.

### References

- [1] S. Sawyer, M. Tyworth, *Social Informatics: Principles, Theory, and Practice*, Proc. Seventh Int. Conf. Hum. Choice Comput., **223** (2006), 49–62.
- [2] W. Goffman, V. Newill, *Generalization of Epidemic Theory: An Application to the Transmission of Ideas*, Nature, **204** (1964), 225–228.

- [3] M.S. Granovetter, *Threshold Models of Collective Behavior*, Am. J. Sociol., **83**:6 (1978), 1420–1443.
- [4] J. Goldenberg, B. Libai, E. Muller, *Talk of the Network: A Complex Systems Look at the Underlying Process of Word-of-Mouth*, Mark. Lett., **12** (2001), 211–223.
- [5] F. Wang, H. Wang, K. Xu, *Diffusive Logistic Model Towards Predicting Information Diffusion in Online Social Networks*, Proc. 32nd Int. Conf. Distrib. Comput. Sys. Workshops, (2012), 133–139.
- [6] F. Wang, H. Wang, K. Xu, J. Wu, X. Jia, *Characterizing Information Diffusion in Online Social Networks with Linear Diffusive Model*, Proc. 33rd Int. Conf. Distrib. Comput. Sys. Workshops, (2013), 307–316.
- [7] A. Lachapelle, *Human Crowds and Groups Interactions: a Mean Field Games Approach* HAL, (2010), hal-00484097.
- [8] D. Bauso, H. Tembine, T. Basar, *Opinion Dynamics in Social Networks Through Mean-Field Games*, SIAM J. Control. Optim., **54**:6 (2016), 3225–3257.
- [9] W. Lee, S. Liu, H. Tembine, W. Li, S. Osher, *Controlling Propagation of Epidemics Via Mean-Field Control*, SIAM J. Appl. Math., **81**:1 (2021), 190–207.
- [10] V. Petrakova, O. Krivorotko, *Mean field game for modeling of COVID-19 spread*, J. Math. Anal. Appl. **514** (2022), 126271.
- [11] L.V. Egorov, N.V. Trusov, *The group behavior analysis of the high-frequency traders based on Mean Field Games approach*, J. Inverse Ill-posed Probl., **32**:5 (2024), 1063–1080.
- [12] L. Ding, W. Li, S. Osher, W. Yin, *A mean field game inverse problem*, ArXiv, (2020), arXiv:2007.11551.
- [13] O. Krivorotko, T. Zvonareva, N. Zyatkov, *Numerical solution of the inverse problem for diffusion-logistic model arising in online social networks*, Commun. Comput. Info. Sci., **1476** (2021), 444–459.
- [14] T.A. Zvonareva, O.I. Krivorotko, *Comparative analysis of gradient methods for source identification in a diffusion-logistic model*, Comput. Math. Math. Phys., **62**:4 (2022), 674–684.
- [15] T.A. Zvonareva, S.I. Kabanikhi, O.I. Krivorotko, *Numerical Algorithm for Source Determination in a Diffusion-Logistic Model from Integral Data Based on Tensor Optimization*, Comput. Math. Math. Phys., **63**:9 (2023), 1654–1663
- [16] A. Bensoussan, J. Frehse, P. Yam, *Mean Field Games and Mean Field Type Control Theory*, Springer, New York, 2013.
- [17] V. Shaydurov, V. Kornienko, *A finite-difference solution of mean field problem with a predefined control resource*, AIP Conf. Proc. **2302** (2020), 110004.
- [18] V. Shaydurov, V. Kornienko, *Numerical solution of mean field problem with limited management resource*, Lobachevskii J. Math., **42** (2021), 1686–1696.
- [19] V. Shaydurov, V. Kornienko, S. Zhang, *The Euler–Lagrange approximation of the mean field game for the planning problem*, Lobachevskii J. Math., **41** (2020), 2703–2714.
- [20] T. Zvonareva, O. Krivorotko, *Identifiability Analysis for Source Problem of Quasi-Hyperbolic Equation*, Proc. 5th Int. Conf. Probl. Cybern. Inform., (2023), 1–4.
- [21] I.M. Sobol, *Sensitivity analysis for non-linear mathematical models*, Math. Model. Comput. Exp., **1**:4 (1993), 407–414.
- [22] T. Akiba, Sh. Sano, T. Yanase, T. Ohta, M. Koyama, *Optuna: A Next-generation Hyperparameter Optimization Framework*, Proc. 25th ACM SIGKDD Int. Conf. Knowl. Discov. & Data Min., (2019), 2623–2631.

TATIANA ALEKSANDROVNA ZVONAREVA  
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,  
PR. КОПТУГА, 4,  
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*Email address:* [t.zvonareva@nsu.ru](mailto:t.zvonareva@nsu.ru)

OLGA IGOREVNA KRIVOROTKO  
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,  
PR. КОПТУГА, 4,  
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
*Email address:* [krivorotko.olya@mail.ru](mailto:krivorotko.olya@mail.ru)