S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

*Том 21, № 2, стр. 1450–1459 (2024)* УДК 519.234
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.092 MSC 62G08

# О ТОЧНОСТИ РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ УНИВЕРСАЛЬНЫМИ ЛОКАЛЬНО-ПОСТОЯННЫМИ ЯДЕРНЫМИ ОЦЕНКАМИ ГЛАДКИХ РЕГРЕССИОННЫХ ФУНКЦИЙ

**Ю.Ю. Линке**

*Представлено* Н.С. Аркашовым

**Abstract:** The paper considers universal locally constant kernel estimators in nonparametric regression. Previously, these estimators were studied only in the case of a continuous regression function. It is shown that with the additional condition of smoothness of the regression function, the accuracy of the uniform approximation can be improved.

**Keywords:** nonparametric regression, universal local constant kernel estimator, uniform consistency, fixed design, random design.

## 1 Введение

В работе рассматривается следующая регрессионная модель: даны наблюдения $X_1, \ldots, X_n$ (так называемые отклики), которые представимы в виде

$$X_i = f(z_i) + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

Linke, Y.Y., On the accuracy of the uniform approximation of universal local constant kernel estimators to smooth regression functions.



Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН (проект FWNF-2024-0001).

*Поступила 20 октября 2024 г., опубликована 25 декабря 2024 г.*

где $f(t)$, $t \in [0,1]$, — неизвестная достаточно гладкая скалярная функция; ненаблюдаемые погрешности $\{\varepsilon_i;\ i=1,\dots,n\}$ — центрированные случайные величины, не обязательно независимые или одинаково распределенные; величины $\{z_i;\ i=1,\dots,n\}$ нам известны и могут быть как случайными, так и детерминированными. Таким образом, мы наблюдаем лишь зашумленные значения $\{X_i;\ i=1,\dots,n\}$ регрессионной функции $f$ в некотором известном наборе ее аргументов $\{z_i;\ i=1,\dots,n\}$, который мы будем называть набором регрессоров или просто регрессорами. Задача состоит в том, чтобы по парам наблюдений $\{(z_i,X_i);\, i=1,\dots,n\}$ оценить функцию $f$.

Большое число работ посвящено решению задачи оценивания функции $f$ методами ядерного сглаживания в тех или иных условиях на параметры модели (1) (например, в случае достаточно гладких функций в качестве ориентира укажем недавние работы [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11]). Чтобы оценить регрессионную функцию, с необходимостью нужно накладывать те или иные ограничения на регрессоры. Модели с детерминированными и случайным регрессорами рассматриваются, как правило, отдельно (вне зависимости от ограничений на другие параметры модели), при этом используются условия регулярного заполнения области определения регрессионной функции или те или иные формы слабой зависимости (см., например, вышеуказанные работы). Универсальные и более общие условия на регрессоры предложены в работах [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], в которых реализуется (в условии лишь непрерывности регрессионной функции) следующая идея: для того, чтобы восстановить регрессионную функцию, относительно регрессоров достаточно требовать лишь условие асимптотически плотного заполнения области определения регрессионной функции. Условия такого типа по сути являются необходимыми. В отличие от известных ранее результатов, новые условия на регрессоры в терминах плотных данных универсальны и нечувствительны к стохастической природе регрессоров, что позволяет в едином подходе рассматривать модели с детерминированными и случайными регрессорами, при этом без требования соответствующих условий регулярности или слабой зависимости.

Оказывается, для достаточно гладких регрессионных функций точность аппроксимации универсальных локально-постоянных ядерных оценок из [12] может быть улучшена. Установление отмеченного факта и является целью настоящей заметки. При этом от регрессоров, как и в [12], мы будем требовать лишь свойство плотного заполнения области определения регрессионной функции. Стоит отметить, что для классических ядерных оценок и условий на регрессоры эффект улучшения точности оценивания в зависимости от гладкости регрессионной функции хорошо известен (например, см. [19]).

## 2 Основные результаты

Нам потребуется ряд условий.

($\mathbf{A}_1$) Даны двумерные наблюдения $\{(z_i, X_i);\ i = 1, \ldots, n\}$, представимые в виде

$$X_i = f(z_i) + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где $f(t)$ — неизвестная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция, заданная на $[0,1]$; набор регрессоров $\{z_i;\ i = 1, \ldots, n\}$ состоит из случайных величин, вообще говоря, с неизвестными распределениями со значениями на $[0,1]$, не обязательно независимых или одинаково распределенных. Предполагается, что величины $\{z_i;\ i = 1, \ldots, n\}$ могут зависеть от $n$.

**Замечание 1.** Отметим, что условие $(A_1)$ включает в себя и ситуацию фиксированных регрессоров. Отрезок $[0,1]$ в качестве области изменения регрессоров мы рассматриваем исключительно с целью простоты изложения.

($\mathbf{A}_2$) При всех $n \geq 1$ случайные погрешности $\{\varepsilon_i;\ i = 1, \ldots, n\}$ с вероятностью 1 при всех $i, j \leq n$, $i \neq j$, удовлетворяют условиям

$$\mathbb{E}_{\mathcal{F}_n}\varepsilon_i = 0, \qquad \sup_{i\leq n}\mathbb{E}_{\mathcal{F}_n}\varepsilon_i^2 \leq \sigma^2, \qquad \mathbb{E}_{\mathcal{F}_n}\varepsilon_i\varepsilon_j = 0, \tag{3}$$

где константа $\sigma^2 > 0$ неизвестна и не зависит от $n$, а символ $\mathbb{E}_{\mathcal{F}_n}$ обозначает условное математическое ожидание при фиксации $\sigma$-алгебры $\mathcal{F}_n$, порожденной случайными величинами $\{z_i;\ i = 1, \ldots, n\}$.

($\mathbf{A}_3$) Ядерная функция $K(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является плотностью симметричного распределения с носителем $[-1,1]$, т.е. $K(t) \geq 0$, $K(t) = K(-t)$ при всех $t \in [-1,1]$ и $\int_{[-1,1]} K(t)dt = 1$. Кроме того, ядерная функция $K(t)$ непрерывно дифференцируема на открытом интервале $(0,1)$, $K(\pm 1) = 0$ и $\sup_{t\in[0,1]}(K(t) + |K'(t)|) \leq L < \infty$ при $L \geq 1$.

Введем еще ряд обозначений и соглашений. Положим

$$K_h(t) = h^{-1}K(h^{-1}t),$$

где $h > 0$ — параметр сглаживания в ядерных методах (размер окна). Понятно, что $K_h(t)$ — плотность распределения на $[-h,h]$. С учетом условия $(A_1)$ обозначим через $C_f > 0$ константу, удовлетворяющую соотношению

$$\sup_{t\in[0,1]}(|f'(t)| + |f''(t)|) \leq C_f < \infty. \tag{4}$$

Запись $\zeta_n = O_p(\eta_n)$ означает, что для некоторой величины $\eta_n > 0$ (возможно, случайной) и всех чисел $M > 0$ выполнено

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(|\zeta_n|/\eta_n > M) \leq \beta(M),$$

где функция $\beta(M)$ не зависит от параметров рассматриваемой модели и $\lim_{M\to\infty}\beta(M) = 0$. Символ $\widetilde{O}_p(\eta_n)$ используется в случае, если функция

$\beta(M)$ может зависеть от параметров модели (за исключением объема наблюдений $n$). Условимся, что далее все пределы берутся при $n \to \infty$.

Обозначим через $z_{n:1} \le \ldots \le z_{n:n}$ элементы вариационного ряда, построенного по набору регрессоров $\{z_i;\ i = 1, \ldots, n\}$. Положим

$$z_{n:0} = 0, \quad z_{n:n+1} = 1, \quad \Delta z_{ni} = z_{n:i} - z_{n:i-1}, \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Отклики из (2), ассоциированный с порядковой статистикой $z_{n:i}$, обозначим через $X_{ni}$. Универсальная локально-постоянная оценка $f^*_{n,h}(t)$ для функции $f(t)$, введенная в [12], определяется равенством

$$f^*_{n,h}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{ni} K_h(t - z_{n:i}) \Delta z_{ni}}{\sum_{i=1}^{n} K_h(t - z_{n:i}) \Delta z_{ni}}. \tag{5}$$

Заметим, что

$$f^*_{n,h}(t) = \arg\min_a \sum_{i=1}^{n} (X_{ni} - a)^2 K_h(t - z_{n:i}) \Delta z_{ni},$$

т.е. ядерные оценки $f^*_{n,h}(t)$, как и классические оценки Надарая-Ватсона, являются оценкой взвешенного метода наименьших квадратов и принадлежат классу локально–постоянных оценок. Но в методе наименьших квадратов используются другие веса, определяемые порядковыми статистиками $\{z_{n:i}\}$, а вместо исходных наблюдений $X_i$ участвуют конкомитанты $X_{ni}$, ассоциированные с указанными порядковыми статистиками.

Введем, наконец, следующее центральное условие.

($\mathbf{A}_4$) Имеет место предельное соотношение $\delta_n = \max\limits_{1 \le i \le n+1} \Delta z_{ni} \xrightarrow{p} 0$.

**Замечание 2.** Условие $(A_4)$ является единственным ограничением на регрессоры, гарантирующем равномерную состоятельность универсальных локально–постоянных ядерных оценок $f^*_{n,h}(t)$. Таким образом, относительно регрессоров требуется лишь, чтобы они с увеличением объема выборки $n$ с высокой вероятностью образовывали измельчающееся разбиение области задания регрессионной функции $f$. Подробнее условия такого типа обсуждаются в [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [20], [21].

Основным результатом работы является следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия* $(A_1)$–$(A_3)$. *Тогда для любого фиксированного* $h \in (0, 1/2)$ *с вероятностью* 1 *справедливо соотношение*

$$\sup_{t \in [h, 1-h]} |f^*_{n,h}(t) - f(t)| \le 2^{-1} C_f h^2 + \frac{L C_f \delta_n (2 + \delta_n/h)}{1 - 2L\delta_n/h} + \zeta_n(h), \tag{6}$$

*где случайная величина* $\zeta_n(h)$ *такова, что*

$$\mathbb{P}\left(\zeta_n(h) > y\right) \le C\sigma^2 L^2 y^{-2} h^{-2} \mathbb{E}\delta_n + \mathbb{P}(\delta_n > h/(8L))$$

*и* $C$ — *абсолютная положительная константа.*

**Замечание 3.** Формально в теореме 1 не требуется выполнение условия $(A_4)$, но приведенные оценки становятся содержательными лишь в этом случае. Аналогичное замечание справедливо и для приводимой далее теоремы 2.

**Замечание 4.** Если выполнено $(A_4)$, то $\zeta_n(h) = O_p\big((\sigma+1)Lh^{-1}(\mathbb{E}\delta_n)^{1/2}\big)$. Таким образом, для сходимости $\zeta_n(h) \xrightarrow{p} 0$ требуется, чтобы размер окна $h = h_n \to 0$ удовлетворял соотношению $\mathbb{E}\delta_n/h^2 \to 0$. Последнее в силу неравенства Маркова очевидным образом влечет сходимость $\delta_n/h^2 \xrightarrow{p} 0$ (тем самым, и $\delta_n/h \xrightarrow{p} 0$), так что первые два слагаемых в правой части (6) имеют вид $\widetilde{O}_p(h^2)$. Таким образом, в качестве размера окна $h = h_n$ можно выбрать, например, решение уравнения

$$h^{-1}(\mathbb{E}\delta_n)^{1/2} = h^2, \tag{7}$$

при этом с необходимостью $h_n \to 0$, если выполнено условие $A_4$. Так определенный размер окна фактически уравнивает по $h$ порядки малости слагаемых в правой части оценки для супремальной нормы, приведенной в теореме 1. В частности, если $\mathbb{E}\delta_n = O(1/n)$, то $h_n = O\big(n^{-1/6}\big)$.

Из теоремы 1 и замечания 4 получаем

**Следствие 1.** *Если выполнены условия теоремы 2 и условие $(A_4)$, то*

$$S_{[h,1-h]} = \sup_{t\in[h,1-h]} |f^*_{n,h}(t) - f(t)| = \widetilde{O}_p\big(h^2\big),$$

*где параметр $h = h_n \to 0$ определен в (7).*

**Замечание 5.** Как мы покажем далее (см. лемму 3 и доказательство теоремы 1), в граничных областях $[0,h]$ и $[1-h,1]$ отрезка $[0,1]$ в условиях теоремы 1 имеет место оценка

$$\sup_{t\in[0,h]\cup[1-h,1]} |f^*_{n,h}(t) - f(t)| \le \frac{5}{4}C_f h + \zeta_n(h). \tag{8}$$

Таким образом, в граничных точках области определения регрессионной функции порядок сближения $f^*_{n,h}(t)$ и $f(t)$ несколько хуже, чем внутри области. Стоит отметить, что так называемый эффект граничных точек, в которых ухудшается точность аппроксимации ядерных оценок, хорошо известен (см., например, [19]). Однако если выполнено $(A_4)$, то для любого $t \in (0,1)$ следствие 1 влечет за собой предельное соотношение

$$f^*_{n,h}(t) = f(t) + \widetilde{O}_p(h^2),$$

где размер окна $h = h_n \to 0$ определен в (7).

Рассмотрим теперь для сравнения некоторые известные ранее результаты о точности универсальных локально-постоянных ядерных оценок $f^*_{n,h}(t)$ в случае негладких непрерывных регрессионных функций. Частным случаем теоремы 1 из [12] для непрерывных регрессионных функций является следующий результат.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия $(A_1)$—$(A_3)$. Тогда для любого фиксированного $h \in (0, 1/2)$ с вероятностью* 1

$$\sup_{t\in[0,1]} |f^*_{n,h}(t) - f(t)| \le \omega_f(h) + \zeta_n(h), \tag{9}$$

*где $\omega_f(h) = \sup_{t,s\in[0,1]:|t-s|\le h} |f(t) - f(s)|$, а случайная величина $\zeta_n(h)$ определена в теореме* 1.

**Замечание 6.** Подчеркнем, что в условии $(A_1)$ для справедливости утверждения теоремы 2 достаточно требовать лишь непрерывность регрессионной функции $f(t)$. Далее, поскольку при выполнении $(A_4)$ справедливо соотношение $\zeta_n(h) = O_p\big((\sigma + 1)Lh^{-1}(\mathbb{E}\delta_n)^{1/2}\big)$, то в качестве размера окна $h = h_n \to 0$ можно взять, например, решение уравнения

$$h^{-1}(\mathbb{E}\delta_n)^{1/2} = \omega_f(h). \tag{10}$$

Фактически таким образом выбранный размер окна уравнивает по $h$ порядки малости обоих слагаемых в правой части оценки (9).

Из теоремы 2, принимая во внимание замечание 6, получаем

**Следствие 2.** *Если выполнены условия теоремы 2 и условие $(A_4)$, то*

$$S_{[0,1]} = \sup_{t\in[0,1]} |f^*_{n,h}(t) - f(t)| = \widetilde{O}_p\big(\omega_f(h)\big),$$

*где параметр $h = h_n \to 0$ определен в* (10).

**Замечание 7.** Пусть $\mathbb{E}\delta_n = O(1/n)$, функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha \in (0, 1]$, а размер окна $h$ определяется уравнением (10). Тогда

$$h = O\big(n^{-\frac{1}{2(1+\alpha)}}\big), \quad \omega_f(h) = O\big(n^{-\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\big).$$

В частности, если функция $f$ удовлетворяет условию Липшица ($\alpha = 1$), то $S_{[0,1]} = \widetilde{O}_p(n^{-1/4})$. Таким образом, в данном примере в случае достаточно гладкой регрессионной функции $f$ (см. условие $(A_1)$) из результатов [12] получаем лишь соотношение $S_{[h,1-h]} = \widetilde{O}_p(n^{-1/4})$, а в качестве следствия теоремы 1 (см. следствие 1 и замечание 4) — соотношение $S_{[h,1-h]} = \widetilde{O}_p(n^{-1/3})$. Отметим, что предложенные оценки в области граничных точек $[0, h] \cup [1 - h, 1]$ (см. замечание 5) не дают улучшения точности аппроксимации в случае гладких функций по сравнению с результатами из [12] для непрерывных функций.

## 3 Доказательство основного результата

Всюду в этом разделе считаем выполненными условия $(A_1)$–$(A_3)$. Погрешности из регрессионного уравнения (2), ассоциированные с порядковой статистикой $z_{n:i}$, обозначим через $\varepsilon_{ni}$. Нетрудно видеть, что случайные величины $\{\varepsilon_{ni};\ i = 1, \dots, n\}$ также удовлетворяют условию $(A_2)$, а регрессионное уравнение (2) можно переписать следующим образом:

$$X_{ni} = f(z_{n:i}) + \varepsilon_{ni}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Принимая во внимание это соотношение, получаем тождество

$$f^*_{n,h}(t) - f(t) = r_{n,h}(t) + \nu_{n,h}(t), \tag{11}$$

где

$$r_{n,h}(t) = J^{-1}_{n,h}(t) \sum_{i=1}^{n} \big(f(z_{n:i}) - f(t)\big) K_h\,(t - z_{n:i})\,\Delta z_{ni},$$
$$J_{n,h}(t) = \sum_{i=1}^{n} K_h(t - z_{n:i})\Delta z_{ni}, \tag{12}$$
$$\nu_{n,h}(t) = J^{-1}_{n,h}(t) \sum_{i=1}^{n} K_h\,(t - z_{n:i})\,\Delta z_{ni}\varepsilon_{ni}.$$

Введем обозначение $J_h(t) = \int\limits_0^1 K_h(t - z)dz$.

**Лемма 1.** *Для любого $h < 1/2$ имеют место соотношения*

$$J_h(t) = 1 \text{ *при всех* } t \in [h, 1-h],$$
$$\inf_{t\in[0,1]} J_h(t) = 1/2, \qquad \sup_{t\in[0,1]} |J_{n,h}(t) - J_h(t)| \le 2L\delta_n/h.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 1 приведено в [12].

**Лемма 2.** *Для любого $h < 1/2$ имеют место соотношения*

$$\inf_{t\in[h,1-h]} J_{n,h}(t) \ge 1 - 2L\delta_n/h.$$

Это утверждение нетрудно извлечь из леммы 1.

**Лемма 3.** *Для любого $h < 1/2$ имеют место соотношения*

$$\sup_{t\in[h,1-h]} |r_{n,h}(t)| \le 2^{-1}C_f h^2 + \frac{LC_f\delta_n(2 + \delta_n/h)}{1 - 2L\delta_n/h},$$
$$\sup_{t\in[0,h]\cup[1-h,1]} |r_{n,h}(t)| \le \frac{5}{4}C_f h.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя формулу Тейлора 1-го порядка с остаточным членом в форме Лагранжа, имеем

$$f(z_{n:i}) = f(t) + f'(t)(z_{n:i} - t) + 2^{-1}f''(q_i)(z_{n:i} - t)^2,$$

где $q_i$ — некоторая точка, расположенная между $z_{n:i}$ и $t$. Следовательно, для величины $r_{n,h}(t)$, определенной в (12), при любом фиксированном

$t \in [0,1]$ справедливо представление

$$r_{n,h}(t) = J_{n,h}^{-1}(t) f'(t) \sum_{i=1}^{n} (z_{n:i} - t) K_h(z_{n:i} - t) \Delta z_{ni} + \\ + 2^{-1} J_{n,h}^{-1}(t) \sum_{i=1}^{n} f''(q_i)(z_{n:i} - t)^2 K_h(z_{n:i} - t) \Delta z_{ni}. \tag{13}$$

Отметим, что ввиду свойств ядра $K$ область суммирования в (13) совпадает с множеством $\{i : |z_{n:i} - t| \le h\}$, что является принципиальным для дальнейших рассуждений. Второе слагаемое в правой части (13) оценивается теперь очевидным образом:

$$\sup_{t\in[0,1]} \left| J_{n,h}^{-1}(t) \sum_{i=1}^{n} f''(q_i)(z_{n:i} - t)^2 K_h(z_{n:i} - t) \Delta z_{ni} \right| \le C_f h^2. \tag{14}$$

При выводе (14) мы учли также (4) и определение (12) величины $J_{n,h}(t)$.

Оценим теперь первое слагаемое правой части (13). Положим

$$u_{n,i,t,h} = \frac{z_{n:i} - t}{h}, \quad \Delta u_{n,i,h} = u_{n,i,t,h} - u_{n,i-1,t,h}, \quad i = 1, \dots, n+1. \tag{15}$$

Заметим, что $\{i : |z_{n:i} - t| \le h\} \equiv \{i : |u_{n,i,t,h}| \le 1\}$ и справедливы соотношения

$$\Delta u_{n,i,h} \equiv \frac{\Delta z_{ni}}{h}, \qquad \sum_{i:|u_{n,i,t,h}|\le 1} \Delta u_{n,i,h} \le \frac{2h + \delta_n}{h}. \tag{16}$$

Поскольку в силу $(A_3)$ выполнено $\int_{|u|\le 1} uK(u) = 0$, то с учетом (15), (16) и известной оценки погрешности аппроксимации интегральными суммами Римана соответствующего интеграла от гладкой функции на отрезке, для любого фиксированного $t \in [h, 1-h]$ имеем

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (z_{n:i} - t) K_h(z_{n:i} - t) \Delta z_{ni} \right| = \\ = \left| h \sum_{i:|u_{n,i,t,h}|\le 1} u_{n,i,t,h} K(u_{n,i,t,h}) \Delta u_{n,i,h} \right| = \\ = \left| h \sum_{i:|u_{n,i,t,h}|\le 1} u_{n,i,t,h} K(u_{n,i,t,h}) \Delta u_{n,i,h} - h \int\limits_{|u|\le 1} uK(u) du \right| \le \\ \le h \max_{|u|\le 1} \left| (uK(u))' \right| \sum_{i:|u_{n,i,t,h}|\le 1} (\Delta u_{n,i,h})^2 \le L\delta_n \left( 2 + \frac{\delta_n}{h} \right). \tag{17}$$

При выводе соотношения (17), правая часть которого не зависит от $t$, мы учли также оценку из $(A_3)$ и обозначение из $(A_4)$. Теперь из (17), (4) и леммы 2 немедленно получаем следующую оценку для первого слагаемого правой части (13):

$$\sup_{t\in[h,1-h]}\left|J_{n,h}^{-1}(t)f'(t)\sum_{i=1}^{n}(z_{n:i}-t)K_h(z_{n:i}-t)\Delta z_{ni}\right|\le\frac{LC_f\delta_n\big(2+\delta_n/h\big)}{1-2L\delta_n/h}.$$

Кроме того, аналогично оценке (14), имеет место очевидное неравенство

$$\sup_{t\in[0,1]}\left|J_{n,h}^{-1}(t)f'(t)\sum_{i=1}^{n}(z_{n:i}-t)K_h(z_{n:i}-t)\Delta z_{ni}\right|\le C_f h.$$

Эти оценки вместе с представлением (13) и соотношением (14) завершают доказательство леммы. □

Нам также потребуется следующее вспомогательное утверждение, доказанное в [12].

**Лемма 4.** *Для любых $y>0$ и $h\in(0,1/2)$ на подмножестве элементарных исходов, определяемых соотношением $\delta_n<h/(8L)$, имеет место следующая оценка:*

$$\mathbb{P}_{\mathcal{F}_n}\left((\sigma\,L)^{-1}\delta_n^{-1/2}h\sup_{t\in[0,1]}|\nu_{n,h}(t)|>x\right)\le\frac{1028}{\big(1-4L\delta_n/h\big)^2}x^{-2},$$

*где символ $\mathbb{P}_{\mathcal{F}_n}$ обозначает условную вероятность при фиксации $\sigma$-алгебры $\mathcal{F}_n$, введенной в условии $(A_2)$.*

Завершим доказательство теоремы 1. Положим

$$\zeta_n(h)=\sup_{t\in[0,1]}|\nu_{n,h}(t)|.$$

С учетом леммы 4 имеет место следующее соотношение

$$\mathbb{P}\big(\zeta_n(h)>y,\,\delta_n\le h/(8L)\big)=\mathbb{E}I\big(\delta_n\le h/(8L)\big)\mathbb{P}_{\mathcal{F}_n}\big(\zeta_n(h)>y\big)\le$$
$$\le 4112\sigma^2L^2y^{-2}h^{-2}\mathbb{E}\delta_n.$$

Следовательно,

$$\mathbb{P}\big(\zeta_n(h)>y\big)\le 4112\sigma^2L^2y^{-2}h^{-2}\mathbb{E}\delta_n+\mathbb{P}\big(\delta_n>h/(8L)\big).$$

Нам остается воспользоваться тождеством (11) и первым утверждением леммы 3. Используя же второе утверждение леммы 3, немедленно получаем оценку (8), приведенную в замечании 5.

## References


[1] Z. Cai, B. Jing, X. Kong, Z. Liu, *Nonparametric regression with nearly integrated regressors under long-run dependence*, Econom. J., **20**:1 (2017), 118–138. Zbl 1521.62142

[2] J. Chen, L.X. Zhang, *Local linear M-estimation for spatial processes in fixed-design models*, Metrika, **71**:3 (2010), 319–340. Zbl 1185.62168

[3] J. Gao, S. Kanaya, D. Li, D. Tjostheim, *Uniform consistency for nonparametric estimators in null recurrent time series*, Econom. Theory, **31**:5 (2015), 911–952. Zbl 1441.62696

[4] M. Hirukawa, I. Murtazashvili, A. Prokhorov, *Uniform convergence rates for nonparametric estimators smoothed by the beta kernel*, Scand. J. Stat., **49**:3 (2022), 1353–1382. Zbl 1496.62067

[5] P. Li, X. Li, L. Chen, *The asymptotic normality of internal estimator for nonparametric regression*, J. Inequal. Appl. (2018), Paper No. 231. Zbl 1498.62087

[6] X. Li, W. Yang, S. Hu, *Uniform convergence of estimator for nonparametric regression with dependent data*, J. Inequal. Appl. (2016), Paper No. 142. Zbl 1337.62061

[7] O.B. Linton, D.T. Jacho-Chavez, *On internally corrected and symmetrized kernel estimators for nonparametric regression*, Test, **19**:1 (2010), 166–186. Zbl 1203.62070

[8] O. Linton, Q. Wang, *Nonparametric transformation regression with nonstationary data*, Econom. Theory, **32**:1 (2016), 1–29. Zbl 1442.62750

[9] Q. Wang, P.C.B. Phillips, *Optimal bandwidth selection in nonlinear cointegrating regression*, Econom. Theory, **39**:6 (2023), 1325–1337. Zbl 7785632

[10] Y. Wang, M. Tang, *Local M-estimation for conditional variance in heteroscedastic regression models*, Commun. Stat. Theory Methods, **44**:1 (2015), 48–62. Zbl 1311.62060

[11] Q. Zheng, C. Gallagher, K.B. Kulasekera, *Adaptively weighted kernel regression*, J. Nonparametr. Stat., **25**:4 (2013), 855–872. Zbl 1416.62235.

[12] I.S. Borisov, Yu. Yu. Linke, P.S. Ruzankin, *Universal weighted kernel-type estimators for some class of regression models*, Metrika, **84**:2 (2021), 141–166. Zbl 1461.62046.

[13] Yu. Linke, I. Borisov, P. Ruzankin, V. Kutsenko, E. Yarovaya, S. Shalnova, *Universal local linear kernel estimators in nonparametric regression*, Mathematics, **10** (2022), 2693.

[14] Yu. Yu. Linke, I.S. Borisov, P.S. Ruzankin, *Universal kernel-type estimation of random fields*, Statistics, **57**:4 (2023), 785–810. Zbl 07729075

[15] Yu. Linke, I. Borisov, P. Ruzankin, V. Kutsenko, E. Yarovaya, S. Shalnova, *Multivariate universal local linear kernel estimators in nonparametric regression: uniform consistency*, Mathematics, **12** (2024), 1890.

[16] Yu. Yu. Linke, I.S. Borisov, *Insensitivity of Nadaraya–Watson estimators to design correlation*, Commun. Stat. Theory Methods, **51**:19 (2022), 6909–6918. Zbl 07585027

[17] Yu. Yu. Linke, *Towards insensitivity of Nadaraya–Watson estimators to design correlation*, Theory Probab. Appl., **68**:2 (2023), 198–210. Zbl 07723256

[18] Yu. Yu. Linke, *On sufficient conditions for the consistency of local linear kernel estimators*, Math. Notes, **114**:3 (2023), 283–296. Zbl 7761769

[19] H.-G. Müller, *Nonparametric regression analysis of longitudinal data*, Berlin etc.: Springer Verlag, 1998. Zbl 0664.62031

[20] Yu. Yu. Linke, *Kernel estimators for the mean function of a stochastic process under sparse design conditions*, Siberian Adv. Math., **32** (2022), 269–276.

[21] Yu. Yu. Linke, I.S. Borisov, *Universal nonparametric kernel-type estimators for the mean and covariance functions of a stochastic process*, Theory Probab. Appl., **69**:1 (2024), 35–58. Zbl 7842544

Yuliana Yurievna Linke
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
*Email address*: linke@math.nsc.ru