S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

*Том **, № *, стр. ***–*** (2024)* УДК ???.??517.977.1
https://doi.org/??? MSC ??X??65G20,65L08

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННЫХ ОЦЕНОК ОБЛАСТЕЙ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВОЗМУЩАЮЩИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

А.Н. Рогалев

Представлено М.А. Шишлениным

Abstract: The paper studies algorithms for solving applied problems of estimating the areas of solutions of differential equations. Such problems arise when assessing the practical stability of movements on a finite time interval, when determining the areas of attainability of controlled systems, when assessing the areas of survivability of controlled systems, when calculating guaranteed (not probabilistic) boundaries of zones of dangerous states of technical systems, when computing bounded values of parameters of technical systems that correspond to the boundaries of dangerous zones, when calculating the maximum deviations of movements in order to control whether the system's trajectory enters a dangerous zone. In the problems listed above, for some of the parameters, only estimates of the ranges of their values are known, which leads to the emergence of sets of solutions. The difficulty in solving these problems lies in the fact that most methods for estimating solution sets of ODE systems (or calculating upper and lower boundaries of solutions) lead to a strong increase in the boundaries of these solution sets. In this case, the problem of finding a solution to the same ODE system with numerical values of the parameters can be correctly posed and a convergent method can exist for it. To overcome such growth of

Rogalev, A.N., Regularization of numerical estimates of solution regions.

Поступила октября 2024 г., опубликована 2024 г.

boundaries of solution sets, it is useful to regularize the estimates of boundaries of solution sets by moving to a linear approximation of the original system. This regularization is specified by the values of compression/extension in given directions, displacement along the time axis, and rotation by a certain angle of the selected directions of the solution set.

Keywords: perturbations, solution set, interior solution, boundary solution, regularization, compression, stretching, displacement, rotation by an angle

1 Введение

Проблема оценки границ множеств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) важна в следующих прикладных задачах [1]-[7]: при оценке практической устойчивости движений на конечном интервале времени, при определении областей достижимости управляемых систем, при оценке областей выживаемости управляемых систем, при вычисления гарантированных (не вероятностных) границ зон опасных состояний технических систем, при вычислении пороговых значений параметров технических систем, которые соответствуют границам опасных зон, при вычислении предельных отклонений движений для контроля попадания траектории системы в опасную зону.

В указанных выше постановках задачи определяются множества решений системы ОДУ с возмущающими воздействиями

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, u), u \in U, y_0 \in Y_0, \tag{1}$$

где $y-$ это $n-$ мерный фазовый вектор системы в евклидовом пространстве R^n, $u-$ вектор возмущающих (управляющих) воздействий, $U-$ компактное множество в евклидовом пространстве R^p, и Y_0- множество начальных данных. Необходимо также строить сечения множеств всех решений этой системы при фиксированном времени.

`Определение.` Множество решений задачи (1), зависящих от возмущающего параметра

$$Y(t) = Y(t, Y_0, U) = \bigcup_{y_0 \in Y_0, u \in U} y(t, y_0, u) = \tag{2}$$

$$= \{y(t_0, y_0, t, u) : t \geq 0, \ \frac{dy}{dt} = f(t, y, u)\ , y(t_0) \in Y_0, \ u(t) \in U\}$$

называется трубкой решений (интегральных кривых), и в общем случае образует достаточно сложную область.

Включение в задачу (1) возмущений двух типов – возмущения, обозначаемого векторной функцией $u(t) \in U$ и возмущения, обозначаемого множеством всех возможных значений начальных данных $y_0 \in Y_0$, расширяет класс решаемых задач, дает возможность учитывать как возмущающих так и управляющих воздействий. При этом возникает ряд достаточно сложных вопросов, требующих индивидуального анализа каждого и внимательного подхода.

Во многих задачах налагается требование на возмущения (управляющие воздействия): $u(t) \in U$. В границах $u(t) \in U$ могут быть выбраны разные возмущающие (управляющие) воздействия, приводящие к различным видам решений. Например, для системы

$$\begin{aligned} \frac{dy_1(t)}{dt} &= y_2(t) + u_1(t), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} &= -y_1(t) + u_2(t) \end{aligned} \tag{3}$$

использование в качестве $u_1(t), u_2(t)$ функций $cos(t), sin(t), \dfrac{t}{t^2+1}$ и других зависимостей, удовлетворяющих включению $u(t) \in U$, влечет линейный или полиномиальный рост решений с различными градиентами роста, то есть приводит к заметным различиям. На самом деле решения системы (3) без возмущения – это колебания, поведение этого решения имеет еще большое отличие от различных растущих решений. Как правило в прикладных задачах находится и используется только оценка максимального значения растущего решения. В итоге вычисленные границы оценок множеств решений могут не соответствовать действительному поведению решений системы (3) под влиянием различного вида возмущающих (управляющих) воздействий.

Далее в статье будем опираться на то, что решения дифференциального уравнения определяют интегральные кривые (траектории решений, в случае рассмотрения динамических систем). Исследование множества решений (3), а значит и в общем случае исследование интегральных кривых множества решений (2) достаточно сложно, так как множество интегральных кривых системы ОДУ может содержать окружности, эллипсы, параболы, гиперболы, логарифмические спирали и образовывать различные фазовые портреты на фазовой плоскости. Эти факты в совокупности являются причиной трудно предсказуемого вида оценок множеств траекторий решений. Сложно или даже иногда невозможно описать, как ведет граница множества траекторий, и записать формулу границы, прогнозировать поведение границы в каждой точке. Поэтому определяются приближения этого множества решений, включающие множество решений.

Чтобы приблизить оценки множеств решений к поведению множеств решений, будем использовать то, что управляющие воздействия могут выбираться независимо от свойств решений. На основе этого оценки множеств решений (2) эффективнее получать отдельно при различных классах управляющих воздействий. Но это будет темой другой статьи.

Далее в этой статье будем полагать,что условие $u(t) \in U$ заменено на условие $u(t) = 0$. Это условие не приводит к существенным изменениям алгоритма оценки множсевт решений, но сокращает объем изложения.

Для большей эффективности описания включений множеств решений предлагается использовать символьные формулы — комбинации знаков операций, констант и переменных величин, имеющие самостоятельный смысл. Эти формулы представляют собой сообщения, указывающие на алгоритм вычисления значения выражения, либо запись выражения для определения области значений величины через свои параметры. В большинстве случаев символьные формулы являются приближениями формул точных решений. Так как большая часть систем ОДУ не интегрируется в квадратурах, символьные формулы не могут быть заданы как формулы точных решений исходных систем.

2 Описание метода оценки множеств решений

Полагаем, что для системы (1) выполнены следующие условия.

1. Вектор функция $f(t, y)$ непрерывна по совокупности переменных t, y в области $[t_0, T] \times R^n$, а также для любой ограниченной замкнутой области $D \subset [t_0, T] \times R^n$ существует такая положительная константа $L < \infty$, что

$$\parallel f(t, y_1, u) - f(t, y_2, u) \parallel \leq L \parallel y_1 - y_2 \parallel \tag{4}$$

для всех $(t, y) \in [t_0, T] \times R^n$. Условие 1 можно заменить на условие

1.a. Правая часть системы (1) является нелинейной функцией, непрерывно дифференцируемой по y, в области $(t, y, u) \in [t_0, T] \times R^n$

2. Существует такая положительная константа $k < \infty$,, что

$$\parallel f(t, y, u) \parallel \leq k(1 + \parallel y \parallel)$$

для всех $(t, y) \in [t_0, T] \times R^n$.

В известных работах оценки множеств решений выполняются одним из следующих способов:

1) поточечное описание оценок множеств решений;

2) представление оценок множеств решений неравенствами;

3) представление множеств решений опорной функцией, определяющейся формулой для ограниченного, выпуклого множества Y, $r(s) = max_{y \in Y}(y, s)$;

4) параметрическое описание границы оценок множества решений;

5) аппроксимация множеств решений классом более простых областей некоторой фиксированной формы (например, эллипсоидами, параллелепипедами,шарами, выпуклыми многогранниками) и выполнение специальных операций над этими множествами.

Достаточно большой объем задач оценки множеств достижимости выполняют методы, основанные на приближении множеств объединением точек ("пикселов") [5], точки определяются при численном решении систем ОДУ.

Эти методы могут требовать выполнения большого объема вычислений и использования большого объема памяти. Для них имеет место явление "расширяющейся сетки"(чем больше множество, тем больше точек необходимо для его аппроксимации). Поэтому построение все более точных оценок множеств решений является актуальной задачей.

Для краткого описания алгоритмической схемы оценки множеств решений системы ОДУ обозначим Y_0- область начальных данных, $T-$ интервал времени, $N-$ число шагов по времени, $\delta = \frac{T}{N}$.

Основу символьного алгоритма составляет построение векторных символьных формул $Sym(t_i, Y_0, y_1, ..., y_n) = (Sym_k(t_i, Y_0, y_1, ..., y_n), k = 1, ..., n)$ на каждом интервале времени $[0, \delta]$ так, чтобы оценка

$$\bigcup_{y_0 \in Y_0} Sym(t_i, y_0, ..., y_n) \supseteq Y(t_i) = Y(t_i, Y_0),$$

$Y(t_i) = Y(t_i, Y_0)$ определялась из формулы (2). Для этого символьные формулы должны достаточно точно приближать точное решение. При этом самыми трудоемкими операциями будут операции по организации и хранению символьных формул, участвующих в вычислениях оценок областей значений, а общее число этих операций будет существенно меньшим по сравнению с числом операций, выполняемых при вычислении области значений решений.

На следующем шаге численного алгоритма на основе построенных символьных формул решений, вычисляются оценки множеств решений как оценки областей значений построенного символьного выражения [8]- [12]. Например, вычисляются величины

$$\max_{y_{0,k} \in Y_0} Sym_k(t_i, y_0, ..., y_n),\ k = 1, ..., n.$$

Эффективность алгоритма оценивания областей значений по символьной формуле определяется малыми затратами времени и числа операций. Это показано в работах [8]- [12].

Для построения символьных формул можно использовать методы, основанные на инъективности (взаимной однозначности) решения/оператора сдвига вдоль траектории системы нелинейных ОДУ для определенных классов систем ОДУ [10], [12]. Характерный признак таких систем – ограниченность решений на всем интервале интегрирования. При выполнении этого свойства оператора сдвига граница множества решений переходит в границу этого множества в разные моменты времени. Это дает возможность выделить опорную точку внутри множества решений, а также реперные (обозначающие рубеж) точки на границе начальных данных. Применяя численный метод к задачам с реперными точками на границе множества начальных данных и к опорной точке вычисляем набор характерных точек множества решений в различные значения времени. Для линейных систем ОДУ свойство взаимной однозначности есть следствие формулы Коши общего решения. Кроме этого имеет место свойство аффинности отображений, задаваемых решениями линейными системами ОДУ. Для нелинейных систем ОДУ, имеющих единственные решения для каждого из значений из некоторой области начальных данных, решения будут переводить границы областей начальных данных в границы областей решений в каждый конкретный момент времени. Класс таких нелинейных систем ОДУ состоит из систем, удовлетворяющих ограничениям равномерной ограниченности решений (устойчивых по Лагранжу).

Для системы (1) с нелинейной правой частью можно построить «возмущенную» систему, связанную с системой (1) с измененными начальными данными,

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), u(t_0) = y_0 \tag{5}$$

$$\frac{dz}{dt} = f(t,z) + g(t,z), \ \ \mathrm{z}(t_0) = y_0 \tag{6}$$

соответственно, и предположим, что производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ существует и непрерывна. Тогда решения этих систем связаны соотношением [16], [17]

$$z(t) = y(t) + \int_0^1 \frac{\partial y}{\partial y_0}(t_0, t, y_0 + s(z_0 - y_0))(z_0 - y_0)ds + \\ + \int_{t_0}^t \frac{\partial y}{\partial y_0}(s, t, z(s))g(s, z(s))ds. \tag{7}$$

Это соотношение помогают оценивать отклонения решений систем ОДУ под влиянием возмущений, то есть оценивать множества решений системы с возмущениями.

При этом следует учесть, что множества решений ОДУ имеют сложные границы (граничные поверхности в пространстве размерностей), которые невозможно описать формулами. В результате используются возможности – либо описать значения граничных поверхностей в наборе дискретных точек (на сетке), либо вычислить оценки максимальных значений в направлениях осей координат, либо вычислить оценки максимальных значений в любом выбранном направлении.

Применим символический метод для оценки множеств решений уравнения колебаний (**??**) с начальными данными $-0.1 \leq y_1(t_0) \leq 0.1$, $0.9 \leq y_2(t_0) \leq 1.1$ учитывая геометрические свойства множеств решений.

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_1. \tag{8}$$

Получаем хорошее совпадение оценок с точными границами множеств решений, изображенное на рисунке 1 на достаточно большом интервале времени. При этом вычислительные затраты на построение оценок этой задачи формируются за счет нескольких вычислений по построенной символьной формуле и невелики [8]-[12].

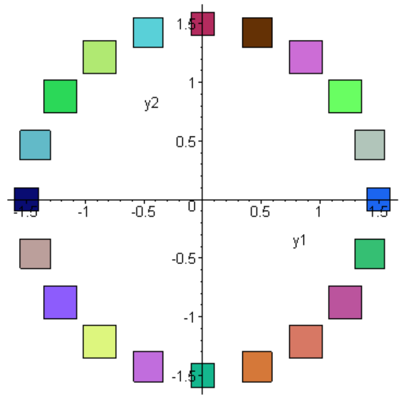

Рис. 1. Вычисленные границы множества решений задачи (3) на интервале времени $[0, 50]$.

Множество решений $Y(t, t_0, y_0) = \bigcup_{y0 \in Y_0} y\,(t, t_0, y_0)$ состоит из траекторий

$$y(t, t_0, y_0) = (y_1(t, t_0, y_0), y_2(t, t_0, y_0), ..., y_n(t, t_0, y_0))\,.$$

Среди траекторий, входящих в это множество решений, выделим базовую траекторию (всегда входящую в набор траекторий) $y\,(t, t_0, y_0) \in Y\,(t, t_0, y_0)$ для любого $t \in T$, а также граничную траекторию $y_{bound}(t, t_0, y_0)$. Граничная траектория множества решений определяется так – для любого $\varepsilon > 0$ в $\varepsilon-$ окрестности этой траектории есть точка, не принадлежащая ни одной траектории из $Y(t, t_0, y_0) = \bigcup_{y0 \in Y_0} y\,(t, t_0, y_0)$: для любого $\varepsilon > 0$ существует z_{outer} такой, что $d\,(y_{bound}, z_{outer}) < \varepsilon$, $z_{outer} \neq y\,(t, t_0, y_0)$ для любого $y_0 \in Y_0$.

Необходимо определить, при каких условиях существует граничная траектория множества решений, а также может ли существовать внутренняя точка, лежащая на граничной траектории.

До сих пор достаточно проблематично полностью исследовать свойство инъективности (взаимной однозначности) решений ОДУ. Для линейных систем ОДУ свойство взаимной однозначности является следствием формулы Коши общего решения. Кроме того, существует свойство аффинности для отображений, определяемых решениями линейных систем ОДУ.

Для исследования инъективности решений нелинейных систем ОДУ должно существовать единственное решение в некоторой области исходных данных и быть ограниченным. Тогда границы областей начальных данных траектории системы ОДУ переводят в границы областей решений.

Оценки множеств решений системы (9) служит иллюстрацией поведения внутренних и внешних точек множества решений.

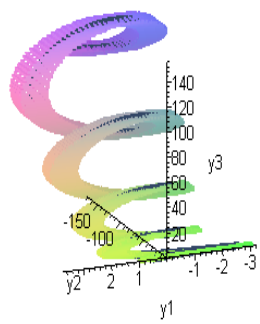

Рис. 2. Вычисленные границы множеств решений задачи (9), проекция в пространство y_1, y_2, y_3 на интервале времени $[0, 15]$

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dt} = -y_2 - y_3,\\
&\frac{dy_2}{dt} = y_1 + 0.25y_2 + y_4,\\
&\frac{dy_3}{dt} = y_1 y_3 + 3\\
&\frac{dy_4}{dt} = -0.5y_3 + 0.05y_4\\
&y_i(t_0) \in [-1, 1], \quad i = 1, ..., 4.
\end{aligned} \tag{9}$$

3 Регуляризация алгоритма оценки множеств решений

Сложности, возникающие в задачах оценки множеств решений систем ОДУ, привели к необходимости провести анализ этой ситуации и создать необходимые корректировки алгоритмов. Сильный рост границ оценок наблюдается в большинстве методов оценки множеств решений. Одной их причин является, например, то, что при оценивании множеств решений используются системы ОДУ с размерностью вдвое большей размерности исходной системы, то есть изменяется структура задачи. Структурно возмущенные системы достаточно часто могут быть неустойчивыми по Ляпунову. В итоге возрастание границ оценок множеств решений во многих известных методах может быть объяснено некорректностью алгоритмов оценивания границ множеств решений

Чтобы устранить влияние этого, в символьных методах проводится детальный анализ причин, вызывающих рост границ оценки множеств решений, и выполняется регуляризация алгоритма оценивания.

А.Н.Тихоновым было сформулировано понятие регуляризирующего алгоритма (регуляризирущего оператора, регуляризатора) для некорректно поставленной задачи как однопараметрического семейства операторов, специальным образом аппроксимирующего обратный оператор и обеспечивающего при согласовании параметра с уровнем погрешности исходных данных устойчивое восстановление искомого решения [13]. Для корректных по Адамару задач в качестве формального регуляризирующего алгоритма может быть взят сам обратный оператор. Другое дело, что такой алгоритм может оказаться неконструктивным (практически нереализуемым). Понятие регуляризирующего алгоритма оказалось весьма эффективным и работоспособным [13], [14],[15].

Пусть $H, F, G-$ гильбертовы пространства, $d-$ множество точных начальных данных, например, $d = \{A, f, L, g\}$, d_σ — множество приближенных данных основной задачи с компонентами того же типа, например, $d_\sigma = \{\widehat{A}, \widehat{f}, \widehat{L}, \widehat{g}\}$, $\sigma = (h, \delta, t, \tau)$ — вектор точности (измеряющий погрешность приближенных данных для каждой компоненты). Отображение R_σ, ставящее в соответствие приближенным данным $U_\sigma \subset D$ некоторое непустое множество d_σ, определяет приближенный метод решения основной задачи. Будем обозначать $U_\sigma = R_\sigma$. Если выполняются условия

$$\overline{lim}_{\sigma\to 0} sup_{u\in U_\sigma} \parallel Au - f \parallel_F \leq \mu_A, \quad \overline{lim}_{\sigma\to 0} sup_{u\in U_\sigma} \parallel Lu - g \parallel_G \leq \nu_L,$$

то приближенный метод R_σ называется регулярным [14].

Вектор точности данных $\sigma \to 0$, если все его компоненты стремятся к нулю.

`Теорема.` Для сходимости метода R_σ решения основной задачи необходимо и достаточно, чтобы метод был регулярным.[14].

Среди решений, входящих в множество решений, выделим базовое решение (всегда включенное в множеств решение) $y\,(t, t_0, y_0) \in Y\,(t, t_0, y_0)$ для любого $t \in T$, а также граничное решение $y_{bound}(t, t_0, y_0)$ $\forall\varepsilon > 0$ в $\varepsilon-$окрестности этого решения есть точка, не принадлежащая ни одному решению из $Y(t, t_0, y_0)$.

Необходимо определить, при каких условиях существует граничное решение множества решений, а также может ли существовать внутренняя точка, лежащая на граничном решении: $\exists\varepsilon > 0$ $\exists$ z_{outer} такое, что $d\,(y_{bound}, z_{outer}) < \varepsilon$, $z_{outer} \neq y\,(t, t_0, y_0)$ для любого $y_0 \in Y_0$?

Полезно предварительно построить регуляризацию оценок границ множеств решений, переходя к линейной аппроксимации исходной системы. Регуляризация для этой задачи означает поиск информации о множестве подходящих для оценки решений и задается значениями сжатия/расширения в заданных направлениях, смещения по оси времени и поворота на определенный угол [18].

Можно говорить о деформации множества решений в линейном приближении (в некотором смысле напоминая линейную теорию упругости). Бесконечно малые векторы, исходящие из центра исходного множества (например, шара малого радиуса ρ), под действием аффинора (аффинного тензора) переходят в векторы, исходящие из центра смещенного (и деформированного) множества. Это значит, что преобразование вектора $\overrightarrow{MM'}$ в вектор LL' происходит (с заданной степенью точности) с помощью аффинора $E + \Delta t \cdot U$, где $U-$ производный аффинор векторного поля скоростей, а $\Delta t-$ прошедший бесконечно малый период времени.

Область Ω, в которой задано векторное поле, можно моделировать с помощью некоторой подвижной деформирующей среды. Пусть вектор $f(M)$ описывает скорость, с которой движется частица среды, находящаяся в данный момент в точке M.

Каждая точка, в [18], названная условно частицей жидкости, описывает определённую траекторию во времени

$$y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), y_3 = y_3(t)$$

.

Проекции вектора скорости на оси координат в этом случае, как известно, равны

$$\frac{dy_i}{dt}, \quad i = 1, 2, 3$$

. С другой стороны, вектор скорости совпадает в каждой точке M с вектором поля $f(M)$, а его проекции равны $f_i(M) = f_i(y_1(), y_2(t), y_3(t))$. Как результат

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(y_1, y_2, y_3), \quad i = 1, 2, 3$$

Частица жидкости, находящаяся в данной точке M во времени, через бесконечно малый интервал времени $\varepsilon = \Delta t$ сместится на вектор $\Delta t \cdot f(M)$, если пренебречь бесконечно малым интервалом времени $\varepsilon = \Delta t$. малый более высокий порядок. Поскольку скорость движения жидкости зависит от ее положения, то в процессе движения скорость, вообще говоря, будет меняться. Однако за бесконечно малый промежуток времени она успевает измениться, начиная со значения $f(M)$, лишь на бесконечно малую величину. В результате $\Delta t \cdot f(M)$ дает перемещение с ошибкой бесконечно малого высшего порядка (грубо говоря, бесконечно малая ошибка по скорости Δf умножается на другую $Err = \Delta \cdot \Delta f$).

Пусть M' — некоторая точка шара бесконечно малого радиуса ρ с центром в M (некоторое решение выбирается в области решений). Подчинить все точки шара заданному смещению $\tau \cdot f(M)$ по пути решения, в частности, точки M, M' переходят в некоторые точки L, L'.

На этой основе можно полагать, что бесконечно малые векторы, выходящие из центра окрестности решений радиуса ρ, отображаются в векторы, исходящие из центра смещенной (и деформированной) окрестности, под действием аффинора $U-$ линейного закон, по которому каждому вектору в пространстве сопоставлен определенный вектор, обозначаемый $y = Uz$, (матрица производных).

Но результатом применения такого аффинора будет деформация, созданная аффинором $E + \Delta t \cdot B$, и поворот под влиянием аффинора $E + \Delta t \cdot C$. В этом случае $b_{ij}, c_{ij}-$ симметричная и кососимметричная части аффинора

$$b_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial a_i}{\partial y_j} + \frac{\partial a_j}{\partial y_i}\Big), \qquad (10)$$
$$c_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial a_i}{\partial y_j} - \frac{\partial a_j}{\partial y_i}\Big).$$

Пользуясь кинематическим объяснением Рашевского [18], получим, что объемное расширение происходит с нулевой скоростью, т.е. любая область пространства, заполненная частицами жидкости в начальный момент, смещается и деформируется со временем, не меняя своего объема (это легко обосновать для бесконечно малых капель жидкости, а переход к конечному объему требует дополнительных исследований). Деформация (изменение формы) области решения дифференциальных уравнений происходит с увеличением времени.

Таким образом, преобразование вектора $\overrightarrow{MM'}$ в вектор $\overrightarrow{LL'}$ происходит (с заданной степенью точности) с помощью аффинора $E + \Delta t \cdot U$, где $U-$ производный аффинор векторного поля скорости, а $\Delta t-$ — бесконечно малый период времени. Действие такого аффинора образует чистую деформацию, порожденную аффинором $E + \Delta t \cdot B$, и вращение с помощью аффинора $E + \Delta t \cdot C$. При этом B, $C-$симметричная и кососимметричная части аффинора U. В итоге в качестве регуляризатора при отборе подходящих приближенных решений для построения границ значения, используются формулы (7), (10).

4 Заключение

Для нелинейных систем ОДУ дифференциальных уравнений построение границ оценок множеств решений зависит от сложного характера множества решений ОДУ и невозможности учесть поведение каждого из решений, входящих в это множество. Границы множества решений будут зависеть от многих характеристик множеств решений – например, наличия седловых точек, точек возврата, точек бифуркаций, дихотомии спектра собственных значений дифференциального оператора, на которые может влиять возмущающее (управляющее) воздействие, иногда являющееся негладкой функцией. Поэтому в статье показана эффективность определения формулы решений, записанной в символьном виде. Это позволяет вычислить граничные точки множества решений, используя эту формулу. Граничные точки будут найдены как экстремумы символьных выражений, учитывающие либо направления координатных осей, либо иные заданные направления. По заданному набору граничных точек возможно описать множество, включающее множество решений.

В итоге можно реализовывать два варианта – либо описывать значения граничных поверхностей в наборе дискретных точек (на сетке), либо вычислять их оценки максимальных значений в направлениях координатных осей, например, максимум в любом выбранном направлении. Предварительно полезно строить регуляризацию оценок границ множеств решений, переходя к линейному приближению исходной системы. Под регуляризацией понимается нахождение информации о множестве точных решений. В некотором смысле можно говорить о исследовании деформации множества решений в линейном приближении.

Учитывая эту информацию о характеристиках множества решений систем ОДУ под действием возмущений, в алгоритме подбираются направления изменений решений под влиянием возмущений в соответствии со значениями характеристик.

References

[1] Martynyuk A.A. Stability of the set of trajectories of nonlinear dynamics // Reports of the Academy of Sciences. 2007. v.414, no. 3. pp.299–303.

[2] Ashchepkov L.T. External estimates and step controllability for interval linear systems // Automation and Telemechanics. 2008. no. 41 pp.51–58.

[3] Kostousova E.K. Boundedness of external polyhedral estimates of reachable sets of linear control systems // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2008. v.48, no. 6. pp.974–989.

[4] Kurzhansky A.B. Control and observation under uncertainty. Moscow: Nauka, 1977.

[5] Ushakov V.N., Ershov A.A., Ushakov A.V. Control systems depending on a parameter: reachable sets and integral funnels // Applied Mathematics and Mechanics. 2022. v.86, no. 2. pp.186-205.

[6] Filippova T.F. HJB-inequalities in estimating reachable sets of a control system under uncertainty // Ural mathematical journal. 2022. V. 8, no. 1, p. 34–42 DOI: http://dx.doi.org/10.15826/umj.2022.1.004

[7] Chernousko F.L. Estimates of the phase state of dynamic systems. Moscow: Nauka, 1988.

[8] Rogalev A.N., Rogalev A.A., Feodorova N.A. Numerical computations of the safe boundaries of complex technical systems and practical stability.// J. Phys: Conf. Ser. 2019. v.1399, 033112. doi:10.1088/1742-6596/1399/3/033112

[9] Rogalev A.N., Rogalev A.A., Feodorova N.A. Malfunction analysis and safety of mathematical models of technical systems // J. Phys.: Conf. Ser.2020. v.1515. 022064. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1515/2/022064

[10] Rogalev A.N. Set of Solutions of Ordinary Differential Equations in Stability Problems. Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy. Springer Nature Switzerland AG, 2020, p. 307-312. https://doi.org/10.1007/978-3-030-38870-6-40

[11] Rogalev A.N., Rogalev A.A., Feodorova N.A. Mathematical modeling of risk and safe regions of technical systems and surviving trajectories.J. Phys. Conf. Ser. 2021, v. 889, 022108. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1889/2/022108

[12] Rogalev A.N. Symbolic Methods for Estimating the Sets of Solutions of Ordinary Differential Equations with Perturbations on a Finite Time Interval//Journal of vibration testing and system dynamics. 2023. v.7 Is.1. p. 31-37. doi:10.5890/JVTSD.2023.03.005

[13] Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. Methods for solving ill-conditioned problems. Moscow: Science. Main editorial board of physical and mathematical literature, 1979.

[14] Morozov V.A. Regular methods for solving ill-conditioned problems. Moscow: Nauka, 1987.

[15] Ivanov V.K., Melnikova I.V., Filinkova A.I. Differential-operator equations and ill-conditioned problems. Moscow: Phys.-Math. Literature, 1995

[16] Alekseev V.M. On estimating perturbations of solutions of ordinary differential equations I. Bulletin of Moscow University. 1961, No. 2. pp. 28-36

[17] Alekseev V.M. On estimating perturbations of solutions of ordinary differential equations. II. Bulletin of Moscow University. 1961. No. 3. pp. 3-10

[18] Rashevsky P.K. Riemannian geometry and tensor analysis. Moscow: Science. Main editorial office of physical and mathematical literature. 1967.

Alexey Nikolaevich Rogalev
Institute of Computational Modelling,
Akademgorodok 50, build. 44,
660036, Krasnoyarsk, Russia
Email address: rogalyov@icm.krasn.ru