S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

*Том 22, № 2, стр. 144–145 (2025)* УДК 517.95
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 35D35

# ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ

**В.Ю. Ноговищева** AND **Д.А. Прокудин**

*Представлено* П.П. Петровым

**Abstract:** An initial boundary value problem for one-dimensional equations of the dynamics of compressible viscous multicomponent media in the isothermal case is considered. A theorem of the existence and uniqueness of a strong solution to the problem is proved without restrictions on the structure of the viscosity matrix, except for the standard requirements of symmetry and positive certainty.

**Keywords:** existence and uniqueness theorem, unsteady initial boundary value problem, compressible viscous fluid, multicomponent flow.

---

Nogovishcheva, V.Yu., Prokudin, D.A., Unique solvability of the initial-boundary value problem for one-dimensional equations of the dynamics of compressible viscous multicomponent media.



Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

*Поступила 1 января 2024 г., опубликована 31 декабря 2025 г.*

## 1 Постановка начально-краевой задачи и формулировка основного результата

В работе проводится анализ существования и единственности решения начально-краевой задачи для одномерных уравнений динамики сжимаемой вязкой многокомпонентной среды (смеси) в изотермическом случае (по поводу происхождения модели и ее физического смысла см. [1, 2, 3]). В замыкании $\overline{Q}_T$ области $Q_T = (0,T)\times(0,1)$ ($T = \mathrm{const} > 0$) требуется найти плотность смеси $\rho(t,x) > 0$ и скорости $u_i(t,x)$ для каждой компоненты с номером $i = 1,\ldots,N$ ($N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$), удовлетворяющие следующей системе уравнений, начальных и краевых условий:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad v = \sum_{j=1}^{N}\alpha_j u_j, \quad \alpha_j = \mathrm{const} \in (0,1), \quad \sum_{j=1}^{N}\alpha_j = 1, \quad (1)$$

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho v\frac{\partial u_i}{\partial x} + \alpha_i R\frac{\partial\rho}{\partial x} = \sum_{j=1}^{N}\nu_{ij}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad i = 1,\ldots,N, \quad R = \mathrm{const} > 0, \quad (2)$$

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad u_i|_{t=0} = u_{0i}(x), \quad i = 1,\ldots,N, \quad (3)$$

$$u_i|_{x=0} = u_i|_{x=1} = 0, \quad i = 1,\ldots,N. \quad (4)$$

Здесь $v$ — средневзвешенная скорость смеси, числовые коэффициенты вязкостей $\nu_{ij}$, $i,j = 1,\ldots,N$ образуют симметричную матрицу вязкостей $\mathbf{N} > 0$, функции начальных данных $\rho_0(x)$, $u_{0i}(x)$, $i = 1,\ldots,N$ заданы.

Исследуемая система представляет собой некоторое обобщение известной системы уравнений Навье-Стокса динамики сжимаемой вязкой однокомпонентной жидкости (газа) на многокомпонентный случай. Одной из характерных ее особенностей является наличие старших производных (производных второго порядка) от скоростей всех компонент в уравнениях (2). В отличие от однокомпонентного случая, когда вязкость является скаляром, в многокомпонентном случае коэффициенты вязкостей $\nu_{ij}$ образуют матрицу вязкостей $\mathbf{N}$, элементы которой отвечают за вязкое трение [1, 2, 4, 5, 6, 7, 8]. Диагональные элементы матрицы $\mathbf{N}$ отвечают за вязкое трение внутри каждой компоненты, а недиагональные элементы отвечают за вязкое трение между компонентами. Если матрица вязкостей диагональна, то уравнения (2) будут связаны только через младшие члены и тогда результаты известные для уравнений Навье-Стокса [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34] автоматически переносятся на многокомпонентный случай. В работе рассматривается более сложная ситуация недиагональной и нетреугольной матрицы вязкостей $\mathbf{N}$. Вследствие этого, результаты известные для уравнений Навье-Стокса автоматически не переносятся на уравнения (1), (2). Целью работы является доказательство существования и единственности решения задачи (1)–(4) без каких-либо упрощающих предположений о структуре матрицы $\mathbf{N}$, кроме стандартных физических требований симметричности и положительной определенности.

Вопросы однозначной разрешимости для уравнений (1), (2) в политропном случае изучались в работах [35, 36], для родственных моделей многокомпонентных сред — в работах [37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47].

**Определение 1.** *Сильным решением задачи (1)–(4) называется совокупность функций $(\rho, u_1, \ldots, u_N)$ таких, что $(i = 1, \ldots, N)$*

$$\begin{gathered}\rho > 0, \quad \rho \in L_\infty\big(0,T; W_2^1(0,1)\big), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \in L_\infty\big(0,T; L_2(0,1)\big),\\ u_i \in L_\infty\big(0,T; W_2^1(0,1)\big) \bigcap L_2\big(0,T; W_2^2(0,1)\big), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} \in L_2(Q_T),\end{gathered} \tag{5}$$

*уравнения (1), (2) выполнены почти всюду в $Q_T$, начальные условия (3) — для почти всех $x \in (0,1)$, а краевые условия (4) — для почти всех $t \in (0,T)$.*

Основной результат работы формулируется в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть начальные данные в (3) удовлетворяют условиям*

$$\rho_0 > 0, \quad \rho_0 \in W_2^1(0,1), \quad u_{0i} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{6}$$

*Тогда существует единственное сильное решение задачи (1)–(4).*

**Доказательство** Теоремы 1 состоит из нескольких этапов и проведено в Разделах 2–6 настоящей работы. В Разделе 2 проведено исследование разрешимости приближенной начально-краевой задачи, полученной из исходной задачи применением метода Галёркина по переменной $x$ в уравнениях (2). В Разделе 3 выводятся равномерные по параметру приближения оценки решений приближенной задачи, на основе которых в Разделе 4 совершается предельный переход и обосновывается существование решения начально-краевой задачи (1)–(4) в малом по времени. Для продолжения локального решения, в Разделе 5 выводятся оценки, постоянные в которых не зависят от промежутка существования локального решения. Наконец, в Разделе 6 доказывается единственность решения начально-краевой задачи (1)–(4) и завершается доказательство Теоремы 1.

## 2 Конструкция приближенных решений

В данном разделе докажем локальную по времени разрешимость начально-краевой задачи, полученной из задачи (1)–(4) применением метода Галёркина по переменной $x$ в уравнениях (2).

**Лемма 1.** *В предположениях Теоремы 1 для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется интервал времени $(0, t_m) \subset (0, T)$, на котором существует решение* *задачи*[1] $(i = 1, \dots, N,\ k = 1, \dots, m)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0, \quad v = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j u_j, \tag{7}$$

$$\int_0^1 \left( \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho v \frac{\partial u_i}{\partial x} + \alpha_i R \frac{\partial \rho}{\partial x} - \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right) \sin(\pi k x)\, dx = 0, \tag{8}$$

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x), \tag{9}$$

$$u_i = \sum_{s=1}^{m} \theta_{is}(t) \sin(\pi s x), \quad u_i|_{t=0} = \sum_{s=1}^{m} \theta_{0is} \sin(\pi s x), \tag{10}$$

*где* $\theta_{ik}(0) = \theta_{0ik} = 2 \int\limits_0^1 u_{0i}(x) \sin(\pi k x)\, dx$, *при этом*

$$\begin{gathered} \rho > 0, \quad \rho \in L_\infty\big(0, t_m; W_2^1(0,1)\big) \bigcap W_\infty^1\big(0, t_m; L_2(0,1)\big), \\ u_i \in C^{1,\infty}([0, t_m] \times [0,1]). \end{gathered} \tag{11}$$

**Доказательство.** Зафиксируем пока произвольно $t_m \in (0, T]$. В пространстве $(C[0,t_m])^{mN}$ рассмотрим множество

$$B = \left\{ \boldsymbol{\theta} \in (C[0,t_m])^{mN} \middle|\ \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0,\ \ \|\boldsymbol{\theta}\|_{(C[0,t_m])^{mN}} \leqslant b \right\},$$

где

$$\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_N), \quad \boldsymbol{\theta}_i = (\theta_{i1}, \dots, \theta_{im}), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\boldsymbol{\theta}_0 = (\boldsymbol{\theta}_{01}, \dots, \boldsymbol{\theta}_{0N}), \quad \boldsymbol{\theta}_{0i} = (\theta_{0i1}, \dots, \theta_{0im}), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$b^2 = e^{\frac{\sup\limits_{[0,1]} \rho_0}{\inf\limits_{[0,1]} \rho_0}} \|\boldsymbol{\theta}_0\|^2_{\mathbb{R}^{mN}} + 1.$$

Построим оператор $F : B \to (C[0,t_m])^{mN}$, $\operatorname{Im} F \subset (C^1[0,t_m])^{mN}$, $F(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\Theta}$, где $\boldsymbol{\Theta} = (\boldsymbol{\Theta}_1, \dots, \boldsymbol{\Theta}_N)$, $\boldsymbol{\Theta}_i = (\Theta_{i1}, \dots, \Theta_{im})$, $i = 1, \dots, N$ следующим образом. Сначала найдем функцию

$$\rho > 0, \quad \rho \in L_\infty\big(0, t_m; W_2^1(0,1)\big) \bigcap W_\infty^1\big(0, t_m; L_2(0,1)\big)$$

[1] До начала Раздела 4 будем опускать индекс $m$ у величин зависящих от него, кроме величины $t_m$.

как решение задачи Коши (7), (9), где $u_i$, $i = 1, \ldots, N$, задаются по формулам (10) (см. [48]). При этом справедливы неравенства

$$\rho \geqslant \left(\inf_{[0,1]} \rho_0\right) \exp\left\{-\sum_{i=1}^{N} \int_0^t \sup_{[0,1]} \left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right| d\tau\right\},$$
$$\rho \leqslant \left(\sup_{[0,1]} \rho_0\right) \exp\left\{\sum_{i=1}^{N} \int_0^t \sup_{[0,1]} \left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right| d\tau\right\}, \tag{12}$$

которые, в силу включения $\boldsymbol{\theta} \in B$, дают оценки

$$\left(\inf_{[0,1]} \rho_0\right) \exp\left\{-N\pi m^2 bt\right\} \leqslant \rho \leqslant \left(\sup_{[0,1]} \rho_0\right) \exp\left\{N\pi m^2 bt\right\}. \tag{13}$$

Далее определим функцию $\boldsymbol{\Theta}$ как решение следующей задачи Коши для системы $mN$ линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\int_0^1 \left(\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j u_j\right) \frac{\partial U_i}{\partial x} + \alpha_i R \frac{\partial \rho}{\partial x} - \right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2}\right) \sin(\pi k x)\, dx = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{\Theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0, \tag{15}$$

где $U_i = \sum\limits_{s=1}^{m} \Theta_{is}(t) \sin(\pi s x)$, $i = 1, \ldots, N$. Неравенство $\det A \neq 0$, где

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2(t) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_N(t) \end{pmatrix},$$

$$A_i(t) = \left\{\int_0^1 \rho(t,x) \sin(\pi k x) \sin(\pi s x)\, dx\right\}_{k,s=1}^{m}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

выполненное в силу положительности $\rho$, позволяет разрешить систему (14) относительно производных, что обосновывает существование функции $\boldsymbol{\Theta} \in (C^1[0, t_m])^{mN}$. Таким образом, для произвольного $t_m \in (0, T]$ определен оператор

$$F : B \to (C^1[0, t_m])^{mN} \subset (C[0, t_m])^{mN}, \quad F(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\Theta},$$

неподвижная точка которого (если она существует), вместе с соответствующей функцией $\rho$, дает решение задачи (7)–(10).

Покажем, что при достаточно малом $t_m$ оператор $F$ удовлетворяет условиям теоремы Шаудера о существовании неподвижной точки (см., например, [20], стр. 31), а именно: 1) $B$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество (это очевидно); 2) $F : B \to B$; 3) $F$ — вполне непрерывный оператор.

Установим сначала, что $F(B) \subset B$. Для этого умножим уравнения (14) на $\Theta_{ik}(t)$, $i = 1, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, m$, а затем просуммируем по $i = 1, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, m$, получим с учетом (7), что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho U_i^2\,dx\right) + \sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right)dx = \\ = R\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int_0^1 \rho\frac{\partial U_i}{\partial x}\,dx, \tag{16}$$

откуда, в силу неравенств

$$\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int_0^1 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right)dx \geqslant C_1(\mathbf{N})\sum_{i=1}^{N}\int_0^1\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 dx,$$

$$R\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int_0^1 \rho\frac{\partial U_i}{\partial x}\,dx \leqslant \frac{C_1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_0^1\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 dx + C_2,$$

где $C_2 = \dfrac{R^2 N}{2C_1}\left(\sup\limits_{[0,1]}\rho_0\right)^2 \exp\left\{2N\pi m^2 b t_m\right\}$, получаем оценку

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho U_i^2\,dx\right) + C_1\sum_{i=1}^{N}\int_0^1\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 dx \leqslant 2C_2,$$

из которой, в свою очередь, следует, что

$$\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho U_i^2\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho_0 U_{0i}^2\,dx + 2C_2 t_m, \tag{17}$$

где $U_{0i} = \sum_{s=1}^{m} \Theta_{is}(0)\sin(\pi sx) = \sum_{s=1}^{m} \theta_{0is}\sin(\pi sx)$, $i = 1, \ldots, N$. Еще раз привлекая (13), получаем из (17) неравенство

$$\|\mathbf{\Theta}\|^2_{(C[0,t_m])^{mN}} \leqslant \exp\{N\pi m^2 bt_m\} \frac{\sup\limits_{[0,1]} \rho_0}{\inf\limits_{[0,1]} \rho_0} \|\boldsymbol{\theta}_0\|^2_{\mathbb{R}^{mN}} + \\ + \exp\{N\pi m^2 bt_m\} \frac{4C_2}{\inf\limits_{[0,1]} \rho_0} t_m. \tag{18}$$

Выбирая

$$t_m < \min\left\{T, \frac{1}{N\pi m^2 b}, \frac{\inf\limits_{[0,1]} \rho_0}{4eC_3}\right\}, \tag{19}$$

где $C_3 = \dfrac{R^2 N e^2}{2C_1}\left(\sup\limits_{[0,1]} \rho_0\right)^2$, получим, что $C_2 \leqslant C_3$, и придем к нужной оценке

$$\|\mathbf{\Theta}\|_{(C[0,t_m])^{mN}} \leqslant b.$$

Таким образом, при выполнении (19), оператор $F$ отображает множество $B$ в себя.

Докажем теперь компактность оператора $F$. Умножая (14) на $\dfrac{d\Theta_{ik}(t)}{dt}$, $i = 1, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, m$, а затем суммируя по $i = 1, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, m$, выводим соотношение

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)^2 dx = \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \Bigg( -\sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right) - \\ -\rho\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j u_j\right)\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}\right) + \alpha_i R\rho\left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x}\right)\Bigg) dx \tag{20}$$

Произведем оценки слагаемых в правой части (20) с помощью (13), неравенства Коши и неравенств $\|\boldsymbol{\theta}\|_{(C[0,t_m])^{mN}} \leqslant b$, $\|\mathbf{\Theta}\|_{(C[0,t_m])^{mN}} \leqslant b$, $\left\|\dfrac{\partial U_i}{\partial x}\right\|_{L_2(0,1)} \leqslant C_4(m)\|U_i\|_{L_2(0,1)}$, $\left\|\dfrac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x}\right\|_{L_2(0,1)} \leqslant C_4 \left\|\dfrac{\partial U_i}{\partial t}\right\|_{L_2(0,1)}$, $i = 1, \ldots, N$:

$$\left|\sum_{i,j=1}^{N} \nu_{ij} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right) dx\right| \leqslant \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)^2 dx + C_5,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{0}^{1}\rho\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_j u_j\right)\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{0}^{1}\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)^2 dx + C_6,$$

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{0}^{1}\alpha_i R\rho\left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial t\partial x}\right)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{0}^{1}\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)^2\,dx + C_7,$$

где $C_5 = C_5\left(C_4,\ \inf\limits_{[0,1]}\rho_0,\ \mathbf{N}, N, b, m, t_m\right)$, $C_6 = C_6\left(C_4,\ \sup\limits_{[0,1]}\rho_0, N, b, m, t_m\right)$, $C_7 = C_7\left(C_4,\ \inf\limits_{[0,1]}\rho_0,\ \sup\limits_{[0,1]}\rho_0, N, b, m, t_m, R\right)$. Поэтому из (20) получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{0}^{1}\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}\right)^2\,dx \leqslant C_5 + C_6 + C_7, \tag{21}$$

интегрируя которое по времени и применяя (13), выводим оценку

$$\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial U_i}{\partial t}\right\|^2_{L_2(Q_{t_m})} \leqslant C_8\left(C_5, C_6, C_7, \inf\limits_{[0,1]}\rho_0, N, b, m, t_m\right), \tag{22}$$

где $Q(t_m) = (0, t_m) \times (0, 1)$. Таким образом, получена оценка $\boldsymbol{\Theta}$ в $(W_2^1(0, t_m))^{mN}$. Следовательно, $F$ является компактным оператором.

Установим теперь непрерывность оператора $F$ из $B$ в $(C[0, t_m])^{mN}$. Пусть $\boldsymbol{\theta}^{(1,2)} \in B$, $\boldsymbol{\Theta}^{(1,2)} = F(\boldsymbol{\theta}^{(1,2)})$, $u_i^{(1,2)} = \sum\limits_{s=1}^{m}\theta_{is}^{(1,2)}\sin(\pi s x)$, $U_i^{(1,2)} = \sum\limits_{s=1}^{m}\Theta_{is}^{(1,2)}\sin(\pi s x)$, $i = 1, \ldots, N$. Далее, пусть $\rho^{(1,2)}$ — решения задач Коши (7), (9), где вместо $v$ стоит $v^{(1,2)} = \sum\limits_{i=1}^{N}\alpha_i u_i^{(1,2)}$ соответственно. Обозначим $u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$, $U_i = U_i^{(1)} - U_i^{(2)}$, $i = 1, \ldots, N$, $\rho = \rho^{(1)} - \rho^{(2)}$, $v = v^{(1)} - v^{(2)}$. Дифференцируя по переменной $x$ уравнения (7) для $\rho^{(1,2)}$ $\left(\text{т. е. уравнения } \dfrac{\partial\rho^{(1,2)}}{\partial t} + \dfrac{\partial\left(\rho^{(1,2)}v^{(1,2)}\right)}{\partial x} = 0\right)$, умножая на $\dfrac{\partial\rho^{(1,2)}}{\partial x}$, интегрируя по $x$ и $t$, используя начальные условия

$$\rho^{(1,2)}|_{t=0} = \rho_0 \tag{23}$$

и неравенства (13) для $\rho^{(1,2)}$ и Гронуолла, получаем оценки

$$\left\|\frac{\partial\rho^{(1,2)}}{\partial x}\right\|_{L_2(0,1)} \leqslant C_9\left(\|\rho_0\|_{W_2^1(0,1)}, b, m, t_m, N\right). \tag{24}$$

Заметим далее, что из (7), (9) для $\rho^{(1,2)}$ следуют равенства

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v^{(1)})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho^{(2)}v)}{\partial x}=0,\quad \rho|_{t=0}=0. \tag{25}$$

Умножая первое равенство в (25) на $\rho$ и интегрируя по $x$ получаем, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^1\rho^2\,dx\right)=-\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2}\rho^2\frac{\partial(v^{(1)})}{\partial x}+\rho^{(2)}\rho\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial\rho^{(2)}}{\partial x}\right)dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\sup_{[0,1]}\left|\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x}\right|\int\limits_0^1\rho^2\,dx+\sup_{[0,1]}\rho^{(2)}\int\limits_0^1\left(\rho^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)dx+\right. \tag{26}$$

$$\left.+\sup_{[0,1]}v^2\int\limits_0^1\left(\frac{\partial\rho^{(2)}}{\partial x}\right)^2dx+\int\limits_0^1\rho^2\,dx\right)\leqslant C_{10}\left(\int\limits_0^1\rho^2\,dx+\sum_{j=1}^N\int\limits_0^1u_j^2\,dx\right),$$

где $C_{10}=C_{10}\left(C_9,\,\sup\limits_{[0,1]}\rho_0,b,m,t_m,N\right)$. Здесь использовались очевидные соотношения

$$\sum_{j=1}^N\int\limits_0^1u_j^2\,dx=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N\sum_{s=1}^m\theta_{js}^2(t),\qquad \sup_{[0,1]}v^2\leqslant\sum_{i,j=1}^N\sum_{s,l=1}^m|\theta_{il}(t)||\theta_{js}(t)|,$$
$$\int\limits_0^1\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2dx=\frac{\pi^2}{2}\sum_{i,j=1}^N\alpha_i\alpha_j\sum_{s=1}^m s^2\theta_{is}(t)\theta_{js}(t). \tag{27}$$

Из (26), применяя неравенство Гроуолла и учитывая начальное условие в (25), выводим неравенство

$$\int\limits_0^1\rho^2\,dx\leqslant C_{11}(C_{10},t_m)\sum_{j=1}^N\int\limits_{Q_t}u_j^2\,dxd\tau, \tag{28}$$

где $Q_t=(0,t)\times(0,1)$. Далее, из уравнений (14) для $U_i^{(1,2)}$, $i=1,\dots,N$, ввиду (7) для $\rho^{(1,2)}$, следует соотношение

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N\int\limits_0^1\rho^{(1)}U_i^2\,dx+\sum_{i,j=1}^N\nu_{ij}\int\limits_{Q_t}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right)dxd\tau=$$

$$=R\sum_{i=1}^N\alpha_i\int\limits_{Q_t}\rho\frac{\partial U_i}{\partial x}\,dxd\tau-\sum_{i=1}^N\int\limits_{Q_t}\rho U_i\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial\tau}\,dxd\tau- \tag{29}$$

$$-\sum_{i=1}^N\int\limits_{Q_t}\rho^{(1)}vU_i\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x}\,dxd\tau-\sum_{i=1}^N\int\limits_{Q_t}\rho v^{(2)}U_i\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x}\,dxd\tau.$$

Первое слагаемое в левой части (29), ввиду (13) для $\rho^{(1,2)}$, допускает оценку

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho^{(1)}U_i^2\,dx \geqslant \frac{1}{2}\inf_{[0,1]}\rho_0\exp\left\{-N\pi m^2 bt_m\right\}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 U_i^2\,dx. \tag{30}$$

Для второго слагаемого в левой части (29) имеем неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{N}\int\limits_{Q_t}\nu_{ij}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right)dxd\tau \geqslant C_1\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{Q_t}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 dxd\tau. \tag{31}$$

Для первого слагаемого в правой части (29) верно, что

$$\begin{gathered}R\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int\limits_{Q_t}\rho\frac{\partial U_i}{\partial x}\,dxd\tau \leqslant \frac{C_1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{Q_t}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 dxd\tau+\\ +C_{12}\left(C_1,C_{11},R,N,t_m\right)\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{Q_t}u_i^2\,dxd\tau.\end{gathered} \tag{32}$$

Для второго слагаемого в правой части (29) получаем

$$\begin{gathered}-\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{Q_t}\rho U_i\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial\tau}\,dxd\tau \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left(\sum_{j=1}^{N}\sup_{\overline{Q}_t}U_j^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial\tau}\right\|^2_{L_2(Q_t)}\right)+\\ +\frac{C_{11}Nt_m}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{Q_t}u_i^2\,dxd\tau \leqslant \varepsilon mC_8\sum_{i=1}^{N}\sup_{[0,t]}\int\limits_0^1 U_i^2\,dx+\\ +\frac{C_{11}Nt_m}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{Q_t}u_i^2\,dxd\tau.\end{gathered}$$

Возьмем здесь

$$\varepsilon=\frac{1}{4NmC_8}\inf_{[0,1]}\rho_0\exp\left\{-N\pi m^2 bt_m\right\},$$

тогда

$$\begin{gathered}-\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{Q_t}\rho U_i\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial\tau}\,dxd\tau \leqslant C_{13}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{Q_t}u_i^2\,dxd\tau+\\ +\frac{1}{4N}\inf_{[0,1]}\rho_0\exp\left\{-N\pi m^2 bt_m\right\}\sum_{i=1}^{N}\sup_{[0,t]}\int\limits_0^1 U_i^2\,dx,\end{gathered}$$

где $C_{13} = C_{13}\left(C_8, C_{11}, \inf\limits_{[0,1]} \rho_0,\ N, b, m, t_m\right)$. Третье слагаемое в правой части (29) оценим следующим образом:

$$-\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{Q_t} \rho^{(1)} v U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x}\right) dxd\tau \leqslant C_{14}\left(\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{Q_t} u_i^2\, dxd\tau + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{Q_t} U_i^2\, dxd\tau\right), \tag{33}$$

где $C_{14} = C_{14}\left(\sup\limits_{[0,1]} \rho_0, N, b, m, t_m\right)$. Наконец, для последнего слагаемого в правой части (29) получаем соотношение

$$-\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{Q_t} \rho v^{(2)} U_i \left(\frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x}\right) dxd\tau \leqslant C_{15}\left(\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{Q_t} u_i^2\, dxd\tau + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{Q_t} U_i^2\, dxd\tau\right), \tag{34}$$

где $C_{15} = C_{15}\left(C_{11}, N, b, m, t_m\right)$. Таким образом, из (29), с учетом (30)–(34), следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 U_i^2\, dx \leqslant C_{16}\left(\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{Q_t} u_i^2\, dxd\tau + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{Q_t} U_i^2\, dxd\tau\right), \tag{35}$$

где $C_{16} = C_{16}\left(C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, \inf\limits_{[0,1]} \rho_0,\ N, b, m, t_m\right)$, из которого, пользуясь неравенством Гронуолла, получаем оценку

$$\sum_{i=1}^{N} \|U_i\|^2_{L_2(0,1)} \leqslant C_{17}(C_{16}, t_m) \sum_{i=1}^{N} \|u_i\|^2_{L_2(Q_{t_m})}, \tag{36}$$

а отсюда — неравенство

$$\|\mathbf{\Theta}^{(1)} - \mathbf{\Theta}^{(2)}\|_{(C[0,t_m])^{mN}} \leqslant C_{18}(C_{17}, t_m) \|\boldsymbol{\theta}^{(1)} - \boldsymbol{\theta}^{(2)}\|_{(C[0,t_m])^{mN}}, \tag{37}$$

обосновывающее непрерывность оператора $F$ на $B$.

Поскольку оператор $F$ удовлетворяет условиям теоремы Шаудера, то в $B$ существует неподвижная точка $\boldsymbol{\theta}$ оператора $F$, определяющая (вместе с соответствующей функцией $\rho$) решение задачи (7)–(10). Лемма 1 доказана.

## 3 Равномерные оценки галеркинских приближений

В данном разделе получим равномерные по параметру $m$ оценки построенных приближенных решений, которые позволят впоследствии совершить предельный переход при $m \to \infty$.

**Лемма 2.** *В предположениях Теоремы 1 существуют положительные постоянные $C_{19}$ и $t_0 \leqslant T$ (см. (54)) такие, что для любого решения $(\rho, u_1, \ldots, u_N)$ задачи (7)–(10) справедлива оценка*

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\|u_i\|_{L_\infty\left(0,t_0;W_2^1(0,1)\right)} + \|u_i\|_{L_2\left(0,t_0;W_2^2(0,1)\right)} + \left\|\frac{\partial u_i}{\partial t}\right\|_{L_2(Q_{t_0})}\right) + \\ +\|\rho\|_{L_\infty\left(0,t_0;W_2^1(0,1)\right)} + \left\|\frac{1}{\rho}\right\|_{L_\infty(Q_{t_0})} + \left\|\frac{\partial \rho}{\partial t}\right\|_{L_\infty\left(0,t_0;L_2(0,1)\right)} \leqslant C_{19}, \tag{38}$$

*где $Q_{t_0} = (0,t_0)\times(0,1)$,*

$$C_{19} = C_{19}\left(\left\{\|u_{0i}\|_{W_2^1(0,1)}\right\},\ \|\rho_0\|_{W_2^1(0,1)},\ \inf_{[0,1]}\rho_0,\ \mathbf{N},\ R,\ N,\ T, t_0\right).$$

**Доказательство.** Введем обозначение

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1\left(\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right)^2\right)dxd\tau. \tag{39}$$

Уравнение (7) влечет выполнение неравенств (12), из которых, в свою очередь, следуют оценки

$$C_{20}^{-1}\exp\{-C_{20}\alpha(t)\} \leqslant \rho(t,x) \leqslant C_{20}\exp\{C_{20}\alpha(t)\}, \tag{40}$$

где $C_{20} = C_{20}\left(\sup\limits_{[0,1]}\rho_0,\ \inf\limits_{[0,1]}\rho_0, N, T\right)$. Заметим теперь, что из (7) вытекает равенство

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \rho v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{41}$$

из которого получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^1 \rho\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)^2 dx\right) = 2\int_0^1\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)dx. \tag{42}$$

Из (42) следует соотношение

$$\begin{gathered}\int\limits_0^1 \rho\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)^2 dx \leqslant \int\limits_0^1 \rho_0\left(\left(\frac{1}{\rho_0}\right)'\right)^2 dx+\\ +\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \rho\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)^2 dxd\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dxd\tau.\end{gathered} \tag{43}$$

**Замечание 1.** *При выводе (43) нам потребовалась (в (41), (42)) дополнительная гладкость $\rho$ по сравнению с (11), хотя само соотношение (43) никаких дополнительных требований не предусматривает. Это означает, что (43) может быть получено путем регуляризации $\rho_0$, вывода (43) для решений получившихся задач, а затем предельного перехода по параметру регуляризации. Аналогично следует понимать вывод соотношений (24).*

Из (43), пользуясь (39), (40) и неравенством Гронуолла, получаем оценку

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)^2 dx+\int\limits_0^1\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 dx \leqslant C_{21}\exp\{C_{21}\alpha(t)\}, \tag{44}$$

где $C_{21}=C_{21}\left(C_{20},\|\rho_0\|_{W_2^1(0,1)},\inf\limits_{[0,1]}\rho_0,N,T\right)$. Далее, умножая (8) на $\theta'_{ik}+\pi^2k^2\theta_{ik}$, суммируя по $i=1,\ldots,N$, $k=1,\ldots,m$, и учитывая (7), (10), приходим к соотношению

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^N\int\limits_0^1 \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 dx+\sum_{i,j=1}^N \nu_{ij}\int\limits_0^1\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}\right)dx+\\ +\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^N\int\limits_0^1\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dx\right)+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^N\nu_{ij}\int\limits_0^1\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)dx\right)=\\ =\sum_{i=1}^N\int\limits_0^1\Bigg(-\rho v\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)-\alpha_i R\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)+\\ +\alpha_i R\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right)+2\rho v\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\Bigg)dx.\end{gathered} \tag{45}$$

Т. к. $\mathbf{N}>0$, то

$$\text{левая часть (45)} \geqslant C_{22}(C_1)\alpha'(t)+\beta'(t), \tag{46}$$

где

$$\beta(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\nu_{ij}\int_0^1\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right) dx.$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в правой части (45). Для первого слагаемого в правой части (45) имеем

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho v\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N}\|v\|_{L_\infty(0,1)}\left\|\sqrt{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial t}\right\|_{L_2(0,1)}\left\|\sqrt{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x}\right\|_{L_2(0,1)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{22}}{10}\alpha'(t) + C_{23}\,\beta^2(t)\exp\{C_{23}\alpha(t)\}, \tag{47}$$

где $C_{23} = C_{23}(C_{20}, C_{22}, N)$. Для второго и третьего слагаемых в правой части (45) получаем соответственно

$$-R\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int_0^1\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right) dx \leqslant \frac{C_{22}}{10}\alpha'(t) + C_{24}\exp\{C_{24}\alpha(t)\}, \tag{48}$$

$$R\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int_0^1\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right) dx \leqslant \frac{C_{22}}{10}\alpha'(t) + C_{25}\exp\{C_{25}\alpha(t)\}, \tag{49}$$

где $C_{24} = C_{24}(C_{20}, C_{21}, C_{22}, R, N)$, $C_{25} = C_{25}(C_{21}, C_{22}, R, N)$. Для четвертого слагаемого в правой части (45) верно, что

$$2\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho v\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right) dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{i=1}^{N}\|v\|_{L_\infty(0,1)}\|\sqrt{\rho}\|_{L_\infty(0,1)}\left\|\sqrt{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x}\right\|_{L_2(0,1)}\left\|\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,1)} \leqslant \tag{50}$$

$$\leqslant \frac{C_{22}}{10}\alpha'(t) + C_{26}\,\beta^2(t)\exp\{C_{26}\alpha(t)\}, \quad C_{26} = C_{26}(C_{20}, C_{22}, N).$$

Наконец, для последнего слагаемого в правой части (45), с помощью оценок

$$\left\|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right\|_{L_\infty(0,1)} \leqslant \sqrt{2}\left\|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(0,1)}\left\|\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right\|^{\frac{1}{2}}_{L_2(0,1)}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

выводим

$$-\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right\|_{L_\infty(0,1)}\left\|\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)\right\|_{L_2(0,1)}\left\|\sqrt{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial t}\right\|_{L_2(0,1)} \leqslant \qquad (51)$$

$$\leqslant \frac{C_{22}}{10}\alpha'(t) + C_{27}\,\beta(t)\exp\{C_{27}\alpha(t)\}, \quad C_{27} = C_{27}(C_{20}, C_{21}, C_{22}, N).$$

Таким образом, из (47)–(51) следует, что

$$\text{правая часть (45)} \leqslant \frac{C_{22}}{2}\alpha'(t) + C_{28}(1+\beta^2(t))\exp\{C_{28}\alpha(t)\}, \qquad (52)$$

где $C_{28} = C_{28}(C_{23}, \ldots, C_{27})$. Объединяя соотношения (46) и (52), получаем из (45) неравенство

$$\frac{C_{22}}{2}\alpha' + \beta' \leqslant C_{29}\exp\left\{C_{29}\left(\frac{C_{22}}{2}\alpha + \beta\right)\right\}, \quad C_{29} = C_{29}(C_{22}, C_{28}). \qquad (53)$$

Зададим любое $C_{30} > \beta(0)$ (например, $C_{30} = 2\beta(0)$). Тогда при

$$t_0 = \min\left\{T, \frac{\exp\{-C_{29}\beta(0)\} - \exp\{-C_{29}C_{30}\}}{C_{29}^2}\right\}, \qquad (54)$$

из (53) получаем оценку

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant t_0}(\alpha+\beta) \leqslant \left(1 + \frac{2}{C_{22}}\right)C_{31}, \qquad (55)$$

где $C_{31} = \dfrac{1}{C_{29}}\ln\left(\dfrac{1}{\exp\{-C_{29}\beta(0)\} - C_{29}^2 t_0}\right)$, которая вместе с (7), (40) и (44) завершает доказательство Леммы 2.

## 4 Сходимость приближенных решений

В данном разделе, на основании полученных равномерных по параметру $m$ оценок, совершим предельный переход при $m \to \infty$ и покажем, что совокупность предельных функций является сильным решением задачи (1)–(4) в малом по времени.

Построив согласно Лемме 1 решения $(\rho_m, u_{1m}, \ldots, u_{Nm})$ задач (7)–(10) при всех $m \in \mathbb{N}$, а затем при необходимости продолжив их на интервал $(0, t_0)$, согласно Лемме 2, можно использовать для них оценку (38). На основании этой оценки может быть выделена подпоследовательность (которую обозначим так же; далее эта процедура также будет подразумеваться при необходимости), для которой при $m \to \infty$ для всех $i = 1, \ldots, N$ имеют место сходимости

$$\rho_m \to \rho \quad * -\text{слабо в } L_\infty\big(0, t_0; W_2^1(0,1)\big),$$

$$u_{im} \to u_i \ * -\text{слабо в } L_\infty\big(0, t_0; W_2^1(0,1)\big) \text{ и слабо в } L_2\big(0, t_0; W_2^2(0,1)\big).$$

Кроме того, оставшиеся свойства, перечисленные в (5), выполнены для нашей последовательности в $Q_{t_0}$ равномерно по $m$, а значит предельные функции попадают в соответствующие классы. Покажем, что совокупность функций $(\rho, u_1, \ldots, u_N)$ является сильным решением задачи (1)–(4) на $(0, t_0)$.

Из равномерных оценок $\rho_m$, $u_{im}$, $i = 1, \ldots, N$ в $L_\infty\big(0, t_0; W_2^1(0,1)\big)$ и $\dfrac{\partial \rho_m}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u_{im}}{\partial t}$, $i = 1, \ldots, N$ в $L_2(Q_{t_0})$ (см. (38)) получаем по теореме Арцела–Асколи ([49], Теорема 1.70, стр. 58) сходимости

$$\rho_m \to \rho \ \text{ при } \ m \to \infty \ \text{ сильно в } \ C\big([0, t_0]; L_2(0,1)\big), \tag{56}$$

$$u_{im} \to u_i \ \text{ при } \ m \to \infty \ \text{ сильно в } \ C\big([0, t_0]; L_2(0,1)\big), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{57}$$

Из ограниченности $\dfrac{\partial u_{im}}{\partial t}$, $i = 1, \ldots, N$ в $L_2(Q_{t_0})$ следуют равномерные оценки $\dfrac{\partial^2 u_{im}}{\partial t \partial x}$, $i = 1, \ldots, N$ в $L_2(0, t_0; W_2^{-1}(0,1))$, что вместе с оценками $\dfrac{\partial u_{im}}{\partial x}$, $i = 1, \ldots, N$ в $L_2(0, t_0; W_2^1(0,1))$ приводит, по теореме Лионса–Обена ([49], Теорема 1.71, стр. 59), к сходимостям

$$\frac{\partial u_{im}}{\partial x} \to \frac{\partial u_i}{\partial x} \ \text{ при } \ m \to \infty \ \text{ сильно в } \ L_2(Q_{t_0}), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{58}$$

Отсюда и из (57) следуют соотношения

$$u_{im} \to u_i \ \text{ при } \ m \to \infty \ \text{ сильно в } \ L_2\big(0, t_0; C[0,1]\big), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{59}$$

Таким образом, предельные функции $\rho$, $u_i$, $i = 1, \ldots, N$, удовлетворяют уравнениям неразрывности (1) с $v = \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j u_j$ почти всюду в $Q_{t_0}$, начальным условиям (3) — для почти всех $x \in (0,1)$ и граничным условиям (4) — для почти всех $t \in (0, t_0)$.

Из ограниченности $\dfrac{\partial u_{im}}{\partial t}$, $i = 1, \ldots, N$ в $L_2(Q_{t_0})$ следуют слабые сходимости $\dfrac{\partial u_{im}}{\partial t}$ к $\dfrac{\partial u_i}{\partial t}$ в $L_2(Q_{t_0})$, $i = 1, \ldots, N$, что вместе с (56) и ограниченностью $\rho_m \dfrac{\partial u_{im}}{\partial t}$, $i = 1, \ldots, N$ в $L_2(Q_{t_0})$, влечет слабые сходимости $\rho_m \dfrac{\partial u_{im}}{\partial t}$ к $\rho \dfrac{\partial u_i}{\partial t}$ в $L_2(Q_{t_0})$, $i = 1, \ldots, N$. Далее, из (56) и (58) следует, что при всех $i = 1, \ldots, N$

$$\rho_m \frac{\partial u_{im}}{\partial x} \to \rho \frac{\partial u_i}{\partial x} \ \text{ при } \ m \to \infty \ \text{ сильно в } \ L_2\big(0, t_0; L_1(0,1)\big), \tag{60}$$

откуда и из (59) получаем для всех $i, j = 1, \ldots, N$ сходимости

$$\left(\rho_m \frac{\partial u_{im}}{\partial x}\right) u_{jm} \to \left(\rho \frac{\partial u_i}{\partial x}\right) u_j \ \text{ при } \ m \to \infty \ \text{ сильно в } \ L_1(Q_{t_0}). \tag{61}$$

Из (8) следует, что для любых функций вида ($i = 1, \ldots, N$)

$$\varphi_i = \sum_{s=1}^{M} \eta_{is}(t)\sin(\pi s x), \quad \eta_{is} \in C[0, t_0], \quad s = 1, \ldots, M, \quad M \leqslant m, \tag{62}$$

выполнены для всех $i = 1, \ldots, N$ равенства

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_{t_0}} \left(\rho_m \frac{\partial u_{im}}{\partial t} + \rho_m v_m \frac{\partial u_{im}}{\partial x} + \alpha_i R \frac{\partial \rho_m}{\partial x} - \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_{jm}}{\partial x^2}\right) \varphi_i \, dxdt = 0, \quad v_m = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j u_{jm},\end{gathered} \tag{63}$$

переходя в которых (благодаря полученным выше сходимостям) к пределу при $m \to \infty$, получаем (поскольку множество функций вида (62) всюду плотно в $L_2(Q_{t_0})$) справедливость уравнений баланса импульсов (2) для предельных функций $\rho$, $u_i$, $i = 1, \ldots, N$ почти всюду в $Q_{t_0}$. Таким образом, доказано существование сильного решения задачи (1)–(4) в малом по времени.

## 5 Глобальные априорные оценки

В данном разделе, чтобы продолжить решение задачи (1)–(4) с интервала $(0, t_0)$ на весь рассматриваемый интервал $(0, T)$, получим для него априорные оценки, константы в которых зависят лишь от данных задачи и от величины $T$, но не от малого параметра $t_0$ (см., например, [20], стр. 40).

При выводе оценок далее, иногда будет удобно пользоваться массовыми лагранжевыми координатами. Возьмем за новые независимые переменные $t$ и $y(t, x) = \int\limits_0^x \rho(t, s)\, ds$. Тогда уравнения (1), (2) примут вид

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \tilde{\rho}^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0, \quad \tilde{v} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \tilde{u}_j, \tag{64}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \alpha_i R \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} = \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \frac{\partial}{\partial y}\left(\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y}\right), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{65}$$

Область $Q_T$ при таком переходе отображается в область $\Pi_T = (0, T) \times (0, d)$, где $d = \int\limits_0^1 \rho_0(x)\, dx$, $\rho_0 = \sum_{j=1}^{N} \rho_{0j}$, начальные и краевые условия (3), (4) преобразуются к виду

$$\tilde{\rho}|_{t=0} = \tilde{\rho}_0(y), \quad \tilde{u}_i|_{t=0} = \tilde{u}_{0i}(y), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{66}$$

$$\tilde{u}_i|_{y=0} = \tilde{u}_i|_{y=d} = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{67}$$

Приступим к выводу априорных оценок.

**Лемма 3.** *В предположениях Теоремы 1 существует положительная постоянная $C_{32}$ такая, что*

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \rho u_i^2\,dx + \int\limits_0^1 \big(\rho \ln\rho - (\ln d + 1)\rho + d\big)\,dx + \\ + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dx\,dt \leqslant C_{32}, \tag{68}$$

*где* $C_{32} = C_{32}\left(\sup\limits_{(0,1)} \rho_0, \left\{||u_{0i}||_{L_2(0,1)}\right\}, \mathbf{N}, d, N, R\right)$.

**Доказательство.** Умножим уравнения (2) на $u_i$, проинтегрируем по $x$ и просуммируем по $i = 1, \ldots, N$. Учитывая, что в силу (1), (4) и условия $\mathbf{N} > 0$, имеют место соотношения

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \left(\rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho v u_i \frac{\partial u_i}{\partial x}\right) dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho u_i^2\,dx\right),$$

$$R\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int\limits_0^1 u_i \frac{\partial \rho}{\partial x}\,dx = R\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^1 \big(\rho\ln\rho - (\ln d + 1)\rho + d\big)\,dx\right),$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \nu_{ij} \int\limits_0^1 u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}\,dx = -\sum_{i,j=1}^{N} \nu_{ij} \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right) dx \leqslant \\ \leqslant -C_1 \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dx, \tag{69}$$

получим неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho u_i^2\,dx\right) + R\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^1 \big(\rho\ln\rho - (\ln d + 1)\rho + d\big)\,dx\right) + \\ + C_1 \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dx \leqslant 0. \tag{70}$$

Неравенство (70) проинтегрируем по $t$, используя (3), получим

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho u_i^2\,dx + R\int_0^1 \big(\rho\ln\rho - (\ln d+1)\rho + d\big)\,dx+$$

$$+C_1\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\int_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dx\,d\tau \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \rho_0 u_{0i}^2\,dx+$$

$$+R\int_0^1 \big(\rho_0\ln\rho_0 - (\ln d+1)\rho_0 + d\big)\,dx.$$

Отсюда непосредственно следует оценка (68). Лемма 3 доказана.

**Замечание 2.** *Оценка (68) в массовых лагранжевых координатах имеет следующий вид:*

$$\sum_{i=1}^{N}\int_0^d \tilde{u}_i^2\,dy + \int_0^d \frac{\big(\tilde\rho\ln\tilde\rho - (\ln d+1)\tilde\rho + d\big)}{\tilde\rho}\,dy+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\int_0^T\int_0^d \tilde\rho\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y}\right)^2 dy\,dt \leqslant C_{32}. \tag{71}$$

**Замечание 3.** *Из оценки (68) следует, что*

$$\sum_{i=1}^{N}\int_0^T \left(\sup_{[0,1]}|u_i|\right)^2 dt \leqslant C_{32}. \tag{72}$$

**Лемма 4.** *В предположениях Теоремы 1 существуют положительные постоянные $C_{33}$, $C_{34}$ такие, что*

$$\frac{1}{C_{33}} \leqslant \tilde\rho(t,y) \leqslant C_{33}, \quad \frac{1}{C_{33}} \leqslant \rho(t,x) \leqslant C_{33}, \tag{73}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 dx + \int_0^T\int_0^1 \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 dx\,dt \leqslant C_{34} \tag{74}$$

*где* $C_{33} = C_{33}\left(\text{арг. } C_{32}, \inf\limits_{[0,d]}\tilde\rho_0, \|\tilde\rho_0\|_{W_2^1(0,d)}, \left\{\|\tilde u_{0i}\|_{L_2(0,d)}\right\}, \tilde{\mathbf{N}}, \tilde R\right)$,
$C_{34} = C_{34}\,(\text{арг. } C_{33})$, $\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N}^{-1}$, $\tilde R = \sum\limits_{i,j=1}^{N} \tilde\nu_{ij}\alpha_i\alpha_j$.

**Доказательство.** Перепишем уравнения (65) в виде

$$\sum_{j=1}^{N} \tilde{\nu}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} + R\left(\sum_{j=1}^{N} \tilde{\nu}_{ij}\alpha_j\right) \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\tilde{\rho}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y}\right), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{75}$$

где $\tilde{\nu}_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, N$ — элементы матрицы $\tilde{\mathbf{N}}$, а затем умножим (75) на $\alpha_i$ и просуммируем по $i = 1, \ldots, N$, получим, что

$$\sum_{i,j=1}^{N} \tilde{\nu}_{ij}\alpha_i \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} + \tilde{R}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\tilde{\rho}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}\right). \tag{76}$$

Выражая из уравнения (64)

$$\tilde{\rho}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \ln\tilde{\rho}}{\partial t} \tag{77}$$

и подставляя в (76), приходим к равенству

$$\frac{\partial^2 \ln\tilde{\rho}}{\partial t \partial y} + \tilde{R}\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} = -\sum_{i,j=1}^{N} \tilde{\nu}_{ij}\alpha_i \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t}.$$

Умножим это равенство на $\dfrac{\partial \ln\tilde{\rho}}{\partial y}$ и проинтегрируем по $y$, получим соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^d \left(\frac{\partial \ln\tilde{\rho}}{\partial y}\right)^2 dy\right) + \tilde{R}\int_0^d \tilde{\rho}\left(\frac{\partial \ln\tilde{\rho}}{\partial y}\right)^2 dy = \\ = -\sum_{i,j=1}^{N} \tilde{\nu}_{ij}\alpha_i \int_0^d \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \ln\tilde{\rho}}{\partial y}\right) dy. \tag{78}$$

Правую часть (78) преобразуем, интегрируя по частям и используя (77):

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \tilde{\nu}_{ij}\alpha_i \int_0^d \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \ln\tilde{\rho}}{\partial y}\right) dy = -\frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{N} \tilde{\nu}_{ij}\alpha_i \int_0^d \tilde{u}_j \frac{\partial \ln\tilde{\rho}}{\partial y}\, dy\right) + \\ + \sum_{i,j=1}^{N} \tilde{\nu}_{ij}\alpha_i \int_0^d \tilde{\rho}\left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}\right) dy. \tag{79}$$

Таким образом, после интегрирования (78) по $t$, учитывая (79), находим

$$\frac{1}{2}\int_0^d \left(\frac{\partial \ln\tilde{\rho}}{\partial y}\right)^2 dy + \tilde{R}\int_0^t \int_0^d \tilde{\rho}\left(\frac{\partial \ln\tilde{\rho}}{\partial y}\right)^2 dy\, d\tau =$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{N} \tilde{\nu}_{ij}\alpha_i \int\limits_0^d \tilde{u}_j \frac{\partial \ln\tilde{\rho}}{\partial y}\, dy + \sum_{i,j=1}^{N} \tilde{\nu}_{ij}\alpha_i \int\limits_0^t \int\limits_0^d \tilde{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}\right) dy d\tau +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{N} \tilde{\nu}_{ij}\alpha_i \int\limits_0^d \tilde{u}_{0j} \frac{d\ln\tilde{\rho}_0}{dy}\, dy + \frac{1}{2} \int\limits_0^d \left(\frac{d\ln\tilde{\rho}_0}{dy}\right)^2 dy.$$

Используя оценку (71), отсюда выводим неравенство

$$\int\limits_0^d \left(\frac{\partial \ln\tilde{\rho}}{\partial y}\right)^2 dy + \int\limits_0^T \int\limits_0^d \tilde{\rho} \left(\frac{\partial \ln\tilde{\rho}}{\partial y}\right)^2 dy dt \leqslant C_{35}, \tag{80}$$

где $C_{35} = C_{35}\left(C_{32}, \inf\limits_{[0,d]} \tilde{\rho}_0, \|\tilde{\rho}_0\|_{W_2^1(0,d)}, \left\{\|\tilde{u}_{0i}\|_{L_2(0,d)}\right\}, \tilde{\mathbf{N}}, \tilde{R}, N\right)$. Из (64), (66) и (67) следует, что при каждом $t \in [0,T]$ хотя бы в одной точке $\tilde{y}(t) \in [0,d]$

$$\tilde{\rho}(t, \tilde{y}(t)) = d. \tag{81}$$

Следовательно, можно воспользоваться представлением

$$\ln\tilde{\rho}(t,y) = \ln\tilde{\rho}(t,\tilde{y}) + \int\limits_{\tilde{y}}^{y} \frac{\partial \ln\tilde{\rho}}{\partial s}\, ds,$$

из которого по неравенству Гельдера, с учетом (80) и (81), имеем

$$|\ln\tilde{\rho}(t,y)| \leqslant |\ln d| + \sqrt{d} \sqrt{\int\limits_0^d \left(\frac{\partial \ln\tilde{\rho}}{\partial y}\right)^2 dy} \leqslant C_{36}(C_{35}, d).$$

Отсюда и из (80) непосредственно следуют оценки (73) и (74). Лемма 4 доказана.

**Лемма 5.** *В предположениях Теоремы 1 существует положительная постоянная* $C_{37}$ *такая, что*

$$\begin{gathered}\int\limits_0^1 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)^2 dx + \sum_{i=1}^{N} \left(\int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dx + \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 dx dt + \right. \\ \left. + \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}\right)^2 dx dt\right) \leqslant C_{37},\end{gathered} \tag{82}$$

где $C_{37} = C_{37}\left(\text{арг. } C_{33}, \left\{\|u'_{0i}\|_{L_2(0,1)}\right\}, \mathbf{N}, R, N, T\right)$.

**Доказательство.** Возведем в квадрат уравнения (2), поделим на $\rho$, просуммируем по $i = 1, \ldots, N$ и проинтегрируем по $x$, получим

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx - 2 \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left( \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right) dx +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \frac{1}{\rho} \left( \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right)^2 dx = \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \rho \left( v \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\alpha_i R}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 dx. \tag{83}$$

Введем следующее обозначение:

$$\gamma(t) = \sum_{i,j=1}^{N} \nu_{ij} \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \int_0^t \left( \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \left( \sum_{j=1}^{N} \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx \, d\tau.$$

Тогда из (83) и неравенств (69), (73) и (74) следует, что

$$\gamma'(t) \leqslant C_{38} + C_{39} \left( \sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^2_{L_\infty(0,1)} \right) \left( \sum_{i,j=1}^{N} \nu_{ij} \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx \right) \leqslant$$
$$\leqslant C_{38} + C_{39} \left( \sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^2_{L_\infty(0,1)} \right) \gamma(t),$$

где $C_{38} = C_{38}(C_{33}, C_{34}, R, N)$, $C_{39} = C_{39}(C_1, C_{33}, N)$, откуда и из неравенства Гронуолла (см. также (72)) получаем, что

$$\gamma(t) \leqslant C_{40} \left( C_{32}, C_{38}, C_{39}, \{\|u'_{0i}\|_{L_2(0,1)}\}_{i=1}^{N}, \mathbf{N}, N, T \right). \tag{84}$$

Из (84) непосредственно следует оценка

$$\sum_{i=1}^{N} \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^T \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx dt +\right.$$
$$\left. + \int_0^T \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 dx dt \right) \leqslant C_{41}(C_1, C_{33}, C_{40}, N). \tag{85}$$

Наконец, из уравнения (1) и оценок (73), (74) и (85) получаем, что

$$\int_0^1 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2 dx \leqslant C_{42}(C_{33}, C_{34}, C_{41}, N).$$

Лемма 5 доказана.

Таким образом, в Леммах 3-5 получены все оценки, необходимые для продолжения решения начально-краевой задачи (1)–(4) с интервала $(0, t_0)$ на интервал $(0, T)$.

## 6 Единственность решения

В данном разделе обоснуем единственность решения начально-краевой задачи (1)–(4) и завершим доказательство Теоремы 1.

Предположим, что $\big(\rho^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_N^{(1)}\big)$ и $\big(\rho^{(2)}, u_1^{(2)}, \ldots, u_N^{(2)}\big)$ — два решения задачи (1)–(4). Положим $\rho = \rho^{(1)} - \rho^{(2)}$, $u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$, $i = 1, \ldots, N$, $v^{(1,2)} = \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j u_j^{(1,2)}$, $v = v^{(1)} - v^{(2)}$. Из (1), (3) следуют равенства

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho v^{(1)}\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\rho^{(2)} v\right)}{\partial x} = 0, \quad \rho|_{t=0} = 0. \tag{86}$$

Умножая (86) на $2\rho$ и интегрируя по $x$, получаем

$$y_1'(t) = -\int\limits_0^1 \left(\rho^2 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} + 2\rho^{(2)} \rho \frac{\partial v}{\partial x} + 2\rho v \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x}\right) dx, \tag{87}$$

где

$$y_1(t) = \int\limits_0^1 \rho^2\, dx. \tag{88}$$

Слагаемые в правой части (87) можно оценить следующим образом:

$$-\int\limits_0^1 \rho^2 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x}\, dx \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,1)}\right) y_1(t),$$

$$-2\int\limits_0^1 \rho^{(2)} \rho \frac{\partial v}{\partial x}\, dx \leqslant \|\rho^{(2)}\|^2_{L_\infty(Q_T)} y_1(t) + N \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dx,$$

$$-2\int\limits_0^1 \rho v \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x}\, dx \leqslant y_1(t) + \|v^2\|_{L_\infty(0,1)} \left\| \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty\left(0,T;L_2(0,1)\right)} \leqslant$$

$$\leqslant y_1(t) + N \left( \left\| \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty\left(0,T;L_2(0,1)\right)} \right) \left( \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dx \right).$$

В силу включений

$$\rho^{(2)} \in L_\infty(Q_T), \quad \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x} \in L_\infty\big(0, T; L_2(0,1)\big),$$

$$\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x} \in L_2\big(0,T; L_\infty(0,1)\big), \quad i = 1,\dots,N,$$

выводим оценку

$$y_1'(t) \leqslant C_{43}(t) y_1(t) + C_{44} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dx, \tag{89}$$

где $C_{43} = C_{43}\left(\left\{\left\|\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x}\right\|_{L_\infty(0,1)}\right\}, \ \|\rho^{(2)}\|_{L_\infty(Q_T)}\right)$, $C_{43} \in L_2(0,T)$, $C_{44} = C_{44}\left(\left\|\frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x}\right\|_{L_\infty\left(0,T;L_2(0,1)\right)}, N\right)$. Поэтому, применяя неравенство Гронуолла, приходим к неравенству

$$y_1(t) \leqslant C_{45}\left(C_{44}, \|C_{43}\|_{L_1(0,1)}\right) \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dx d\tau. \tag{90}$$

Далее, из уравнений (2) и краевых условий (4) следует равенство

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \rho^{(1)} u_i^2 \, dx\right) + \sum_{i,j=1}^{N} \nu_{ij} \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right) dx = \\ = R \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int\limits_0^1 \left(\rho^{(1)} - \rho^{(2)}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) dx - \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \rho u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t}\right) dx - \\ - \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \rho^{(1)} v u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x}\right) dx - \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \rho v^{(2)} u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x}\right) dx,\end{gathered} \tag{91}$$

из которого вытекает соотношение

$$\begin{gathered}y_2'(t) + y_3'(t) \leqslant R \int\limits_0^1 \rho \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx - \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \rho u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t}\right) dx - \\ - \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \rho^{(1)} v u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x}\right) dx - \sum_{i=1}^{N} \int\limits_0^1 \rho v^{(2)} u_i \left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x}\right) dx,\end{gathered} \tag{92}$$

где

$$y_2(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho^{(1)} u_i^2\, dx,$$
$$y_3(t) = C_1 \sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2 dx d\tau. \tag{93}$$

Оценим слагаемые в правой части (92) следующим образом:

$$R\int\limits_0^1 \rho\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx \leqslant \frac{C_1}{4}\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,1)} + C_{46}\left(C_1, R, N\right) y_1(t),$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho u_i\left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t}\right) dx \leqslant \frac{C_1}{4}\sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,1)} +$$
$$+C_{47}\left(C_1, \left\{\left\|\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t}\right\|_{L_2(0,1)}\right\}\right) y_1(t),$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho^{(1)} v u_i\left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x}\right) dx \leqslant C_{48}\left(\left\{\left\|\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x}\right\|_{L_\infty(0,1)}\right\}, N\right) y_2(t),$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1 \rho v^{(2)} u_i\left(\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x}\right) dx \leqslant C_{49}\left(\left\{\|u_i^{(2)}\|_{L_\infty(Q_T)}, N\right\}\right) y_1(t)+$$
$$+C_{50}\left(\left\{\left\|\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x}\right\|_{L_\infty(0,1)}\right\}, \left\|\frac{1}{\rho^{(1)}}\right\|_{L_\infty(Q_T)}\right) y_2(t),$$

где $C_{47}, C_{50} \in L_1(0,T)$, $C_{48} \in L_2(0,T)$. Таким образом, из (92), с учетом уже доказанного соотношения (см. (90))

$$y_1(t) \leqslant C_{51}(C_1, C_{45}) y_3(t),$$

следует неравенство

$$y_2'(t) + \frac{1}{2}y_3'(t) \leqslant C_{52}(C_{46},\ldots,C_{51})\left(y_2(t) + \frac{1}{2}y_3(t)\right), \tag{94}$$

где $C_{52} \in L_1(0,1)$, из которого, с учетом того, что $y_2(0) = y_3(0) = 0$, получаем тождества

$$y_1 \equiv y_2 \equiv y_3 \equiv 0, \tag{95}$$

завершающие доказательство Теоремы 1.

## References


[1] R.I. Nigmatulin, *Dynamics of Multiphase Media: V. 1–2*, Hemisphere, New York, 1990.

[2] K.R. Rajagopal, L. Tao, *Mechanics of Mixtures*, World Scientific, Singapore, 1995.

[3] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 388–397.

[4] A.D Kirwan, M. Massoudi, *The heat flux vector(s) in a two component fluid mixture*, Fluids, **5**:2 (2020), 77, 15 pp.

[5] R.T. Lee, K.T. Yang, Y.C. Chiou, *A novel model for a mixed-film lubrication with oil-in-water emulsions*, Tribology International, **66** (2013), 241–248.

[6] J. Malek, K.R. Rajagopal, *A thermodynamic framework for a mixture of two liquids*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, **9**:4 (2008), 1649–1660.

[7] R.J. Atkin, R.E. Craine, *Continuum theories of mixtures: applications*, IMA Journal of Applied Mathematics, **17**:2 (1976), 153–207.

[8] I. Muller, *A thermodynamic theory of mixtures of fluids*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **28** (1968), 1–39.

[9] I. Straskraba, A. Zlotnik, *Global properties of solutions to 1D-viscous compressible barotropic fluid equations with density dependent viscosity*, Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik, **54** (2003), 593–607.

[10] I. Straskraba, A. Zlotnik, *Global behavior of 1d-viscous compressible barotropic fluid with a free boundary and large data*, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, **5** (2003), 119–143.

[11] A.A. Amosov, A.A. Zlotnik, *Uniqueness and stability of generalized solutions of quasi-averaged equations of the one-dimensional motion of a viscous barotropic medium*, Differential Equations, **31**:7 (1995), 1056–1066.

[12] A.A. Zlotnik, N.Z. Bao, *Properties and asymptotic behavior of solutions of some problems of one-dimensional motion of a viscous barotropic gas*, Mathematical Notes, **55** (1994), 471–482.

[13] S. Jiang, *On initial boundary value problems for a viscous, heat-conducting, one-dimensional real gas*, Journal of Differential Equations, **110**:2 (1994), 157–181.

[14] S. Yanagi, *Global existence for one-dimensional motion of non-isentropic viscous fluids*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **16**:9 (1993), 609–624.

[15] D. Hoff, *Global well-posedness of the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations of nonisentropic flow with discontinuous initial data*, Journal of Differential Equations, **95**:1 (1992), 33–74.

[16] V.A. Vaigant, *On the Cauchy problem for the system of equations of a viscous gas*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **102** (1992), 3–10.

[17] A.A. Amosov, A.A. Zlotnik, *Solvability «in the large» of a system of equations of the one-dimensional motion of an inhomogeneous viscous heat-conducting gas*, Mathematical Notes, **52** (1992), 753–763.

[18] A.A. Zlotnik, *On equations for one-dimensional motion of a viscous barotropic gas in the presence of a body force*, Siberian Mathematical Journal, **33** (1992), 798–815.

[19] D. Hoff, *Discontinuous solutions of the Navier-Stokes equations for compressible flow*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **114** (1991), 15–46.

[20] S.N. Antontsev, A.V. Kazhikhov, V.N. Monakhov, *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids*, Studies in Mathematics and its Applications, **22**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.

[21] V.A. Vaigant, *Inhomogeneous boundary value problems for the equations of a viscous heat-conducting gas*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **97** (1990), 3–21.

[22] T. Nagasawa, *On the one-dimensional free boundary problem for the heat-conductive compressible viscous gas*, North-Holland Mathematics Studies, **160** (1989), 83–99.

[23] A.A. Zlotnik, A.A. Amosov, *The generalized solutions «in the large» to the equations for one-dimensional motion of a viscous barotropic gas*, Doklady Mathematics, **37**:2 (1988), 554–558.

[24] V.A. Vaigant, A.A. Papin, *Solvability of the initial-boundary value problem for the equations of a barotropic gas with density-dependent viscosity*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **79** (1987), 3–9.

[25] T. Nagasawa, *On the one-dimensional motion of the polytropic ideal gas non-fixed on the boundary*, Journal of Differential Equations, **65**:1 (1986), 49–67.

[26] B. Kawohl, *Global existence of large solutions to initial boundary value problems for a viscous, heat-conducting, one-dimensional real gas*, Journal of Differential Equations, **58**:1 (1985), 76–103.

[27] M. Okada, S. Kawashima, *On the equations of one-dimensional motion of compressible viscous fluids*, Journal of Mathematics of Kyoto University, **23**:1 (1983), 55–71.

[28] S.Ya. Belov, *On the flow problem for the system of equations of one-dimensional motion of a viscous heat-conducting gas*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **56** (1982), 22–43.

[29] A.V. Kazhikhov, *Cauchy problem for viscous gas equations*, Siberian Mathematical Journal, **23** (1982), 44–49.

[30] S. Kawashima, T. Nishida, *Global solutions to the initial value problems for the equations of one-dimensional motion of viscous polytropic gases*, Journal of Mathematics of Kyoto University, **21**:4 (1981), 825–837.

[31] A. Matsumura, T. Nishida, *The initial value problem for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids*, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, **55**:9 (1979), 337–342.

[32] V.V. Shelukhin, *Periodic flows of viscous gas*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **42** (1979), 80–102.

[33] A.V. Kazhikhov, *On the global solvability of one-dimensional boundary value problems for the equations of a viscous heat-conducting gas*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **24** (1976), 45–61.

[34] A.V. Kazhikhov, *Correctness «in general» of mixed boundary value problems for a model system of equations of a viscous gas*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **21** (1975), 18–47.

[35] D.A. Prokudin, *Unique solvability of initial-boundary value problem for a model system of equations for the polytropic motion of a mixture of viscous compressible fluids*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 568–585.

[36] D.A. Prokudin, *Global solvability of the initial boundary value problem for a model system of one-dimensional equations of polytropic flows of viscous compressible fluid mixtures*, Journal of Physics: Conference Series, **894** (2017), 012076, 6 pp.

[37] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Asymptotic behavior of the solution to the initial-boundary value problem for one-dimensional motions of a barotropic compressible viscous multifluid*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **45** (2024), 1463–1471.

[38] D.A. Prokudin *On the stabilization of the solution to the initial boundary value problem for one-dimensional isothermal equations of viscous compressible multicomponent media dynamics*, Mathematics, **11**:14 (2023), 3065, 11 pp.

[39] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Global unique solvability of an initial-boundary value problem for the one-dimensional barotropic equations of binary mixtures of viscous compressible fluids*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **15** (2021), 50–61.

[40] D.A. Prokudin, *On the stabilization of solutions to the initial-boundary value problem for the equations of dynamics of viscous compressible multicomponent media*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **18**:2 (2021), 1278–1285.

[41] S. Li, *On one-dimensional compressible Navier-Stokes equations for a reacting mixture in unbounded domains*, Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik, **68** (2017), 106, 24 pp.

[42] D. Bresch, X. Huang, J. Li, *Global weak solutions to one-dimensional non-conservative viscous compressible two-phase system*, Communications in Mathematical Physics, **309** (2012), 737–755.

[43] A.A. Papin, *On the uniqueness of the solutions of an initial boundary-value problem for the system of a heat-conducting two-phase mixture*, Mathematical Notes, **87** (2010), 594–598.

[44] A.A. Zlotnik, *Weak solutions to the equations of motion of viscous compressible reacting binary mixtures: uniqueness and Lipschitz-continuous dependence on data*, Mathematical Notes, **75** (2004), 278–283.

[45] A.A. Zlotnik, *Uniform estimates and stabilization of solutions to equations of one-dimensional motion of a multicomponent barotropic mixture*, Mathematical Notes, **58** (1995), 885–889.

[46] A.N. Petrov, *Well-posedness of initial-boundary value problems for one-dimensional equations of mutually penetrating flows of ideal gases*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **56** (1982), 105–121.

[47] A.V. Kazhikov, A.N. Petrov, *Well-posedness of the initial-boundary value problem for a model system of equations of a multicomponent mixture*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **35** (1978), 61–73.

[48] R.J. DiPerna, P.L. Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Inventiones Mathematicae, **98** (1989), 511–547.

[49] A. Novotny, I. Straskraba, *Introduction to the Mathematical Theory of Compressible Flow*, Oxford University Press, Oxford, 2004.

Victoria Yurievna Nogovishcheva
Novosibirsk State University,
st. Pirogova, 1,
630090, Novosibirsk, Russia
*Email address*: v.nogovishcheva@g.nsu.ru

Dmitriy Alexeyevich Prokudin
Novosibirsk State University,
st. Pirogova, 1,
630090, Novosibirsk, Russia
*Email address*: prokudin@hydro.nsc.ru