S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 521–533 (2020) УДК 512.55
DOI 10.33048/semi.2020.17.033 MSC 16Y60

ПОЛУКОЛЬЦА КОСЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ЛОРАНА

Д.А. МАСЛЯЕВ, В.В. ЧЕРМНЫХ

Abstract. The paper considers semirings of skew polynomials and semirings of skew Laurent polynomials with rigid endomorphism. It is shown that the semiring S is φ-rigid if and only if the semiring of skew Laurent polynomials $S[x^{-1}, x, \varphi]$ is a semiring without nilpotent elements. The concept of the φ-arm-semiring is introduced. It is proved that if S is a φ-arm-semiring, then S is Baer (left Rickart) exactly when $S[x^{-1}, x, \varphi]$ is a Baer (resp. left Rickart) semiring.

Keywords: skew polynomial semiring, skew Laurent polynomial semiring, rigid endomorphism, Armendariz semiring, Baer semiring, Rickart semiring.

Введение

В статье рассматриваются полукольца косых многочленов и их расширения — полукольца косых многочленов Лорана. Отметим, что кольца косых многочленов являются классическими объектами и изучаются достаточно давно. Укажем сейчас некоторые кольцевые результаты, имеющие отношение к нашей работе.

Одной из задач при изучении свойств колец или полуколец многочленов является нахождение связей между алгеброй многочленов и алгеброй коэффициентов. При рассмотрении косых многочленов их свойства зависят еще и от вида скашивающего эндоморфизма. Согласно J. Krempa [1] эндоморфизм φ кольца R называется жестким, если $a\varphi(a) = 0$ влечет $a = 0$ для $a \in R$. Так в [2, prop. 3] доказано, что кольцо косых многочленов $R[x, \varphi]$ редуцировано тогда и только тогда, когда кольцо R является φ-жестким. В [3, theorem 3] показано, что φ-жесткость кольца R равносильна редуцированности кольца косых

Maslyaev D.A., Chermnykh V.V., Semirings of skew Laurent polynomials.
© 2020 Масляев Д.А., Чермных В.В.
Поступила 8 июля 2019 г., опубликована 8 апреля 2020 г.

многочленов Лорана $R[x^{-1}, x, \varphi]$. В нашей основной теореме мы обобщаем эти результаты для полуколец косых многочленов:

Теорема 1. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S. Равносильны следующие утверждения:*

(1) *S — φ-жесткое полукольцо;*
(2) *$S[x, \varphi]$ — полукольцо без нильпотентных элементов;*
(3) *$S[x^{-1}, x, \varphi]$ — полукольцо без нильпотентных элементов.*

Жесткие эндоморфизмы активно используются при исследовании косых армендеризовских колец [2], [4], [5]. Кольцо R называется *армендеризовским* [6], [7], если для любых многочленов $f = f_0 + f_1x + \ldots + f_mx^m$ и $g = g_0 + g_1x + \ldots + g_nx^n \in R[x]$ из $fg = 0$ следует $f_ig_j = 0$ для всех $0 \leq i \leq m$ и $0 \leq j \leq n$. Это определение естественно обобщается в понятие косого армендеризовского кольца [2]. В статьях [2],[4] доказано, что φ-жесткость кольца R равносильна тому, что эндоморфизм φ инъективен и R является редуцированным φ-косым армендеризовским кольцом. При дословном переносе понятия армендеризовости на полукольца (т. е. с простой заменой «кольца» на «полукольцо») указанный результат перестает быть верным (пример 2). Мы адаптируем определение армендеризовости и вводим в рассмотрение φ-arm-полукольцо. В результате получаем следующий результат:

Теорема 2. *Пусть φ — эндоморфизм левого или правого φ-arm-полукольца S без нильпотентных элементов и $\operatorname{Ker}\varphi = 0$. Тогда S является φ-жестким полукольцом.*

Заключительные результаты статьи посвящены косым многочленам над бэровскими полукольцами. Полукольцо S называется *бэровским*, если для любого непустого множества A из S выполняется $r_S(A) = eS$ ($r_S(A)$ — правый аннулятор множества A) для некоторого дополняемого идемпотента e из S; полукольцо S называется *левым (соотв., правым) риккартовым*, если для любого элемента a из S выполняется $l_S(a) = Se$ (соотв., $r_S(a) = eS$) для некоторого дополняемого идемпотента e из S.

Выясняется строение дополняемых идемпотентов в полукольце косых многочленов Лорана. Получены результаты:

Теорема 3. *Пусть S — φ-arm-полукольцо и φ — инъективный эндоморфизм. Полукольцо S является бэровским тогда и только тогда, когда $S[x^{-1}, x, \varphi]$ — бэровское полукольцо.*

Теорема 4. *Пусть S — φ-arm-полукольцо и φ — инъективный эндоморфизм. Полукольцо S является риккартовым справа (соотв., слева) тогда и только тогда, когда $S[x^{-1}, x, \varphi]$ — риккартово справа (соотв., слева) полукольцо.*

1. Полукольцо косых многочленов Лорана

Под *полукольцом* мы понимаем алгебру $(S, +, \cdot, 0)$, которая является коммутативной полугруппой с нулем относительно сложения, полугруппой относительно умножения, умножение дистрибутивно справа и слева относительно сложения, ноль мультипликативен (т. е. справедливо условие $a0 = 0 = 0a$). Все рассматриваемые в статье полукольца содержат единицу.

Пусть $\varphi : S \to S$ — эндоморфизм полукольца S, сохраняющий единицу. Рассмотрим множество $S[x, \varphi]$ всех многочленов $\sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ с коэффициентами

$a_i \in S$, записываемыми слева от переменной x. Сложение многочленов определяется обычным способом, а умножение задается правилом $xa = \varphi(a)x$. Тогда получаем полукольцо $S[x, \varphi]$, которое называется *левым полукольцом косых многочленов*. Ясно, что в случае тождественного автоморфизма мы имеем обычное полукольцо многочленов $S[x]$. Условие сохранения эндоморфизмом единицы обеспечивает наличие единицы в полукольце косых многочленов.

Для построения полукольца косых многочленов Лорана напомним конструкцию полукольца частных.

Ненулевой элемент $s \in S$ называется *левым уравнителем*, если $sa = sb$ для некоторых $a \neq b \in S$. Симметрично определяется правый уравнитель. Подмножество A полукольца S, не содержащее как левых, так и правых уравнителей в S, будем называть множеством без уравнителей. Уравнители в полукольцах играют роль, близкую к роли делителей нуля в кольцах. Каждый делитель нуля является уравнителем, но не каждый уравнитель в полукольце — делитель нуля.

Левым множеством Оре полукольца S называется такое множество $A \subseteq S$, что выполняются условия:

(1) мультипликативно замкнутое, $0 \notin A, 1 \in A$;
(2) A — множество без уравнителей;
(3) для любых $s \in S, a \in A$ выполняется $a's = s'a$ для подходящих $s' \in S, a' \in A$ (*условие Оре*).

Тогда левое полукольцо частных относительно A — это полукольцо $A^{-1}S$, содержащее S, и каждый элемент A обратим в $A^{-1}S$ (детали можно найти, например, в [8, §2]).

Рассмотрим инъективный эндоморфизм φ полукольца S, и $R = S[x, \varphi]$ — полукольцо косых многочленов. Множество $X = \{x^i : i \geq 0\}$ образует левое множество Оре полукольца R; в частности, для любых $k \geq 0$ и $s \in S$ выполняется $x^k s = \varphi^k(s)x^k$ — условие Оре. Элементами полукольца частных $X^{-1}R$ являются выражения вида $x^{-k}f$, где $f \in R$, или же

$$\sum_{i=0}^{n}(x^{-k}a_i x^i) \text{ для } k \geq 0, a_i \in S.$$

Обозначим $S[x^{-1}, x, \varphi] = X^{-1}R$ и назовем его *левым полукольцом косых многочленов Лорана.*

Требование инъективности эндоморфизма необходимо по следующей причине. Предположим, что $\varphi(a) = \varphi(b)$ для некоторых различных $a, b \in S$. Тогда $xa = \varphi(a)x = \varphi(b)x = xb$, и x оказывается левым уравнителем.

Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S. Рассмотрим сейчас множество $\mathbb{S}_\varphi = \{x^{-i}ax^i : a \in S, i \geq 0\}$, являющееся подполукольцом полукольца $S[x^{-1}, x, \varphi]$. Отображение

$$\bar{\varphi} : \mathbb{S}_\varphi \to \mathbb{S}_\varphi,\ \bar{\varphi}(x^{-i}ax^i) = x^{-i}\varphi(a)x^i$$

является автоморфизмом полукольца $\mathbb{S}_\varphi$, для которого выполняется условие $x\alpha = \bar{\varphi}(\alpha)x$ для любого элемента $\alpha \in \mathbb{S}_\varphi$. Ограничение автоморфизма $\overline{\varphi}$ на S совпадает с φ, и $S[x^{-1}, x, \varphi] \cong \mathbb{S}_\varphi[x^{-1}, x, \overline{\varphi}]$. Полукольцо $\mathbb{S}_\varphi$ называется расширением Жордана и является полукольцевым аналогом кольцевой конструкции [9]. Значение расширения Жордана заключается в том, что изучение свойств полукольца косых многочленов Лорана с инъективным эндоморфизмом можно свести к случаю автоморфизма. Отметим также, что если φ — автоморфизм полукольца S, то $x^k a = \varphi^k(a)x^k$ для любого целого k, поэтому произвольный многочлен из $S[x^{-1}, x, \varphi]$ может быть записан в виде $a_k x^k + \ldots + a_n x^n$ для целых $k < \ldots < n$.

Определение 1. *Эндоморфизм φ полукольца S назовем жестким, если из $a\varphi(a) = 0$ следует $a = 0$ для любого $a \in S$. Полукольцо S назовем φ-жестким, если существует жесткий эндоморфизм φ полукольца S.*

Для колец такие понятия были введены J. Krempa [1].

Полукольцо S называется *полукольцом без нильпотентных элементов*, если для любых $a \in S$ и $n \in \mathbb{N}$ справедлива импликация $a^n = 0 \Rightarrow a = 0$. Известно, что S является полукольцом без нильпотентных элементов тогда и только тогда, когда $a^2 \neq 0$ для любого ненулевого $a \in S$. Непосредственно проверяется, что тождественный автоморфизм полукольца S является жестким в точности тогда, когда S — полукольцо без нильпотентных элементов. Отметим также, что в полукольце без делителей нуля любой эндоморфизм с нулевым ядром является жестким.

Пример 1. Пусть A — полукольцо без нильпотентных элементов, $S = A \times A$. Автоморфизм $\varphi : S \to S$, $(a, b) \to (b, a)$, не является жестким, поскольку $\alpha\varphi(\alpha) = (0, 0)$ для $\alpha = (0, 1)$. Этот пример показывает, что отсутствие нильпотентных элементов в полукольце S недостаточно для отсутствия их в полукольцах $S[x^{-1}, x, \varphi]$ и $S[x, \varphi]$, даже в случае автоморфизма φ, поскольку αx является ненулевым нильпотентным элементом.

Пример 2. Пусть B_n — булева n-атомная решетка. Любая перестановка атомов из B_n продолжается до автоморфизма φ полукольца B_n. Если автоморфизм φ не является тождественным, то B_n не будет φ-жестким полукольцом. В этом случае элемент ax является нильпотентным в $B_n[x, \varphi]$ для любого такого атома a, что $\varphi(a) \neq a$. Если же φ является тождественным эндоморфизмом, то как B_n, так и $B_n[x^{-1}, x, \varphi]$, не содержат ненулевых нильпотентных элементов. Подобные рассуждения годятся и для произвольной атомной булевой решетки.

Лемма 1. *Пусть S — φ-жесткое полукольцо. Тогда справедливы утверждения:*

(1) *S — полукольцо без нильпотентных элементов;*
(2) *ядро эндоморфизма φ нулевое;*
(3) *$\mathbb{S}_\varphi$ является $\bar{\varphi}$-жестким полукольцом;*
(4) *если $a, b \in S$ и $ab = 0$, то $aSb = 0$ и $ba = 0$;*
(5) *если $a, b, c \in S$ и $abc = 0$, то $acb = 0$;*
(6) *S — φ^n-жесткое полукольцо для любого натурального n;*
(7) *если $ab = 0$, то $a\varphi^n(b) = 0$ для любого натурального n.*

Доказательство. (1) Пусть $a^2 = 0$ для некоторого $a \in S$. Тогда
$$a\varphi(a)\varphi(a\varphi(a)) = a(\varphi(a))^2\varphi^2(a) = a\varphi(a^2)\varphi^2(a) = 0.$$
Воспользовавшись жесткостью эндоморфизма φ, получаем сначала $a\varphi(a) = 0$, а затем $a = 0$.

(2) Если $a \in \operatorname{Ker}\varphi$, то $a\varphi(a) = 0$, откуда $a = 0$.

(3) Пусть $x^{-i}ax^i\bar{\varphi}(x^{-i}ax^i) = 0$, тогда $x^{-i}a\varphi(a)x^i = 0$. Получаем $a\varphi(a) = 0$, откуда $a = 0$, следовательно, $x^{-i}ax^i = 0$.

(4) и (5). Эти утверждения справедливы в любом полукольце без нильпотентных элементов (см., например, [10, лемма 1]).

(6) Проведем индукцию по n. Пусть S является φ^{n-1}-жестким, и $a\varphi^n(a) = 0$ для $n > 1$. Тогда

$$a\varphi^{n-1}(a)\varphi(a\varphi^{n-1}(a)) = a(\varphi^{n-1}(a)\varphi(a))\varphi^n(a) = 0$$

по утверждению (4). Отсюда в силу φ-жесткости имеем $a\varphi^{n-1}(a) = 0$, а по индуктивному предположению получаем $a = 0$.

(7) Из $ab = 0$ следует $\varphi(b)\varphi(a) = 0$ по свойству (4). Поэтому $a\varphi(b)\varphi(a\varphi(b)) = 0$. В силу жесткости φ имеем $a\varphi(b) = 0$. По индукции получаем требуемое свойство. □

Пример 3. Свойство (2) доказанной леммы показывает, что жесткий эндоморфизм кольца является инъективным. В полукольцах это не обязательно. Например, возьмем более чем двухэлементную ограниченную цепь и отобразим ноль (наименьший элемент) в ноль, а остальные элементы — в единицу. Тогда получаем жесткий эндоморфизм с нулевым ядром, но не инъективный.

Лемма 2. *Пусть A — левое множество Оре полукольца S. Тогда S является полукольцом без нильпотентных элементов тогда и только тогда, когда $A^{-1}S$ — полукольцо без нильпотентных элементов.*

Доказательство. Пусть S — полукольцо без нильпотентных элементов, и $a^{-1}s$ — нильпотентный элемент полукольца $A^{-1}S$ для некоторых $a \in A$ и $s \in S$; будем считать, что $(a^{-1}s)^2 = 0$. Поскольку $bs = ta$ для некоторых $b \in A$ и $t \in S$, то $0 = a^{-1}sa^{-1}s = a^{-1}b^{-1}ts$, откуда получаем $ts = 0$. По свойству (4) леммы 1 $tas = 0$, поэтому $bss = 0$. Элемент $b \in A$ является неделителем нуля, поэтому $s^2 = 0$, что влечет $s = 0$. Получили $a^{-1}s = 0$, и $A^{-1}S$ — полукольцо без нильпотентных элементов.

Обратная импликация очевидна. □

Теорема 1. *Пусть φ — инъективный эндоморфизм полукольца S. Равносильны следующие утверждения:*

(1) *S — φ-жесткое полукольцо;*
(2) *$S[x, \varphi]$ — полукольцо без нильпотентных элементов;*
(3) *$S[x^{-1}, x, \varphi]$ — полукольцо без нильпотентных элементов.*

Доказательство. Условия (2) и (3) равносильны по лемме 2.

Докажем импликацию (1) ⇒ (3). Воспользуемся тем, что расширение Жордана позволяет считать φ является автоморфизмом, а по лемме 1 полукольцо S — φ-жестким. Пусть $f^2 = 0$ для многочлена $f = a_kx^k + a_{k+1}x^{k+1} + \ldots + a_nx^n$. Получаем $0 = a_n\varphi^n(a_n)$. Если $n = 0$, то $a_n^2 = 0$, откуда $a_n = 0$, поскольку φ-жесткое полукольцо является полукольцом без нильпотентных элементов. Если $n > 0$, то по лемме 1 S является φ^n-жестким, поэтому $a_n = 0$. Если $n < 0$, то $\varphi^{-n}(a_n)a_n = 0$, откуда $a_n\varphi^{-n}(a_n) = 0$ по лемме 1. Воспользовавшись φ^{-n}-жесткостью полукольца S, получаем $a_n = 0$. Таким образом, $f = 0$.

(3) ⇒ (1). Пусть $a\varphi(a) = 0$ для $a \in S$. Тогда $(ax)^2 = a\varphi(a)x^2 = 0$, откуда $ax = 0$ и $a = 0$. □

2. Армендеризовские полукольца

Определим сейчас класс полуколец, дословно перенеся кольцевое определение.

Определение 2. *Полукольцо S назовем армендеризовским полукольцом, если для произвольных многочленов $f = f_0+f_1x+\ldots+f_nx^n$ и $g = g_0+g_1+\ldots+g_mx^m$ из $S[x]$, таких, что $fg = 0$, выполняется $f_ig_j = 0$ для всех $i, j \geq 0$.*

Кольцо с указанным свойством в статье M. B. Rege и S. Chhawchharia [7] было названо «Armendariz ring», поскольку A. P. Armendariz первым указал [6], что этому условию удовлетворяет редуцированное кольцо (т. е. кольцо без ненулевых нильпотентных элементов).

При рассмотрении полукольца косых многочленов $S[x, \varphi]$ мы получаем следующее естественный обобщение понятия армендеризовского полукольца.

Определение 3. *Пусть φ — эндоморфизм полукольца S. Полукольцо S назовем φ-армендеризовским полукольцом, если для произвольных многочленов $f = f_0 + f_1x + \ldots + f_nx^n$ и $g = g_0 + g_1x + \ldots + g_mx^m$ из $S[x, \varphi]$, таких, что $fg = 0$, выполняется $f_i\varphi^i(g_j) = 0$ для всех i, j.*

Пусть id_S — тождественный автоморфизм полукольца S. Понятно, что полукольцо S будет армендеризовским, в точности если S — id_S-армендеризовское.

Напомним, что полукольцо S называется *антикольцом*, если ноль — единственный аддитивно обратимый элемент в S. Несложно показать, что полукольцо косых многочленов над антикольцом является антикольцом. Кроме того, если S — антикольцо, то S является φ-армендеризовским полукольцом. Действительно, если $fg = 0$, то $f_i\varphi^i(g_j)$, для любых $i, j \geq 0$, является слагаемым нулевого коэффициента $(fg)_{i+j=k} = f_0g_k + \ldots + f_i\varphi^j(g_j) + \ldots + f_k\varphi^k(g_0)$, поэтому $f_i\varphi^i(g_j) = 0$.

Приступим к установлению связи между жесткостью и армендеризовостью полукольца.

Лемма 3. *Пусть φ — жесткий эндоморфизм полукольца S и $a, b \in S$. Тогда условия* (1) *и* (2) *равносильны. Если, к тому же, φ — автоморфизм, то все три условия равносильны:*

(1) $ab = 0$;
(2) $\varphi^i(a)\varphi^j(b) = 0$ *для любых* $i, j \geq 0$;
(3) $\varphi^i(a)\varphi^j(b) = 0$ *для любых* $i, j \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. (1) ⇒ (2). По лемме 1 условие (1) влечет $a\varphi^j(b) = 0$. В силу коммутативности в нуле (т. е. свойства (4) леммы 1) получаем $\varphi^j(b)a = 0$, откуда по той же лемме $\varphi^j(b)\varphi^i(a) = 0$, и $\varphi^i(a)\varphi^j(b) = 0$.

Импликация (2) ⇒ (1) очевидна.

(2) ⇒ (3). Пусть φ — автоморфизм и $i \leq j \in \mathbb{Z}$. Тогда $a\varphi^{j-i}(b) = 0$ по условию. Для целого i получаем $0 = \varphi^i(a\varphi^{j-i}(b)) = \varphi^i(a)\varphi^j(b)$. Также справедлив вариант $i \geq j$ в силу коммутативности в нуле φ-жесткого полукольца.

В случае автоморфизма φ импликация (3) ⇒ (1) очевидна. □

Предложение 1. *Пусть φ — жесткий автоморфизм полукольца S. Тогда для любых*

$$f = f_k x^k + \ldots + f_{-1}x^{-1} + f_0 + \ldots + f_l x^l,$$
$$g = g_m x^m + \ldots + g_{-1}x^{-1} + g_0 + \ldots + g_n x^n \in S[x^{-1}, x, \varphi]$$

из $fg = 0$ следует $f_i\varphi^i(g_j) = 0$ для всех целых i, j.

Доказательство. Из $fg = 0$ следует

$$f_k\varphi^k(g_m) = 0,$$
$$f_k\varphi^k(g_{m+1}) + f_{k+1}\varphi^{k+1}(g_m) = 0.$$

Заметим, что из первого равенства имеем $f_k\varphi^k(g_{m+1})\cdot f_{k+1}\varphi^{k+1}(g_m) = 0$ по леммам 1 и 3. Тогда из второго равенства получаем $(f_k\varphi^k(g_{m+1}))^2 = 0$. Так как S — полукольцо без нильпотентных элементов, то $f_k\varphi^k(g_{m+1}) = 0$ и $f_{k+1}\varphi^{k+1}(g_m) = 0$. Предположим, что $f_i\varphi^i(g_j) = 0$ для всех таких $i \geq k, j \geq m$, что $k + m \leq i + j < k + m + r$ и проведем индукцию по r. Из $fg = 0$ имеем

$$f_k\varphi^k(g_{m+r}) + f_{k+1}\varphi^{k+1}(g_{m+r-1}) + \ldots + f_{k+r}\varphi^{k+r}(g_m) = 0. \tag{1}$$

По индуктивному предположению $f_k\varphi^k(g_{m+i}) = 0$ для всех $i = 0, \ldots, r-1$. Поэтому по леммам 1 и 3 $f_k\varphi^k(g_{m+r})$ обнуляет каждое, начиная со второго, слагаемое в равенстве (1). Получаем $(f_k\varphi^k(g_{m+r}))^2 = 0$, откуда $f_k\varphi^k(g_{m+r}) = 0$. Равенство (1) принимает вид:

$$f_{k+1}\varphi^{k+1}(g_{m+r-1}) + f_{k+2}\varphi^{k+2}(g_{m+r-2}) + \ldots + f_{k+r}\varphi^{k+r}(g_m) = 0. \tag{2}$$

Вновь замечаем, что $f_{k+1}\varphi^{k+1}(g_{m+r-1})$ обнуляет остальные слагаемые в равенстве (2), поэтому $f_{k+1}\varphi^{k+1}(g_{m+r-1}) = 0$. Продолжая такие рассуждения, получаем, что каждое слагаемое в (1) равно нулю. □

Для доказательства следующего утверждения нам потребуется расширение Жордана.

Предложение 2. *Пусть φ — жесткий инъективный эндоморфизм полукольца S и*

$$f = x^{-k}\sum_{i=0}^{l} f_i x^i, \; g = x^{-m}\sum_{j=0}^{n} g_j x^j \in S[x^{-1}, x, \varphi].$$

Тогда из $fg = 0$ следует $f_i g_j = 0$ для всех $i, j \geq 0$.

Доказательство. Пусть $h : S[x^{-1}, x, \varphi] \to \mathbb{S}_\varphi[x^{-1}, x, \overline{\varphi}]$ — изоморфизм, и

$$h(f) = \sum_{i=0}^{l} \alpha_i x^{i-k}, \; \alpha_i = x^{-k} f_i x^k,$$
$$h(g) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j x^{j-m}, \; \beta_j = x^{-m} g_j x^m.$$

Ясно, что $h(f)h(g) = 0$. По предложению 1 $\alpha_i\bar{\varphi}^{\,i-k}(\beta_j) = 0$. Рассмотрим первый случай, при котором $i - k \geq 0$. Тогда

$$0 = x^{-k} f_i x^k \cdot x^{-m}\varphi^{i-k}(g_j)x^m = x^{-k-m}\varphi^m(f_i)\varphi^i(g_j)x^{k+m},$$

откуда $\varphi^m(f_i)\varphi^i(g_j) = 0$. По лемме 3 получаем $f_i g_j = 0$. Второй случай, $i-k < 0$. Тогда

$$0 = \bar{\varphi}^{k-i}(\alpha_i \bar{\varphi}^{i-k}(\beta_j)) = \bar{\varphi}^{k-i}(\alpha_i)\beta_j = x^{-k-m}\varphi^{k-i+m}(f_i)\varphi^k(g_j)x^{k+m},$$

откуда также получаем $f_i g_j = 0$. □

Следствие 1. *Если S — φ-жесткое полукольцо, то S является φ-армендеризовским полукольцом.*

Следствие 2. *Полукольцо без нильпотентных элементов является армендеризовским полукольцом.*

Доказательство. Следует из того, что полукольцо S является id_S-жестким в точности тогда, когда S — полукольцо без нильпотентных элементов. □

Определение 4. *Пусть φ — эндоморфизм полукольца S, и*

$$f = f_0 + f_1 x + \ldots + f_k x^k,$$
$$g = g_0 + g_1 x + \ldots + g_m x^m,$$
$$h = h_0 + h_1 x + \ldots + h_k x^n \in S[x, \varphi].$$

Полукольцо S назовем правым (левым) φ-arm-полукольцом, если из $fh = gh$ (соотв., $hf = hg$) следует $f_i\varphi^i(h_j) = g_i\varphi^i(h_j)$ (соотв., $h_i\varphi^i(f_j) = h_i\varphi^i(g_j)$).

Как левое, так и правое, φ-*arm*-полукольцо является φ-армендеризовским полукольцом, а в случае, когда S — кольцо, введенные понятия совпадают с φ-армендеризовостью кольца.

Теорема 2. *Пусть φ — эндоморфизм левого или правого φ-arm-полукольца S без нильпотентных элементов и* $\operatorname{Ker}\varphi = 0$. *Тогда S является φ-жестким полукольцом.*

Доказательство. Пусть $a\varphi(a) = 0$ для $a \in S$, и S — правое φ-*arm*-полукольцо. Рассмотрим многочлены $f = \varphi(a)$, $g = \varphi(a)x$ и $h = a + \varphi(a)x$. Тогда $fh = \varphi(a)a + \varphi(a^2)x = \varphi(a^2)x$ по лемме 1. Так же получаем $gh = \varphi(a)\varphi(a)x + \varphi(a)\varphi^2(a)x^2 = \varphi(a^2)x$. Поскольку S — правое φ-*arm*-полукольцо, то $f_0h_1 = g_0h_1$. Получаем $\varphi(a)\varphi(a) = 0 \cdot \varphi(a)$, следовательно, $\varphi(a^2) = 0$, откуда $a = 0$, и φ — жесткий эндоморфизм.

Пусть сейчас $a\varphi(a) = 0$, и S — левое φ-*arm*-полукольцо. Рассмотрим многочлены $f = a$, $g = \varphi(a)x$ и $h = \varphi(a) + \varphi(a)x$. Проверяем, что $hf = hg = \varphi(a^2)x$. Поскольку S — левое φ-*arm*-полукольцо, то $h_1\varphi(f_0) = h_1\varphi(g_0)$. Получаем $\varphi(a)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(0)$, откуда $a = 0$, и вновь φ — жесткий эндоморфизм. □

Следствие 3. *Пусть φ — эндоморфизм кольца R. Равносильны следующие утверждения:*

(1) *R — редуцированное φ-армендеризовское кольцо, и эндоморфизм φ инъективен;*
(2) *R — φ-жесткое кольцо.*

Импликация (1) ⇒ (2) следствия 3 была доказана в [4],[5]. Полукольцевой аналог этого утверждения не верен. Так, в примере 2 рассмотрено антикольцо B_n, являющееся, следовательно, φ-армендеризовским; кроме того, это полукольцо без нильпотентных элементов, φ является автоморфизмом, и в случае, когда φ не тождественный, B_n не будет φ-жестким полукольцом.

Открытые вопросы

(1) Обязано ли левое (правое) φ-arm-полукольцо быть правым (левым) φ-arm-полукольцом?
(2) Будет ли произвольное φ-жесткое полукольцо левым или правым φ-arm-полукольцом?
(3) Будет ли полукольцо без уравнителей, в частности полуполе, левым (правым) φ-arm-полукольцом?

3. Полукольца косых многочленов Лорана над риккартовыми полукольцами

Идемпотент $e = e^2 \in S$ называется *дополняемым*, если существует такой элемент $e^\perp \in S$, что $e + e^\perp = 1$ и $ee^\perp = e^\perp e = 0$. Элемент $e^\perp$ в этом случае определяется однозначно и также является дополняемым идемпотентом.

Предложение 3. *Пусть S — φ-армендеризовское полукольцо, φ — инъективен и e — дополняемый идемпотент полукольца $S[x^{-1}, x, \varphi]$. Тогда $e = x^{-i} f x^i$ для некоторых дополняемого идемпотента $f \in S$ и целого $i \geq 0$, и $e^\perp = x^{-i} f^\perp x^i$.*

Доказательство. Пусть $e = x^{-i}(e_0 + e_1 x + \ldots + e_n x^n)$ — дополняемый идемпотент в $S[x^{-1}, x, \varphi]$ для некоторых $e_r \in S$ и целого $i \geq 0$, а $e^\perp = x^{-j}(g_0 + g_1 x + \ldots + g_n x^n)$; в общем, мы допускаем, что младшие или старшие коэффициенты многочленов равны нулю. Если $i \geq j$, то $e^\perp = x^{-i}(\varphi^{i-j}(g_0) + \varphi^{i-j}(g_1)x + \ldots + \varphi^{i-j}(g_n)x^n)$; если $i < j$, то аналогичным образом подправим e. Поэтому будем считать, что $e^\perp = x^{-i}(f_0 + f_1 x + \ldots + f_n x^n)$. Из $e + e^\perp = 1$ получаем $e_i + f_i = 1$, а для всех $j \neq i$ выполняется $e_j + f_j = 0$. Поскольку $x^{2i} e e^\perp = 0$, то

$$(\varphi^i(e_0) + \varphi^i(e_1)x + \ldots + \varphi^i(e_i)x^i + \ldots + \varphi^i(e_n)x^n)\cdot \cdot (f_0 + f_1 x + \ldots + f_i x^i + \ldots + f_n x^n) = 0. \quad (*)$$

Полукольцо S является φ-косым армендеризовским, поэтому $\varphi^i(e_i)\varphi^i(f_i) = 0$, откуда $e_i f_i = 0$. Такими же рассуждения из равенства $x^{2i} e^\perp e = 0$ получаем

$$(\varphi^i(f_0) + \varphi^i(f_1)x + \ldots + \varphi^i(f_i)x^i + \ldots + \varphi^i(f_n)x^n)\cdot \cdot (e_0 + e_1 x + \ldots + e_i x^i + \ldots + e_n x^n) = 0, \quad (**)$$

откуда следует $f_i e_i = 0$. Таким образом, e_i — дополняемый идемпотент полукольца S и $e_i^\perp = f_i$. Для любого $j \neq i$ из $(*)$ получаем $\varphi^i(e_j)\varphi^j(f_i) = 0$, а из $(**)$ — $\varphi^i(f_j)\varphi^j(e_i) = 0$. Тогда

$$\varphi^i(e_j)\varphi^j(e_i) = \varphi^i(f_j)\varphi^j(e_i) + \varphi^i(e_j)\varphi^j(e_i) = = \varphi^i(f_j + e_j)\varphi^j(e_i) = \varphi^i(0)\varphi^j(e_i) = 0.$$

Далее:

$$0 = \varphi^i(e_j)\varphi^j(f_i) + \varphi^i(e_j)\varphi^j(e_i) = \varphi^i(e_j)\varphi^j(f_i + e_i) = \varphi^i(e_j),$$

откуда получаем $e_j = 0$. Ясно, что и $f_j = 0$. Такими образом, $e = x^{-i} e_i x^i$, где e_i — дополняемый идемпотент в S, и дополнение $e^\perp$ к e в полукольце $S[x^{-1}, x, \varphi]$ имеет вид $e^\perp = x^{-i} e_i^\perp x^i$. $\square$

Предложение 4. *Если S — φ-arm-полукольцо и φ — инъективный эндоморфизм, то справедливы утверждения:*

1. *$\varphi(e) = e$ для любого дополняемого идемпотента полукольца S;*
2. *любой дополняемый идемпотент полукольца S централен в S;*
3. *любой дополняемый идемпотент полукольца $S[x^{-1}, x, \varphi]$ централен в $S[x^{-1}, x, \varphi]$ и лежит в S.*

Доказательство. (1) Пусть $e = e^2$ — дополняемый идемпотент полукольца S. Рассмотрим многочлены $h = e^\perp + e^\perp\varphi(e)x$, $f = e$ и $g = e^\perp\varphi(e)x$. Для них выполняется условие $hf = e^\perp\varphi(e)x = hg$. Поскольку S — левое φ-arm-полукольцо, то $h_1\varphi(f_0) = h_1\varphi(g_0)$. Получаем $e^\perp\varphi(e)\varphi(e) = e^\perp\varphi(e)\varphi(0)$, откуда $e^\perp\varphi(e) = 0$. Если поменять в многочленах f, g и h элементы e и $e^\perp$ местами получим еще одно соотношение $e\varphi(e^\perp) = 0$. Тогда:

$$\varphi(e) = (e + e^\perp)\varphi(e) = e\varphi(e) = e\varphi(e) + e\varphi(e^\perp) =$$
$$= e(\varphi(e) + \varphi(e^\perp)) = e\varphi(1) = e.$$

(2) Пусть r — произвольный элемент из S. Рассмотрим многочлены $h = e + ere^\perp x$, $f = e^\perp$ и $g = ere^\perp x$. Для них выполняется условие $hf = ere^\perp x = hg$. Поскольку S — левое φ-arm-полукольцо, то $h_0 f_1 = h_0 g_1$. Получаем $e{\cdot}0 = e{\cdot}ere^\perp$, откуда $ere^\perp = 0$. Если поменять в многочленах f, g и h элементы e и $e^\perp$ местами получим еще одно соотношение $e^\perp re = 0$. Из первого равенства получаем $ere = ere + ere^\perp = er(e + e^\perp) = er$, а из второго $ere = re$, следовательно, $er = re$.

(3) По предложению 3 дополняемый идемпотент e полукольца $S[x^{-1}, x, \varphi]$ имеет вид $x^{-i}fx^i$ для некоторого дополняемого идемпотента f полукольца S. По свойству (1) $e = x^{-i}fx^i = x^{-i}\varphi^i(f)x^i = x^{-i}x^i f = f \in S$. По свойству (1) $xe = \varphi(e)x = ex$, а по свойству (2) $er = re$. Получили, что e перестановочен с x и произвольным элементом из S, поэтому централен в $S[x^{-1}, x, \varphi]$. □

Левый аннулятор подмножества A полукольца S определяется обычным образом: $l_S(A) = \{s \in S : sa = 0 \text{ для любого } a \in A\}$. Правый аннулятор обозначается $r_S(A)$.

Лемма 4. *Для любого подмножества A полукольца S выполняется*

$$l_S(r_S(l_S(A))) = l_S(A) \text{ и } r_S(l_S(r_S(A))) = r_S(A).$$

Доказательство. Пусть элемент a лежит в левой части первого равенства, и пусть $b \in A$. Для любого $s \in l_S(A)$ выполняется $sb = 0$, откуда $b \in r_S(l_S(A))$. Отсюда $ab = 0$, следовательно, $a \in l_S(A)$, и доказали включение $\subseteq$. Обратно, пусть $a \in l_S(A)$. Если $z \in r_S(l_S(A))$, то $tz = 0$ для любого $t \in l_S(A)$; в частности, $az = 0$. Последнее означает, что a принадлежит левой части первого равенства, и доказано включение $\supseteq$. Второе равенство доказывается аналогично. □

Определение 5. *Полукольцо S называется бэровским, если для любого непустого множества A из S выполняется $r_S(A) = eS$ для некоторого дополняемого идемпотента e из S; полукольцо S называется левым (соотв., правым) риккартовым, если для любого элемента a из S выполняется $l_S(a) = Se$ (соотв., $r_S(a) = eS$) для некоторого дополняемого идемпотента e из S.*

Покажем, что определение бэровского полукольца является право-лево симметричным. Пусть S — правое бэровское полукольцо, и B — произвольное подмножество в S. Тогда $r_S(l_S(B)) = eS$ для подходящего дополняемого идемпотента $e \in S$. Докажем, что $l_S(B) = Se^\perp$. Действительно, пусть $s \in l_S(B)$, тогда $se = 0$, откуда $s = s(e + e^\perp) = se^\perp \in Se^\perp$. Обратно, пусть $u = te^\perp \in Se^\perp$. Поскольку $ue = te^\perp e = 0$, то $u \in l_s(r_S(l_S(B)))$, и по лемме 4 $u \in l_S(B)$.

Ясно, что бэровское полукольцо является как левым, так и правым риккартовым.

Лемма 5. *Пусть S — левое или правое риккартово полукольцо. Если каждый дополняемый идемпотент полукольца S является центральным, то S — полукольцо без нильпотентных элементов.*

Доказательство. Пусть S — правое риккартово полукольцо, и $a^2 = 0$ для некоторого $a \in S$. Тогда $a \in r_S(a) = eS$ для некоторого центрального дополняемого идемпотента e. Следовательно, $a = et$ для некоторого $t \in S$ и $ea = a = ae$. Отсюда получаем, что $e^\perp \in r_S(a)$, поэтому $1 = e + e^\perp \in r_S(a)$, что влечет $a \cdot 1 = 0$. □

Теорема 3. *Пусть S — φ-arm-полукольцо и φ — инъективный эндоморфизм. Полукольцо S является бэровским тогда и только тогда, когда $S[x^{-1}, x, \varphi]$ — бэровское полукольцо.*

Доказательство. Пусть S — бэровское полукольцо. По предложению 4 каждый дополняемый идемпотент из S централен, а по лемме 5 S является полукольцом без нильпотентных элементов. Следовательно, в силу теоремы 2 S является φ-жестким. Покажем, что также как и S, его расширение Жордана $\mathbb{S}$ является бэровским полукольцом. Пусть $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{S}$, и рассмотрим $B = \{b \in S : x^{-i}bx^i \in \mathbb{B}$ для некоторого $i \geq 0\}$. Тогда $r_S(B) = eS$ для подходящего центрального дополняемого идемпотента e. Для любого $x^{-i}bx^i \in \mathbb{B}$ имеем $x^{-i}bx^ie = x^{-i}bex^i = 0$, поэтому $e\mathbb{S} \subseteq r_{\mathbb{S}}(\mathbb{B})$. Обратно, пусть $x^{-j}vx^j \in r_{\mathbb{S}}(\mathbb{B})$, и $x^{-i}bx^i$ — произвольный элемент из $\mathbb{B}$. Тогда $0 = (x^{-i}bx^i)(x^{-j}vx^j) = x^{-i-j}\varphi^j(b)\varphi^i(v)x^{i+j}$, откуда получаем $\varphi^j(b)\varphi^i(v) = 0$. По лемме 3 $bv = 0$. Значит, $v \in r_S(B)$, поэтому $v = es$ для некоторого $s \in S$. Получаем $x^{-j}vx^j = ex^{-j}sx^j \in e\mathbb{S}$, и полукольцо $\mathbb{S}$ является бэровским. Таким образом, используя расширение Жордана, мы можем считать, что S является φ-жестким (по лемме 1) полукольцом с автоморфизмом φ.

Пусть $A \subseteq R \equiv S[x^{-1}, x, \varphi]$. Договоримся для многочленов из A использовать запись $f = f_kx^k + \ldots + f_lx^l$ для целых $k < \ldots < l$. Через A_0 обозначим непустое множество всех коэффициентов у многочленов из A, записанных в указанном виде. В силу бэровости полукольца S имеем $r_S(A_0) = eS$ для некоторого центрального дополняемого идемпотента полукольца S. Более того, по предложению 4 e является центральным в R. Отсюда $eR \subseteq r_R(A)$. Пусть $g = g_mx^m + \ldots + g_nx^n \in r_R(A)$. Тогда $Ag = 0$, в частности, $fg = 0$ для $f = f_kx^k + \ldots + f_lx^l$. Получаем $f_k\varphi^k(g_m) = 0$ и $f_k\varphi^k(g_{m+1}) + f_{k+1}\varphi^{k+1}(g_m) = 0$. Из первого равенства следует $f_kg_m = 0$ по лемме 3. Из второго с помощью лемм 3 и 1, свойство (4), получаем:

$$\begin{aligned}0 &= (f_k\varphi^k(g_{m+1}) + f_{k+1}\varphi^{k+1}(g_m))\varphi(f_k)\varphi^{k+1}(g_{m+1}) = \\ &= f_k\varphi^k(g_{m+1})\varphi(f_k\varphi^k(g_{m+1})).\end{aligned}$$

В силу жесткости φ и леммы 3 имеем $f_kg_{m+1} = 0$. Покажем индукцией по i, что $f_kg_{m+i} = 0$ для любого $i \geq 0$. Пусть $f_kg_m = \ldots = f_kg_{m+i-1} = 0$. Из $fg = 0$

следует

$$f_k\varphi^k(g_{m+i}) + f_{k+1}\varphi^{k+1}(g_{m+i-1}) + \ldots + f_{k+i}\varphi^{k+i}(g_m) = 0. \qquad (**)$$

Заметим, что $\varphi^{k+1}(g_{m+i-1})\varphi(f_k) = \ldots = \varphi^{k+i}(g_m)\varphi(f_k) = 0$ по индуктивному предположению и леммам 1 и 3. Поэтому из $(**)$ получаем

$$0 = f_k\varphi^k(g_{m+i})\varphi(f_k) = f_k\varphi^k(g_{m+i}))\varphi(f_k\varphi^k(g_{m+i})),$$

откуда в силу φ- иφ^k-жесткости полукольца S имеем $f_kg_{m+i} = 0$. Таким образом, $f_kg_j = 0$ для всех $m \le j \le n$, поэтому $(f_{k+1}x^{k+1} + \ldots + f_lx^l)g = 0$. Рассуждая как и выше, мы получаем $f_ig_j = 0$ для всех $k \le i \le l$ и $m \le j \le n$. Таким образом, любой коэффициент g_j многочлена g лежит в $r_S(A_0) = eS$, поэтому $g_j = eg_j$ и $g = eg \in eR$. Следовательно, $r_R(A) = eR$ и $S[x^{-1}, x, \varphi]$ — бэровское полукольцо.

Обратно, пусть $R = S[x^{-1}, x, \varphi]$ — бэровское полукольцо и $A \subseteq S$. Тогда $r_R(A) = eR$ для некоторого дополняемого идемпотента e. По предложению 4 $e \in S$. Покажем, что $r_S(A) = eS$. Пусть $b \in r_S(A)$, тогда $b = ef$ для некоторого $f \in R$. Поскольку $b = eb \in eS$, то доказали включение $\subseteq$. Обратное включение очевидно. □

Теорема 4. *Пусть S — φ-arm-полукольцо и φ — инъективный эндоморфизм. Полукольцо S является риккартовым справа (соотв., слева) тогда и только тогда, когда $S[x^{-1}, x, \varphi]$ — риккартово справа (соотв., слева) полукольцо.*

Доказательство. Пусть S — правое риккартово полукольцо. Повторив начальные рассуждения как в теореме 3, получаем, что расширение Жордана полукольца S является правым риккартовым. Поэтому можно считать, что φ — жесткий автоморфизм. Пусть $f = f_kx^k + \ldots + f_lx^l$ для целых $k < \ldots < l$ — произвольный многочлен полукольца R. В силу риккартовости $r_S(f_i) = e_iS$ для некоторых дополняемых идемпотентов e_i, $k \le i \le l$. Каждый e_i является центральным дополняемым идемпотентом, поэтому $e = e_k \cdot \ldots \cdot e_l$ — центральный дополняемый идемпотент полукольца S [11, предл. 2.1.3]. Покажем, что $r_R(f) = eR$. Поскольку $feR = 0$, то $eR \subseteq r_R(f)$. Обратно, пусть $fg = 0$ для многочлена $g = g_mx^m + \ldots + g_nx^n$. Как и при доказательстве теоремы 3 $f_ig_j = 0$ для всех i, j. Тогда $g_j \in r_S(f_i)$, следовательно, $b_j = e_ib_j$. В силу центральности идемпотентов выполняется $b_j = eb_j$, откуда получаем $g = eg \in R$, и доказано включение $r_R(f) \subseteq eR$.

Включение $r_R(f) \supseteq eR$ доказывается как и в теореме 3. □

References

[1] J. Krempa, *Some examples of reduced rings*, Algebra Colloq., **3**:4 (1996), 289–300. Zbl 0859.16019

[2] C.Y. Hong, N.K. Kim, T.K. Kwak, *On skew Armendariz ring*, Comm. Algebra, **31**:1 (2003), 103–122. Zbl 1042.16014

[3] A.R. Nasr-Isfahani, A. Moussavi, *Skew Laurent polynomial extensions of Baer and P.P.-rings*, Bull. Korean Math. Soc., **46**:6 (2009), 1041–1050. Zbl 1188.16023

[4] J.A. Matczuk, *Characterzation of σ-rigid rings*, Comm. Algebra, **32**:11 (2004), 4333–4336. Zbl 1064.16027

[5] A.S. Kuz'mina, *On Armendariz and skew Armendariz rings*, Vestnik Barnaulskogo gosudarstvennogo universiteta, **5**:1 (2005), 13–19.

[6] E.P. Armendariz, *A note on extension of Baer and P.P.–rings*, J. Aust. Math. Soc., **18** (1974), 470–473. Zbl 0292.16009

[7] M.B. Rege, S. Chhawachharia, *Armendariz rings*, Proc. Japan Acad. Ser. A, **73**:1 (1997), 14–17. Zbl 0960.16038

[8] E.M. Vechtomov, E.N. Lubyagina, V.V. Chermnykh, *Elements of semiring theory*, Raduga-Press, Kirov, 2012.

[9] D.A. Jordan, *Bijective extensions of injective ring endomorphisms*, J. Lond. Math. Soc. II, **25**:3 (1982), 435–448. Zbl 0486.16002

[10] R.V. Markov, V.V. Chermnykh, *Semirings close to regular and their Pierce stalks*, Tr. Inst. Mat. Mekh., **21**:3 (2015), 213–221. MR3468105

[11] V.V. Chermnykh, *Functional representations of semirings*, J. Math. Sci., New York, **187**:2 (2012), 187–267. Zbl 1290.16049

Dmitriy Andreevich Maslyaev
Komi Republican Academy of State Service and Management,
11, Kommunisticheskaya str.,
Syktyvkar, 167982, Russia
E-mail address: dmaslyaev@gmail.com

Vasiliy Vladimirovich Chermnykh
Piritim Sorokin Syktyvkar State University,
55, Octyabrskyi ave.,
Syktyvkar, 167001, Russia
E-mail address: vv146@mail.ru