S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 2, стр. ?–? (2024) УДК 519.234
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 62G08

О ТОЧНОСТИ РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ЛОКАЛЬНО–ПОСТОЯННЫХ ЯДЕРНЫХ ОЦЕНОК ДЛЯ ГЛАДКИХ РЕГРЕССИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Ю.Ю. Линке

Представлено Н.С. Аркашовым

Abstract: The paper considers universal locally constant kernel estimators in nonparametric regression. Previously, these estimators were studied only in the case of a continuous regression function. It is shown that with the additional condition of smoothness of the regression function, the accuracy of the uniform approximation can be improved.

Keywords: nonparametric regression, universal local constant kernel estimator, uniform consistency, fixed design, random design.

1 Введение

В работе рассматривается следующая регрессионная модель: даны наблюдения $X_1, \dots, X_n$ (так называемые отклики), которые представимы в виде

$$X_i = f(z_i) + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

Linke, Y.Y., On the accuracy of the uniform approximation of universal local constant kernel estimators for smooth regression functions.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН (проект FWNF-2024-0001).

Поступила ?? октября 2024 г., опубликована ?? декабря 2024 г.

где $f(t), t \in [0,1]$, — неизвестная достаточно гладкая (?) скалярная функция; ненаблюдаемые погрешности $\{\varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ — центрированные случайные величины, не обязательно независимые или одинаково распределенные; величины $\{z_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ нам известны и могут быть как случайными, так и детерминированными. Таким образом, мы наблюдаем лишь зашумленные значения $\{X_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ регрессионной функции f в некотором известном наборе ее аргументов $\{z_i,\ i = 1, \ldots, n\}$, который мы будем называть набором регрессоров или просто регрессорами. Задача состоит в том, чтобы по парам наблюдений $\{(z_i, X_i);\ i = 1, \ldots, n\}$ восстановить (оценить) функцию f.

Большое число работ посвящено решению задачи оценивания функции f методами ядерного сглаживания в тех или иных условиях на параметры модели (1) (например, в случае достаточно гладких функций в качестве ориентира укажем недавние работы [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11]). Чтобы оценить регрессионную функцию, с необходимостью нужно накладывать те или иные ограничения на регрессоры. Модели с детерминированными и случайным регрессорами рассматриваются, как правило, отдельно (вне зависимости от ограничений на другие параметры модели), при этом используются условия регулярного заполнения области определения регрессионной функции или те или иные формы слабой зависимости (см., например, вышеуказанные работы). Универсальные и более общие условия на регрессоры предложены в работах [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], в которых реализуется (в условии лишь непрерывности регрессионной функции) следующая идея: для того, чтобы восстановить регрессионную функцию, относительно регрессоров достаточно требовать лишь условие асимптотически плотного заполнения области определения регрессионной функции. Условия такого типа по сути являются необходимыми. В отличие от известных ранее результатов, новые условия на регрессоры в терминах плотных данных универсальны и нечувствительны к стохастической природе регрессоров, что позволяет в едином подходе рассматривать ситуацию детерминированных и случайных регрессоров, при этом без требования соответствующих условий регулярности или слабой зависимости.

Оказывается, для достаточно гладких регрессионных функций точность равномерной аппроксимации универсальных локально-постоянных ядерных оценок из [12] может быть улучшена. Установление отмеченного факта и является целью настоящей заметки. При этом от регрессоров, как и в [12], мы будем требовать лишь свойство плотного заполнения области определения регрессионной функции. Стоит отметить, что подобный эффект для классических ядерных оценок и условий на регрессоры хорошо известен (см. например, [19] в случае оценок Надарая–Ватсона при условии независимости и одинаковой распределенности регрессоров).

2 Основные результаты

Нам потребуется ряд условий.

($\mathbf{A}_1$) Даны двумерные наблюдения $\{(z_i, X_i);\ i = 1, \ldots, n\}$, представимые в виде

$$X_i = f(z_i) + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где $f(t)$ — неизвестная дважды непрерывно дифференцируема скалярная функция на $[0, 1]$, случайные погрешности $\{\varepsilon_i;\ i = 1, \ldots, n\}$ ненаблюдаемы, набор регрессоров $\{z_i;\ i = 1, \ldots, n\}$ состоит из случайных величин, вообще говоря, с неизвестными распределениями со значениями на $[0, 1]$, не обязательно независимых или одинаково распределенных. Предполагается, что случайные величины $\{z_i;\ i = 1, \ldots, n\}$ могут зависеть от n.

Замечание 1. Отметим, что условие (A_1) включает в себя и ситуацию фиксированных регрессоров. Отрезок $[0, 1]$ в качестве области изменения регрессоров мы рассматриваем исключительно с целью простоты изложения.

($\mathbf{A}_2$) При всех $n \geq 1$ случайные погрешности $\{\varepsilon_i;\ i = 1, \ldots, n\}$ с вероятностью 1 при всех $i, j \leq n$, $i \neq j$, удовлетворяют следующим условиям:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{F}_n} \varepsilon_i = 0, \qquad \sup_{i \leq n} \mathbb{E}_{\mathcal{F}_n} \varepsilon_i^2 \leq \sigma^2, \qquad \mathbb{E}_{\mathcal{F}_n} \varepsilon_i \varepsilon_j = 0, \tag{3}$$

где константа $\sigma^2 > 0$ неизвестна и не зависит от n, а символ $\mathbb{E}_{\mathcal{F}_n}$ обозначает условное математическое ожидание при фиксации σ-алгебры $\mathcal{F}_n$, порожденной случайными величинами $\{z_i;\ i = 1, \ldots, n\}$.

($\mathbf{A}_3$) Ядерная функция $K(t)$, $t \in \mathbb{R}$ является плотностью симметричного распределения с носителем $[-1, 1]$, т.е. $K(t) \geq 0$, $K(t) = K(-t)$ при всех $t \in [-1, 1]$ и $\int_{[-1,1]} K(t) dt = 1$. Кроме того, ядерная функция $K(t)$ непрерывно дифференцируема на открытом интервале $(0, 1)$ и $\sup_{t \in [0,1]} (K(t) + |K'(t)|) \leq L < \infty$ при $L \geq 1$.

Введем еще ряд обозначений и соглашений. Положим

$$K_h(t) = h^{-1} K(h^{-1} t).$$

Понятно, что $K_h(t)$ — плотность распределения на $[-h, h]$. С учетом условия (A_1) обозначим через $C_f > 0$ константу, удовлетворяющую соотношению

$$\sup_{t \in [0,1]} (|f'(t)| + |f''(t)|) \leq C_f < \infty.$$

Запись $\zeta_n = O_p(\eta_n)$ означает, что для некоторой величины $\eta_n > 0$ (возможно, случайной) и всех чисел $M > 0$ выполнено

$$\limsup \mathbb{P}(|\zeta_n| / \eta_n > M) \leq \beta(M),$$

где функция $\beta(M)$ не зависит от параметров рассматриваемой модели и $\lim_{M \to \infty} \beta(M) = 0$. Символ $\widetilde{O}_p(\eta_n)$ будет использоваться в случае, если функция $\beta(M)$ может зависеть параметров модели (за исключением объема наблюдений n). Условимся, что всюду в дальнейшем все пределы, если не оговорено иное, берутся при $n \to \infty$.

Обозначим через $z_{n:1} \le \ldots \le z_{n:n}$ элементы вариационного ряда, построенного по выборке регрессоров $\{z_i;\ i = 1, \ldots, n\}$. Положим $z_{n:0} = 0$, $z_{n:n+1} = 1$ и $\Delta z_{ni} = z_{n:i} - z_{n:i-1}$, $i = 1, \ldots, n+1$. Отклики из (2), ассоциированный с порядковой статистикой $z_{n:i}$, обозначим через X_{ni}. Универсальную локально-постоянную оценку $f^*_{n,h}(t)$ для функции $f(t)$ определим равенством

$$f^*_{n,h}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{ni} K_h(t - z_{n:i}) \Delta z_{ni}}{\sum_{i=1}^{n} K_h(t - z_{n:i}) \Delta z_{ni}}. \tag{4}$$

Заметим, что

$$f^*_{n,h}(t) = \arg\min_a \sum_{i=1}^{n} (X_{ni} - a)^2 K_h(t - z_{n:i}) \Delta z_{ni},$$

т.е. ядерная оценка $f^*_{n,h}(t)$, как и классические оценки Надарая-Ватсона, является оценкой взвешенного метода наименьших квадратов и принадлежит классу локально–постоянных оценок. Но в методе наименьших квадратов используются другие веса, определяемые порядковыми статистиками $\{z_{n:i}\}$, а вместо исходных наблюдений X_i участвуют конкомитанты X_{ni}, ассоциированные с указанными порядковыми статистиками.

Введем, наконец, следующее центральное условие.

($\mathbf{A}_4$) Имеет место предельное соотношение $\delta_n = \max_{1 \le i \le n+1} \Delta z_{ni} \xrightarrow{p} 0$.

Замечание 2. Условие (A_4) является единственным ограничением на регрессоры, гарантирующем равномерную состоятельность универсальных локально–постоянных ядерных оценок $f^*_{n,h}(t)$. Таким образом, относительно регрессоров требуется лишь, чтобы они с увеличением объема выборки n с высокой вероятностью образовывали измельчающееся разбиение области задания регрессионной функции f. Подробнее условия такого типа обсуждаются в [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [20], [21].

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (A_1)–(A_3). Тогда для любого фиксированного $h \in (0, 1/2)$ с вероятностью 1 справедливо соотношение*

$$\sup_{t \in [0,1]} |f^*_{n,h}(t) - f(t)| \le \frac{6LC_f\big((1 + \delta_n/h)h^2 + \delta_n\big)}{1 - 4L\delta_n/h} + \zeta_n(h), \tag{5}$$

где случайная величина $\zeta_n(h)$ такова, что

$$\mathbb{P}\left(\zeta_n(h) > y\right) \le C\sigma^2 L^2 y^{-2} h^{-2} \mathbb{E}\delta_n + \mathbb{P}(\delta_n > h/(8L))$$

и C есть абсолютная положительная константа.

Замечание 3. Формально в теореме 1 не требуется выполнение условия (A_4), но приведенные оценки становятся содержательными лишь в этом случае. Аналогичное замечание справедливо и для приводимой далее теоремы 2.

Замечание 4. Отметим, что для малости первого слагаемого в правой части (5) с необходимостью нужно требовать следующее условие на размер окна h: $h = h_n \to 0$ с ростом объема выборки. Далее, если выполнено (A_4), то $\zeta_n(h) = O_p\big((\sigma+1)Lh^{-1}(\mathbb{E}\delta_n)^{1/2}\big)$. Таким образом, для сходимости $\zeta_n(h) \xrightarrow{p} 0$ требуется, чтобы размер окна $h = h_n \to 0$ удовлетворял соотношению $\mathbb{E}\delta_n/h_n^2 \to 0$. Последнее соотношение в силу неравенства Маркова очевидным образом влечет сходимость $\delta_n/h_n^2 \xrightarrow{p} 0$, так что первое слагаемое в правой части в (5) есть $\widetilde{O}_p(h_n^2)$. Таким образом, в качестве размера окна $h = h_n$ можно выбрать, например, решение уравнения $h^{-1}(\mathbb{E}\delta_n)^{1/2} = h^2$. Фактически таким образом определенный размер окна уравнивает по h порядок малости обоих слагаемых в правой части оценки для супремальной нормы, приведенной в теореме 1. В частности, если $\mathbb{E}\delta_n = O(1/n)$, то $h_n = O\big(n^{-1/6}\big)$.

Из теоремы 1 и замечания 4 получаем

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы 2 и условие (A_4), то существует последовательность $h = h_n \to 0$, для которой имеет место предельное соотношение*

$$\gamma_n = |f^*_{n,h_n}(t) - f(t)| \xrightarrow{p} 0.$$

В частности, если в качестве размера окна h_n взять решение уравнения $h_n^{-1}(\mathbb{E}\delta_n)^{1/2} = h_n^2$, то $\gamma_n = \widetilde{O}_p\big(h_n^2\big)$.

Рассмотрим теперь для сравнения некоторые известные ранее результаты о равномерной состоятельности универсальной локально-постоянной ядерной оценки $f^*_{n,h}(t)$ для негладких непрерывных регрессионных функций.

Частным случаем теоремы 1 из [12] для непрерывных регрессионных функций является следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (A_1)–(A_3). Тогда для любого фиксированного $h \in (0, 1/2)$ с вероятностью 1*

$$\sup_{t\in[0,1]} |f^*_{n,h}(t) - f(t)| \le \omega_f(h) + \zeta_n(h), \tag{6}$$

где $\omega_f(h) = \sup_{t,s\in[0,1]:|t-s|\le h} |f(t) - f(s)|$, а случайная величина $\zeta_n(h)$ определена в теореме 1.

Замечание 5. С учетом того, что при выполнении (A_4) справедливо соотношение $\zeta_n(h) = O_p\big((\sigma+1)Lh^{-1}(\mathbb{E}\delta_n)^{1/2}\big)$, в качестве размера окна $h = h_n \to 0$ можно взять, например, решение уравнения $h^{-1}(\mathbb{E}\delta_n)^{1/2} = \omega_f(h)$. Фактически таким образом выбранный размер окна уравнивает по h порядок малости обоих слагаемых в правой части оценки для супремальной нормы, приведенной в теореме 2. Еще раз стоит отметить, что в условии (A_1) для справедливости утверждения теоремы 1 достаточно требовать лишь непрерывность регрессионной функции $f(t)$.

Из теоремы 2 и замечания 5 получаем

Следствие 2. *Если выполнены условия теоремы 2 и условие (A_4), то существует последовательность $h = h_n \to 0$, для которой имеет место предельное соотношение*

$$\gamma_n = |f^*_{n,h_n}(t) - f(t)| \xrightarrow{p} 0.$$

В частности, если в качестве h_n выбрать решение уравнения

$$h_n^{-1}(\mathbb{E}\delta_n)^{1/2} = \omega_f(h_n),$$

то $\gamma_n = \widetilde{O}_p\big(\omega_f(h_n)\big)$.

Замечание 6. Пусть $\mathbb{E}\delta_n = O(1/n)$ и функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha \in (0,1]$. Тогда $h_n = O\big(n^{-\frac{1}{2(1+\alpha)}}\big)$ и $\omega_f(h_n) = O\big(n^{-\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\big)$. В частности, если функция f удовлетворяют условию Липшица ($\alpha = 1$), то $\gamma_n = \widetilde{O}_p(n^{-1/4})$. Таким образом, при выполнении (A_4) из результатов [12] получаем лишь соотношение $\gamma_n = \widetilde{O}_p(n^{-1/4})$, а в качестве следствия теоремы 1 (см. следствие 1 и замечание 4) — соотношение $\gamma_n = \widetilde{O}_p(n^{-1/3})$.

3 Доказательство основного результата

Всюду в этом разделе считаем выполненными условия (A_1)–(A_3). Погрешности из регрессионного уравнения (2), ассоциированные с порядковой статистикой $z_{n:i}$, обозначим через ε_{ni}. Нетрудно видеть, что случайные величины $\{\varepsilon_{ni};\ i = 1,\ldots,n\}$ также удовлетворяют условию (A_2), а регрессионное уравнение (2) можно переписать следующим образом:

$$X_{ni} = f(z_{n:i}) + \varepsilon_{ni}, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Принимая во внимание это соотношение, получаем тождество

$$f^*_{n,h}(t) - f(t) = r_{n,h}(t) + \nu_{n,h}(t), \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} r_{n,h}(t) &= J^{-1}_{n,h}(t)\sum_{i=1}^{n}\big(f(z_{n:i}) - f(t)\big)K_h\left(t - z_{n:i}\right)\Delta z_{ni}, \\ J_{n,h}(t) &= \sum_{i=1}^{n} K_h(t - z_{n:i})\Delta z_{ni}, \\ \nu_{n,h}(t) &= J^{-1}_{n,h}(t)\sum_{i=1}^{n} K_h\left(t - z_{n:i}\right)\Delta z_{ni}\varepsilon_{ni}. \end{aligned} \tag{8}$$

Введем обозначение $J_h(t) = \int_0^1 K_h(t - z)dz$.

Лемма 1. *Для любого $h < 1/2$ имеют место соотношения*

$$J_h(t) = 1 \text{ при всех } t \in [h, 1-h],$$
$$\inf_{t\in[0,1]} J_h(t) = 1/2, \qquad \sup_{t\in[0,1]} |J_{n,h}(t) - J_h(t)| \le 2L\delta_n/h.$$

Доказательство леммы 1 приведено в [12].

Лемма 2. *Для любого $h < 1/2$ имеют место соотношения*

$$\inf_{t\in[0,1]} J_{n,h}(t) \ge 1/2 - 2L\delta_n/h.$$

Это утверждение нетрудно извлечь из леммы 1.

Лемма 3. *Для любого $h < 1/2$ имеют место соотношения*

$$\sup_{t\in[0,1]} |r_{n,h}(t)| \le \frac{6LC_f\big((1+\delta_n/h)h^2 + \delta_n\big)}{1 - 4L\delta_n/h}.$$

Доказательство. Положим

$$\mu_{n,h}(t) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(z_{n:i} - f(t)\big)K_h(z_{n:i} - t)\Delta z_{ni},$$
$$u_{n,i,t,h} = \frac{z_{n:i} - t}{h},\ \Delta u_{n,i,h} = u_{n,i,t,h} - u_{n,i-1,t,h} \equiv \frac{\Delta z_{ni}}{h},\ i = 1, \ldots, n+1 \tag{9}$$

и заметим, что ввиду свойств ядра K область суммирования в последней вышеуказанной сумме есть множество

$$\{i : |z_{n:i} - t| \le h\} \equiv \{i : |u_{n,i,t,h}| \le 1\}.$$

Этот факт является принципиальным для дальнейших рассуждений. Для любого фиксированного $t \in [0,1]$ имеем

$$\mu_{n,h}(t) = f'(t)h \sum_{i:|u_{n,i,t,h}|\le 1} u_{n,i,t,h}K(u_{n,i,t,h})\Delta u_{n,i,h} +$$
$$+2^{-1}h^2 \sum_{i:|u_{n,i,t,h}|\le 1} f''(q_{n,i,t})u_{n,i,t,h}^2 K(u_{n,i,t,h})\Delta u_{n,i,h} \equiv I_1 + I_2,$$

где точка $q_{n,i,t}$ лежит между t и $z_{n:i}$, тем самым $|q_{n,i,t}| \le h$. Заметим, что в силу (A_3) выполнено $\int_{-1}^{1} uK(u) = 0$, а потому с учетом известной оценки погрешности аппроксимации интегральными суммами Римана соответствующего интеграла от гладкой функции на отрезке, имеем

$$|I_1| \le h|f'(t)|\Big| \sum_{i:|u_{n,i,t,h}|\le 1} u_{n,i,t,h}K(u_{n,i,t,h})\Delta u_{n,i,h} - \int_{|u|\le 1} uK(u)du\Big| \le$$
$$\le 3C_f h \max_{|u|\le 1}(K(u) + |u||K'(u)|) \max_i \Delta u_{n,i,h} \le 3C_f L\delta_n. \tag{10}$$

Далее, с учетом условия (A_3) выполнено

$$\sum_{i:|u_{n,i,t,h}|\le 1} \Delta u_{n,i,h} \le \frac{2h + \delta_n}{h}.$$

Таким образом, для любого фиксированного t справедлива оценка

$$|I_2| \le h^2 L C_f (1 + \delta_n/h),$$

при этом правая часть этого соотношения, как и правая часть соотношения (10), не зависит от t. Следовательно,

$$\sup_{t\in[0,1]} |\mu_{n,h}(t)| \le \sup_{t\in[0,1]} |I_1| + \sup_{t\in[0,1]} |I_2| \le 3C_f L\delta_n + h^2 C_f L(1 + \delta_n/h). \quad (11)$$

Учтем теперь, что в силу определений (8) и (9) выполнено

$$\sup_{t\in[0,1]} |r_{n,h}(t)| \le \sup_{t\in[0,1]} |\mu_{n,h}(t)| \left(\inf_{t\in[0,1]} J_{n,h}(t)\right)^{-1}.$$

Эта оценка вместе с соотношением (11) и утверждением леммы 2 завершает доказательство. □

Нам также потребуется следующее вспомогательное утверждение из [12].

Лемма 4. *Для любых $y > 0$ и $h \in (0, 1/2)$ на подмножестве элементарных исходов, определяемых соотношением $\delta_n < h/(8L)$, имеет место следующая оценка:*

$$\mathbb{P}_{\mathcal{F}_n}\left((\sigma\, L)^{-1}\delta_n^{-1/2} h \sup_{t\in[0,1]} |\nu_{n,h}(t)| > x\right) \le \frac{1028}{\left(1 - 4L\delta_n/h\right)^2} x^{-2}.$$

Завершим теперь доказательство теоремы 1. Положим

$$\zeta_n(h) = \sup\nolimits_{t\in[0,1]} |\nu_{n,h}(t)|.$$

С учетом леммы 4 имеет место следующее соотношение

$$\mathbb{P}\big(\zeta_n(h) > y,\, \delta_n \le h/(8L)\big) = \mathbb{E} I\big(\delta_n \le h/(8L)\big) \mathbb{P}_{\mathcal{F}_n}\big(\zeta_n(h) > y\big) \le$$
$$\le 4112\sigma^2 L^2 y^{-2} h^{-2} \mathbb{E}\delta_n.$$

Следовательно,

$$\mathbb{P}\big(\zeta_n(h) > y\big) \le 4112\sigma^2 L^2 y^{-2} h^{-2} \mathbb{E}\delta_n + \mathbb{P}\big(\delta_n > h/(8L)\big).$$

Нам остается воспользоваться тождеством (7) и утверждением леммы 3. Теорема 1 доказана.

References

[1] Cai Z. Jing B., Kong X., Liu Z. Nonparametric regression with nearly integrated regressors under long-run dependence // Econom. J. — 2017. — V.20(1). — P.118–138.

[2] Chen, J., Zhang, L.X. Local linear M-estimation for spatial processes in fixed-design models // Metrika. — 2010 — V.71. — P. 319–340.

[3] Gao J., Kanaya S., Li D., Tjostheim D. Uniform consistency for nonparametric estimators in null recurrent time series // Econom Theory. – 2015. – V.31. – P.911–952.

[4] Hirukawa M., Murtazashvili I., Prokhorov A. Uniform convergence rates for nonparametric estimators smoothed by the beta kernel // Scand. J. Stat. — 2022. — V.49(3). — P. 1353–1382.

[5] Li P., Li X., Chen, L. The asymptotic normality of internal estimator for nonparametric regression // J. Inequal. Appl. — 2018. — 231.
[6] Li X, Yang W., Hu S. Uniform convergence of estimator for nonparametric regression with dependent data // J. Inequal. Appl. — V. 2016. —- Article number: 142.
[7] Linton O. B., Jacho-Chavez D. T. On internally corrected and symmetrized kernel estimators for nonparametric regression // TEST. — 2010. — V.19(1). — P.166–186.
[8] Linton O., Wang Q. Nonparametric transformation regression with nonstationary data // Econom. Theory. — 2016. — v.32(01). — P. 1–29.
[9] Wang Q., Phillips P. C. B. Optimal bandwidth selection in nonlinear cointegrating regression // Econom. Theory. — 2023. — V.39(6). — P. 1325–1337.
[10] Wang Y., Tang M. Local M-estimation for conditional variance in heteroscedastic regression models // Commun. Stat. Theory Methods. – 2015. – T. 44(1). – P.48-62.
[11] Zheng Q., Gallagher C., Kulasekera K. B. Adaptively weighted kernel regression // J. Nonparametr. Stat. — 2013. — V.25(4). P. 855–872.
[12] Borisov I.S., Linke Yu.Yu., Ruzankin P.S. Universal weighted kernel-type estimators for some class of regression models // Metrika. — 2021. — V. 84. — № 2. — P.141–166.
[13] Linke Y., Borisov I., Ruzankin P., Kutsenko V., Yarovaya E., Shalnova S. Universal local linear kernel estimators in nonparametric regression // Mathematics. — 2022. — V.10. — № 15. — 2693.
[14] Linke Yu. Yu., Borisov I. S., Ruzankin P. S. Universal kernel-type estimation of random fields. // Statistics. — 2023. — V.57. — № 4. — P.785–810.
[15] Linke Y., Borisov I., Ruzankin P., Kutsenko V., Yarovaya E., Shalnova S. Multivariate universal local linear kernel estimators in nonparametric regression: uniform consistency. Mathematics. — 2024. — V.12. — № 12. — 1890.
[16] Linke Yu. Yu., Borisov I. S. Insensitivity of Nadaraya–Watson estimators to design correlation // Commun. Stat. Theory Methods. — 2022. — V.51(19). — P.6909–6918.
[17] Linke Yu. Yu. Towards insensitivity of Nadaraya–Watson estimators to design correlation // Theory Probab. Appl. — 2023. — V.68 — № 2. — P.198–210.
[18] Linke Yu. Yu. On sufficient conditions for the consistency of local linear kernel estimators // Math. Notes. — 2023. — V. 114. — № 3. — P.283–296.
[19] Müller H.-G. Nonparametric regression analysis of longitudinal data. — New York: Springer, 1988.
[20] Linke Yu. Yu. Kernel estimators for the mean function of a stochastic process under sparse design conditions // Siberian Adv. Math. — 2022. — V. 32. — № 4. — P.269–276.
[21] Linke Yu. Yu., Borisov I.S. Universal nonparametric kernel-type estimators for the mean and covariance functions of a stochastic process // Theory Probab. Appl. — 2024. — V.69(1). — P. 35–58.

Yuliana Yurievna Linke
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: linke@math.nsc.ru