

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ  
НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ  
ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ  
СЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ  
МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ

В.Ю. НОГОВИЩЕВА  AND Д.А. ПРОКУДИН 

*Представлено П.П. ПЕТРОВЫМ*

**Abstract:** An initial boundary value problem for one-dimensional equations of the dynamics of compressible viscous multicomponent media in the isothermal case is considered. A theorem of the existence and uniqueness of a strong solution to the problem is proved without restrictions on the structure of the viscosity matrix, except for the standard requirements of symmetry and positive certainty.

**Keywords:** existence and uniqueness theorem, unsteady initial boundary value problem, compressible viscous fluid, multicomponent flow.

---

NOGOVISHCHEVA, V.YU., PROKUDIN, D.A., UNIQUE SOLVABILITY OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE-DIMENSIONAL EQUATIONS OF THE DYNAMICS OF COMPRESSIBLE VISCOUS MULTICOMPONENT MEDIA.

© 2024 НОГОВИЩЕВА В.Ю., ПРОКУДИН Д.А.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2022-282 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

*Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.*

## 1 Постановка начально-краевой задачи и формулировка основного результата

В работе проводится анализ существования и единственности решения начально-краевой задачи для одномерных уравнений динамики сжимаемой вязкой многокомпонентной среды (смеси) в изотермическом случае (по поводу происхождения модели и ее физического смысла см. [1, 2, 3]). В замыкании  $\bar{Q}_T$  области  $Q_T = (0, T) \times (0, 1)$  ( $T \in \mathbb{R}_+$ ) требуется найти плотность смеси  $\rho(t, x) > 0$  и скорости  $u_i(t, x)$  для каждой компоненты с номером  $i = 1, \dots, N$  ( $N \in \mathbb{N}$ ,  $N \geq 2$ ), удовлетворяющие следующей системе уравнений, начальных и краевых условий:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad v = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j, \quad \alpha_j = \text{const} \in (0, 1), \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho v \frac{\partial u_i}{\partial x} + \alpha_i R \frac{\partial \rho}{\partial x} = \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad i = 1, \dots, N, \quad R \in \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad u_i|_{t=0} = u_{0i}(x), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

$$u_i|_{x=0} = u_i|_{x=1} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Здесь  $v$  — средневзвешенная скорость смеси, числовые коэффициенты вязкостей  $\nu_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  образуют симметричную матрицу вязкостей  $\mathbf{N} > 0$ , функции начальных данных  $\rho_0(x)$ ,  $u_{0i}(x)$ ,  $i = 1, \dots, N$  заданы.

Исследуемая система представляет собой некоторое обобщение известной системы уравнений Навье-Стокса динамики сжимаемой вязкой однокомпонентной жидкости (газа) на многокомпонентный случай. Одной из характерных ее особенностей является наличие стрших производных (производных второго порядка) от скоростей всех компонент в уравнениях (2). В отличие от однокомпонентного случая, когда вязкость является скаляром, в многокомпонентном случае коэффициенты вязкостей  $\nu_{ij}$  образуют матрицу вязкостей  $\mathbf{N}$ , элементы которой отвечают за вязкое трение [1, 2, 4, 5, 6, 7, 8]. Диагональные элементы матрицы  $\mathbf{N}$  отвечают за вязкое трение внутри каждой компоненты, а недиагональные элементы отвечают за вязкое трение между компонентами. Если матрица вязкостей диагональна, то уравнения (2) будут связаны только через младшие члены и тогда результаты известные для уравнений Навье-Стокса [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34] автоматически переносятся на многокомпонентный случай. В работе рассматривается более сложная ситуация недиагональной и нетреугольной матрицы вязкостей  $\mathbf{N}$ . Вследствие этого, результаты известные для уравнений Навье-Стокса автоматически не переносятся на уравнения (1), (2). Целью работы является доказательство существования и единственности решения задачи (1)–(4) без каких-либо упрощающих предположений о структуре

матрицы  $\mathbf{N}$ , кроме стандартных физических требований симметричности и положительной определенности. Вопросы однозначной разрешимости для уравнений (1), (2) в политропном случае изучались в работах [35, 36], для родственных моделей многокомпонентных сред — в работах [37, 38, 39, 40, 41, 42, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49].

**Определение 1.** *Сильным решением задачи (1)–(4) называется совокупность функций  $(\rho, u_1, \dots, u_N)$  таких, что  $(i = 1, \dots, N)$*

$$\begin{aligned} \rho > 0, \quad \rho \in L_\infty(0, T; W_2^1(0, 1)), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \in L_\infty(0, T; L_2(0, 1)), \\ u_i \in L_\infty(0, T; W_2^1(0, 1)) \cap L_2(0, T; W_2^2(0, 1)), \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} \in L_2(Q_T), \end{aligned} \quad (5)$$

уравнения (1), (2) выполнены почти всюду в  $Q_T$ , начальные условия (3) — для почти всех  $x \in (0, 1)$ , а краевые условия (4) — для почти всех  $t \in (0, T)$ .

Основной результат работы формулируется в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть начальные данные в (3) удовлетворяют условиям*

$$\rho_0 > 0, \quad \rho_0 \in W_2^1(0, 1), \quad u_{0i} \in W_2^1(0, 1), \quad i = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Тогда существует единственное сильное решение задачи (1)–(4).

**Доказательство** Теоремы 1 состоит из нескольких этапов и проведено в Разделах 2–6 настоящей работы. В Разделе 2 проведено исследование разрешимости приближенной начально-краевой задачи, полученной из исходной задачи применением метода Галёркина по переменной  $x$  в уравнениях (2). В Разделе 3 выводятся равномерные по параметру приближения оценки решений приближенной задачи, на основе которых в Разделе 4 совершается предельный переход и обосновывается существование решения начально-краевой задачи (1)–(4) в малом по времени. Для продолжения локального решения, в Разделе 5 выводятся оценки, постоянные в которых не зависят от промежутка существования локального решения. Наконец, в Разделе 6 доказывается единственность решения начально-краевой задачи (1)–(4) и завершается доказательство Теоремы 1.

## 2 Конструкция приближенных решений

В данном разделе докажем локальную по времени разрешимость начально-краевой задачи, полученной из задачи (1)–(4) применением метода Галёркина по переменной  $x$  в уравнениях (2).

**Лемма 1.** *В предположениях Теоремы 1 для любого  $t \in \mathbb{N}$  найдется интервал времени  $(0, t_m) \subset (0, T)$ , на котором существует решение*

задачи<sup>1</sup> ( $i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, m$ )

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad v = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j, \quad (7)$$

$$\int_0^1 \left( \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho v \frac{\partial u_i}{\partial x} + \alpha_i R \frac{\partial \rho}{\partial x} - \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) \sin(\pi k x) dx = 0, \quad (8)$$

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad (9)$$

$$u_i = \sum_{s=1}^m \theta_{is}(t) \sin(\pi s x), \quad u_i|_{t=0} = \sum_{s=1}^m \theta_{0is} \sin(\pi s x), \quad (10)$$

где  $\theta_{ik}(0) = \theta_{0ik} = 2 \int_0^1 u_{0i}(x) \sin(\pi k x) dx$ , при этом

$$\rho > 0, \quad \rho \in L_\infty(0, t_m; W_2^1(0, 1)) \cap W_\infty^1(0, t_m; L_2(0, 1)), \quad (11)$$

$$u_i \in C^{1,\infty}([0, t_m] \times [0, 1]).$$

**Доказательство.** Зафиксируем пока произвольно  $t_m \in (0, T]$ . В пространстве  $(C[0, t_m])^{mN}$  рассмотрим множество

$$B = \left\{ \boldsymbol{\theta} \in (C[0, t_m])^{mN} \mid \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0, \quad \|\boldsymbol{\theta}\|_{(C[0, t_m])^{mN}} \leq b \right\},$$

где

$$\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_N), \quad \boldsymbol{\theta}_i = (\theta_{i1}, \dots, \theta_{im}), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\boldsymbol{\theta}_0 = (\boldsymbol{\theta}_{01}, \dots, \boldsymbol{\theta}_{0N}), \quad \boldsymbol{\theta}_{0i} = (\theta_{0i1}, \dots, \theta_{0im}), \quad i = 1, \dots, N,$$

$$b^2 = e^{\frac{\sup_{[0,1]} \rho_0}{\inf_{[0,1]} \rho_0}} \|\boldsymbol{\theta}_0\|_{\mathbb{R}^{mN}}^2 + 1.$$

Построим оператор  $F : B \rightarrow (C[0, t_m])^{mN}$ ,  $\text{Im } F \subset (C^1[0, t_m])^{mN}$ ,  $F(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\Theta}$ , где  $\boldsymbol{\Theta} = (\boldsymbol{\Theta}_1, \dots, \boldsymbol{\Theta}_N)$ ,  $\boldsymbol{\Theta}_i = (\Theta_{i1}, \dots, \Theta_{im})$ ,  $i = 1, \dots, N$  следующим образом. Сначала найдем функцию

$$\rho > 0, \quad \rho \in L_\infty(0, t_m; W_2^1(0, 1)) \cap W_\infty^1(0, t_m; L_2(0, 1)),$$

<sup>1</sup>До начала Раздела 4 будем опускать индекс  $m$  у величин зависящих от него, кроме величин  $t_m$ .

как решение задачи Коши (7), (9), где  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , задаются по формулам (10) (см. [50]). При этом справедливы неравенства

$$\rho(t, x) \geq \left( \inf_{[0,1]} \rho_0 \right) \exp \left\{ - \sum_{i=1}^N \int_0^t \sup_{[0,1]} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x} \right| d\tau \right\}, \quad (12)$$

$$\rho(t, x) \leq \left( \sup_{[0,1]} \rho_0 \right) \exp \left\{ \sum_{i=1}^N \int_0^t \sup_{[0,1]} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x} \right| d\tau \right\},$$

которые, в силу включения  $\theta \in B$ , дают оценки

$$\left( \inf_{[0,1]} \rho_0 \right) \exp \{ -N\pi m^2 bt \} \leq \rho(t, x) \leq \left( \sup_{[0,1]} \rho_0 \right) \exp \{ N\pi m^2 bt \}. \quad (13)$$

Далее определим функцию  $\Theta$  как решение следующей задачи Коши для системы  $mN$  линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\int_0^1 \left( \rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j \right) \frac{\partial U_i}{\partial x} + \alpha_i R \frac{\partial \rho}{\partial x} - \right. \quad (14)$$

$$\left. - \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} \right) \sin(\pi kx) dx = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, m,$$

$$\Theta(0) = \theta_0, \quad (15)$$

где  $U_i = \sum_{s=1}^m \Theta_{is}(t) \sin(\pi sx)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Неравенство  $\det A \neq 0$ , где

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_N(t) \end{pmatrix},$$

$$A_i(t) = \left\{ \int_0^1 \rho(t, x) \sin(\pi kx) \sin(\pi sx) dx \right\}_{k,s=1}^m, \quad i = 1, \dots, N,$$

выполненное в силу положительности  $\rho$ , позволяет разрешить систему (14) относительно производных, что обосновывает существование функции  $\Theta \in (C^1[0, t_m])^{mN}$ . Таким образом, для произвольного  $t_m \in (0, T]$  определен оператор

$$F : B \rightarrow (C^1[0, t_m])^{mN} \subset (C[0, t_m])^{mN}, \quad F(\theta) = \Theta,$$

неподвижная точка которого (если она существует), вместе с соответствующей функцией  $\rho$ , дает решение задачи (7)–(10).

Покажем, что при достаточно малом  $t_m$  оператор  $F$  удовлетворяет условиям теоремы Шаудера (см., например, [20], стр. 31).

Установим сначала, что  $F(B) \subset B$ . Для этого умножим уравнения (14) на  $\Theta_{ik}(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $k = 1, \dots, m$ , а затем просуммируем по  $i = 1, \dots, N$ ,  $k = 1, \dots, m$ , получим с учетом (7), что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho U_i^2 dx \right) + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial U_j}{\partial x} \right) dx = \\ = R \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^1 \rho \frac{\partial U_i}{\partial x} dx, \end{aligned} \quad (16)$$

откуда, в силу неравенств

$$\sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial U_j}{\partial x} \right) dx \geq C_1(\mathbf{N}) \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx,$$

$$R \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^1 \rho \frac{\partial U_i}{\partial x} dx \leq \frac{C_1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx + C_2,$$

где  $C_2 = \frac{R^2 N}{2C_1} \left( \sup_{[0,1]} \rho_0 \right)^2 \exp \{2N\pi m^2 b t_m\}$ , получаем оценку

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho U_i^2 dx \right) + C_1 \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx \leq 2C_2,$$

из которой, в свою очередь, следует, что

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho U_i^2 dx \leq \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_0 U_{0i}^2 dx + 2C_2 t_m, \quad (17)$$

где  $U_{0i} = \sum_{s=1}^m \Theta_{is}(0) \sin(\pi s x) = \sum_{s=1}^m \theta_{0is} \sin(\pi s x)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Еще раз привлекая (13), получаем из (17) неравенство

$$\begin{aligned} \|\Theta\|_{(C[0,t_m])^{mN}}^2 \leq \exp \{N\pi m^2 b t_m\} \frac{\sup_{[0,1]} \rho_0}{\inf_{[0,1]} \rho_0} \|\theta_0\|_{\mathbb{R}^{mN}}^2 + \\ + \exp \{N\pi m^2 b t_m\} \frac{4C_2}{\inf_{[0,1]} \rho_0} t_m. \end{aligned} \quad (18)$$

Выбирая

$$t_m < \min \left\{ T, \frac{1}{N\pi m^2 b}, \frac{\inf_{[0,1]} \rho_0}{4eC_3} \right\}, \quad (19)$$

где  $C_3 = \frac{R^2 N e^2}{2C_1} \left( \sup_{[0,1]} \rho_0 \right)^2$ , получим, что  $C_2 \leq C_3$ , и придем к нужной оценке

$$\|\Theta\|_{(C[0,t_m])^{mN}} \leq b.$$

Таким образом, при выполнении (19), оператор  $F$  отображает множество  $B$  в себя.

Докажем теперь компактность оператора  $F$ . Умножая (14) на  $\frac{d\Theta_{ik}(t)}{dt}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $k = 1, \dots, m$ , а затем суммируя по  $i = 1, \dots, N$ ,  $k = 1, \dots, m$ , выводим соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx &= \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left( - \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \left( \frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x} \right) \left( \frac{\partial U_j}{\partial x} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \rho \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j \right) \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} \right) + \alpha_i R \rho \left( \frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x} \right) \right) dx \end{aligned} \quad (20)$$

Произведем оценки слагаемых в правой части (20) с помощью (13), неравенства Коши и неравенств  $\|\theta\|_{(C[0,t_m])^{mN}} \leq b$ ,  $\|\Theta\|_{(C[0,t_m])^{mN}} \leq b$ ,  $\left\| \frac{\partial U_i}{\partial x} \right\|_{L_2(0,1)} \leq C_4(m) \|U_i\|_{L_2(0,1)}$ ,  $\left\| \frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x} \right\|_{L_2(0,1)} \leq C_4 \left\| \frac{\partial U_i}{\partial t} \right\|_{L_2(0,1)}$ ,  $i = 1, \dots, N$ :

$$\left| \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x} \right) \left( \frac{\partial U_j}{\partial x} \right) dx \right| \leq \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx + C_5,$$

$$\left| \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j \right) \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} \right) dx \right| \leq \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx + C_6,$$

$$\left| \sum_{i=1}^N \int_0^1 \alpha_i R \rho \left( \frac{\partial^2 U_i}{\partial t \partial x} \right) dx \right| \leq \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx + C_7,$$

где  $C_5 = C_5 \left( C_4, \inf_{[0,1]} \rho_0, \mathbf{N}, N, b, m, t_m \right)$ ,  $C_6 = C_6 \left( C_4, \sup_{[0,1]} \rho_0, N, b, m, t_m \right)$ ,

$C_7 = C_7 \left( C_4, \inf_{[0,1]} \rho_0, \sup_{[0,1]} \rho_0, N, b, m, t_m, R \right)$ . Поэтому из (20) получаем

неравенство

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} \right)^2 dx \leq C_5 + C_6 + C_7, \quad (21)$$

интегрируя которое по времени и применяя (13), выводим оценку

$$\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial U_i}{\partial t} \right\|_{L_2(Q_{t_m})}^2 \leq C_8 \left( C_5, C_6, C_7, \inf_{[0,1]} \rho_0, N, b, m, t_m \right), \quad (22)$$

где  $Q(t_m) = (0, t_m) \times (0, 1)$ . Таким образом, получена оценка  $\Theta$  в  $(W_2^1(0, t_m))^{mN}$ . Следовательно,  $F$  является компактным оператором.

Установим теперь непрерывность оператора  $F$  из  $B$  в  $(C[0, t_m])^{mN}$ .

Пусть  $\theta^{(1,2)} \in B$ ,  $\Theta^{(1,2)} = F(\theta^{(1,2)})$ ,  $u_i^{(1,2)} = \sum_{s=1}^m \theta_{is}^{(1,2)} \sin(\pi s x)$ ,

$U_i^{(1,2)} = \sum_{s=1}^m \Theta_{is}^{(1,2)} \sin(\pi s x)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Далее, пусть  $\rho^{(1,2)}$  — решения

задач Коши (7), (9), где вместо  $v$  стоит  $v^{(1,2)} = \sum_{i=1}^N \alpha_i u_i^{(1,2)}$  соответствен-

но. Обозначим  $u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$ ,  $U_i = U_i^{(1)} - U_i^{(2)}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $\rho = \rho^{(1)} - \rho^{(2)}$ ,  $v = v^{(1)} - v^{(2)}$ . Дифференцируя по переменной  $x$  уравнения (7) для  $\rho^{(1,2)}$

(т. е. уравнения  $\frac{\partial \rho^{(1,2)}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho^{(1,2)} v^{(1,2)})}{\partial x} = 0$ ), умножая на  $\frac{\partial \rho^{(1,2)}}{\partial x}$ , интегрируя по  $x$  и  $t$ , используя начальные условия

$$\rho^{(1,2)}|_{t=0} = \rho_0 \quad (23)$$

и неравенства (13) для  $\rho^{(1,2)}$  и Гропуолла, получаем оценки

$$\left\| \frac{\partial \rho^{(1,2)}}{\partial x} \right\|_{L_2(0,1)} \leq C_9 \left( \|\rho_0\|_{W_2^1(0,1)}, b, m, t_m, N \right). \quad (24)$$

Заметим далее, что из (7), (9) для  $\rho^{(1,2)}$  следуют равенства

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v^{(1)})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho^{(2)} v)}{\partial x} = 0, \quad \rho|_{t=0} = 0. \quad (25)$$

Умножая первое равенство в (25) на  $\rho$  и интегрируя по  $x$  получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_0^1 \rho^2 dx \right) &= - \int_0^1 \left( \frac{1}{2} \rho^2 \frac{\partial (v^{(1)})}{\partial x} + \rho^{(2)} \rho \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x} \right) dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \sup_{[0,1]} \left| \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} \right| \int_0^1 \rho^2 dx + \sup_{[0,1]} \rho^{(2)} \int_0^1 \left( \rho^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) dx + \right. \end{aligned} \quad (26)$$

$$+ \sup_{[0,1]} v^2 \int_0^1 \left( \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^1 \rho^2 dx \leq C_{10} \left( \int_0^1 \rho^2 dx + \sum_{j=1}^N \int_0^1 u_j^2 dx \right),$$

где  $C_{10} = C_{10} \left( C_9, \sup_{[0,1]} \rho_0, b, m, t_m, N \right)$ . Здесь использовались очевидные соотношения

$$\sum_{j=1}^N \int_0^1 u_j^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^m \theta_{js}^2(t), \quad \sup_{[0,1]} v^2 \leq \sum_{i,j=1}^N \sum_{s,l=1}^m |\theta_{il}(t)| |\theta_{js}(t)|, \quad (27)$$

$$\int_0^1 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{2} \sum_{i,j=1}^N \alpha_i \alpha_j \sum_{s=1}^m s^2 \theta_{is}(t) \theta_{js}(t).$$

Из (26), применяя неравенство Гронуолла и учитывая начальное условие в (25), выводим неравенство

$$\int_0^1 \rho^2 dx \leq C_{11}(C_{10}, t_m) \sum_{j=1}^N \int_{Q_t} u_j^2 dx d\tau, \quad (28)$$

где  $Q_t = (0, t) \times (0, 1)$ . Далее, из уравнений (14) для  $U_i^{(1,2)}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , ввиду (7) для  $\rho^{(1,2)}$ , следует соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho^{(1)} U_i^2 dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_{Q_t} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial U_j}{\partial x} \right) dx d\tau = \\ & = R \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_{Q_t} \rho \frac{\partial U_i}{\partial x} dx d\tau - \sum_{i=1}^N \int_{Q_t} \rho U_i \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial t} dx d\tau - \\ & - \sum_{i=1}^N \int_{Q_t} \rho^{(1)} v U_i \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x} dx d\tau - \sum_{i=1}^N \int_{Q_t} \rho v^{(2)} U_i \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x} dx d\tau. \end{aligned} \quad (29)$$

Первое слагаемое в левой части (29), ввиду (13) для  $\rho^{(1,2)}$ , допускает оценку

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho^{(1)} U_i^2 dx \geq \frac{1}{2} \inf_{[0,1]} \rho_0 \exp \{ -N\pi m^2 b t_m \} \sum_{i=1}^N \int_0^1 U_i^2 dx. \quad (30)$$

Для второго слагаемого в левой части (29) имеем неравенство

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{Q_t} \nu_{ij} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial U_j}{\partial x} \right) dx d\tau \geq C_1 \sum_{i=1}^N \int_{Q_t} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx d\tau. \quad (31)$$

Для первого слагаемого в правой части (29) верно, что

$$\begin{aligned}
 R \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_{Q_t} \rho \frac{\partial U_i}{\partial x} dx d\tau &\leq \frac{C_1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{Q_t} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x} \right)^2 dx d\tau + \\
 &+ C_{12} (C_1, C_{11}, R, N, t_m) \sum_{i=1}^N \int_{Q_t} u_i^2 dx d\tau.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Для второго слагаемого в правой части (29) получаем

$$\begin{aligned}
 - \sum_{i=1}^N \int_{Q_t} \rho U_i \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial \tau} dx d\tau &\leq \frac{\varepsilon}{2} \left( \sum_{j=1}^N \sup_{Q_t} U_j^2 \right) \left( \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial \tau} \right\|_{L_2(Q_t)}^2 \right) + \\
 &+ \frac{C_{11} N t_m}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^N \int_{Q_t} u_i^2 dx d\tau \leq \varepsilon m C_8 \sum_{i=1}^N \sup_{[0,t]} \int_0^1 U_i^2 dx + \\
 &+ \frac{C_{11} N t_m}{2\varepsilon} \sum_{i=1}^N \int_{Q_t} u_i^2 dx d\tau.
 \end{aligned}$$

Возьмем здесь

$$\varepsilon = \frac{1}{4NmC_8} \inf_{[0,1]} \rho_0 \exp \{ -N\pi m^2 b t_m \},$$

тогда

$$\begin{aligned}
 - \sum_{i=1}^N \int_{Q_t} \rho U_i \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial \tau} dx d\tau &\leq C_{13} \sum_{i=1}^N \int_{Q_t} u_i^2 dx d\tau + \\
 &+ \frac{1}{4N} \inf_{[0,1]} \rho_0 \exp \{ -N\pi m^2 b t_m \} \sum_{i=1}^N \sup_{[0,t]} \int_0^1 U_i^2 dx,
 \end{aligned}$$

где  $C_{13} = C_{13} \left( C_8, C_{11}, \inf_{[0,1]} \rho_0, N, b, m, t_m \right)$ . Третье слагаемое в правой части (29) оценим следующим образом:

$$\begin{aligned}
 - \sum_{i=1}^N \int_{Q_t} \rho^{(1)} v U_i \left( \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx d\tau &\leq C_{14} \left( \sum_{i=1}^N \int_{Q_t} u_i^2 dx d\tau + \right. \\
 &\left. + \sum_{i=1}^N \int_{Q_t} U_i^2 dx d\tau \right),
 \end{aligned} \tag{33}$$

где  $C_{14} = C_{14} \left( \sup_{[0,1]} \rho_0, N, b, m, t_m \right)$ . Наконец, для последнего слагаемого в правой части (29) получаем соотношение

$$-\sum_{i=1}^N \int_{\dot{Q}_t} \rho v^{(2)} U_i \left( \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx d\tau \leq C_{15} \left( \sum_{i=1}^N \int_{\dot{Q}_t} u_i^2 dx d\tau + \sum_{i=1}^N \int_{\dot{Q}_t} U_i^2 dx d\tau \right), \quad (34)$$

где  $C_{15} = C_{15}(C_{11}, N, b, m, t_m)$ . Таким образом, из (29), с учетом (30)–(34), следует неравенство

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 U_i^2 dx \leq C_{16} \left( \sum_{i=1}^N \int_{\dot{Q}_t} u_i^2 dx d\tau + \sum_{i=1}^N \int_{\dot{Q}_t} U_i^2 dx d\tau \right), \quad (35)$$

где  $C_{16} = C_{16} \left( C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, \inf_{[0,1]} \rho_0, N, b, m, t_m \right)$ , из которого, пользуясь неравенством Гронуолла, получаем оценку

$$\sum_{i=1}^N \|U_i\|_{L_2(0,1)}^2 \leq C_{17}(C_{16}, t_m) \sum_{i=1}^N \|u_i\|_{L_2(Q_{t_m})}^2, \quad (36)$$

а отсюда — неравенство

$$\|\Theta^{(1)} - \Theta^{(2)}\|_{(C[0,t_m])^{mN}} \leq C_{18}(C_{17}, t_m) \|\theta^{(1)} - \theta^{(2)}\|_{(C[0,t_m])^{mN}}, \quad (37)$$

обосновывающее непрерывность оператора  $F$  на  $B$ .

Поскольку оператор  $F$  удовлетворяет условиям теоремы Шаудера, то в  $B$  существует неподвижная точка  $\theta$  оператора  $F$ , определяющая (вместе с соответствующей функцией  $\rho$ ) решение задачи (7)–(10). Лемма 1 доказана.

### 3 Равномерные оценки галеркинских приближений

В данном разделе получим равномерные по параметру  $m$  оценки построенных приближенных решений, которые позволят впоследствии совершить предельный переход при  $m \rightarrow \infty$ .

**Лемма 2.** *В предположениях Теоремы 1 существуют положительные постоянные  $C_{19}$  и  $t_0 \leq T$  (см. (54)) такие, что для любого решения*

$(\rho, u_1, \dots, u_N)$  задачи (7)–(10) справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \left( \|u_i\|_{L_\infty(0, t_0; W_2^1(0,1))} + \|u_i\|_{L_2(0, t_0; W_2^2(0,1))} + \left\| \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\|_{L_2(Q_{t_0})} \right) + \\ & + \|\rho\|_{L_\infty(0, t_0; W_2^1(0,1))} + \left\| \frac{1}{\rho} \right\|_{L_\infty(Q_{t_0})} + \left\| \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\|_{L_\infty(0, t_0; L_2(0,1))} \leq C_{19}, \end{aligned} \quad (38)$$

где  $Q_{t_0} = (0, t_0) \times (0, 1)$ ,

$$C_{19} = C_{19} \left( \left\{ \|u_{0i}\|_{W_2^1(0,1)} \right\}, \|\rho_0\|_{W_2^1(0,1)}, \inf_{[0,1]} \rho_0, \mathbf{N}, R, N, T \right),$$

а  $t_0$  зависит от тех же величин что и  $C_{19}$ .

**Доказательство.** Введем обозначение

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left( \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial \tau} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx d\tau, \quad \alpha'(t) \geq 0. \quad (39)$$

Уравнение (7) влечет выполнение неравенств (12), из которых, в свою очередь, следуют оценки

$$C_{20}^{-1} \exp\{-C_{20}\alpha(t)\} \leq \rho(t, x) \leq C_{20} \exp\{C_{20}\alpha(t)\}, \quad (40)$$

где  $C_{20} = C_{20} \left( \sup_{[0,1]} \rho_0, \inf_{[0,1]} \rho_0, N, T \right)$ . Заметим теперь, что из (7) вытекает равенство

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left( \frac{1}{\rho} \right) + \rho v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (41)$$

из которого получаем

$$\frac{d}{dt} \left( \int_0^1 \rho \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right)^2 dx \right) = 2 \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right) dx. \quad (42)$$

Из (42) следует соотношение

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \rho \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right)^2 dx \leq \int_0^1 \rho_0 \left( \left( \frac{1}{\rho_0} \right)' \right)^2 dx + \\ & + \int_0^t \int_0^1 \rho \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right)^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx d\tau. \end{aligned} \quad (43)$$

**Замечание 1.** При выводе (43) нам потребовалась (в (41), (42)) дополнительная гладкость  $\rho$  по сравнению с (11), хотя само соотношение (43) никаких дополнительных требований не предусматривает. Это означает, что (43) может быть получено путем регуляризации  $\rho_0$ ,

вывода (43) для решений получившихся задач, а затем предельного перехода по параметру регуляризации.

Из (43), пользуясь (39), (40) и неравенством Гронуолла, получаем оценку

$$\int_0^1 \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right)^2 dx + \int_0^1 \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 dx \leq C_{21} \exp\{C_{21}\alpha(t)\}, \quad (44)$$

где  $C_{21} = C_{21} \left( C_{20}, \|\rho_0\|_{W_2^1(0,1)}, \inf_{[0,1]} \rho_0, N, T \right)$ . Далее, умножая (8) на  $\theta'_{ik} + \pi^2 k^2 \theta_{ik}$ , суммируя по  $i = 1, \dots, N$ ,  $k = 1, \dots, m$ , и учитывая (7), (10), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right) dx + \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx \right) = \\ & = \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left( -\rho v \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) - \alpha_i R \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \right. \\ & \left. + \alpha_i R \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) + 2\rho v \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) - \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \right) dx. \end{aligned} \quad (45)$$

Т. к.  $\mathbf{N} > 0$ , то

$$\text{левая часть (45)} \geq C_{22}(C_1)\alpha'(t) + \beta'(t), \quad (46)$$

где

$$\beta(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx.$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в правой части (45). Для первого слагаемого в правой части (45) имеем

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho v \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dx \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^N \|v\|_{C[0,1]} \left\| \sqrt{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\|_{L_2(0,1)} \left\| \sqrt{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right\|_{L_2(0,1)} \leq \\ & \leq \frac{C_{22}}{10} \alpha'(t) + C_{23} \beta^2(t) \exp\{C_{23}\alpha(t)\}, \end{aligned} \quad (47)$$

где  $C_{23} = C_{23}(C_{20}, C_{22}, N)$ . Для второго и третьего слагаемых в правой части (45) получаем соответственно

$$-R \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^1 \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) dx \leq \frac{C_{22}}{10} \alpha'(t) + C_{24} \exp\{C_{24}\alpha(t)\}, \quad (48)$$

$$R \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^1 \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) dx \leq \frac{C_{22}}{10} \alpha'(t) + C_{25} \exp\{C_{25}\alpha(t)\}, \quad (49)$$

где  $C_{24} = C_{24}(C_{20}, C_{21}, C_{22}, R, N)$ ,  $C_{25} = C_{25}(C_{21}, C_{22}, R, N)$ . Для четвертого слагаемого в правой части (45) верно, что

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho v \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right) dx \leq \\ & \leq 2 \sum_{i=1}^N \|v\|_{C[0,1]} \|\sqrt{\rho}\|_{C[0,1]} \left\| \sqrt{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right\|_{L_2(0,1)} \left\| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0,1)} \leq \\ & \leq \frac{C_{22}}{10} \alpha'(t) + C_{26} \beta^2(t) \exp\{C_{26}\alpha(t)\}, \quad C_{26} = C_{26}(C_{20}, C_{22}, N). \end{aligned} \quad (50)$$

Наконец, для последнего слагаемого в правой части (45), с помощью оценок

$$\left\| \frac{\partial u_i}{\partial x} \right\|_{C[0,1]} \leq \sqrt{2} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x} \right\|_{L_2(0,1)}^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0,1)}^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, \dots, N,$$

ВЫВОДИМ

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dx \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x} \right\|_{C[0,1]} \left\| \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \right\|_{L_2(0,1)} \left\| \sqrt{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\|_{L_2(0,1)} \leq \\ & \leq \frac{C_{22}}{10} \alpha'(t) + C_{27} \beta(t) \exp\{C_{27}\alpha(t)\}, \quad C_{27} = C_{27}(C_{20}, C_{21}, C_{22}, N). \end{aligned} \quad (51)$$

Таким образом, из (47)–(51) следует, что

$$\text{правая часть (45)} \leq \frac{C_{22}}{2} \alpha'(t) + C_{28}(1 + \beta^2(t)) \exp\{C_{28}\alpha(t)\}, \quad (52)$$

где  $C_{28} = C_{28}(C_{23}, \dots, C_{27})$ . Объединяя соотношения (46) и (52), получаем из (45) неравенство

$$\frac{C_{22}}{2} \alpha' + \beta' \leq C_{29} \exp \left\{ C_{29} \left( \frac{C_{22}}{2} \alpha + \beta \right) \right\}, \quad C_{29} = C_{29}(C_{22}, C_{28}). \quad (53)$$

Зададим любое  $C_{30} > \beta(0)$  (например,  $C_{30} = 2\beta(0)$ ). Тогда при

$$t_0 = \min \left\{ T, \frac{\exp\{-C_{29}\beta(0)\} - \exp\{-C_{29}C_{30}\}}{C_{29}^2} \right\}, \quad (54)$$

из (53) получаем оценку

$$\sup_{0 \leq t \leq t_0} (\alpha + \beta) \leq \left( 1 + \frac{2}{C_{22}} \right) C_{31}, \quad (55)$$

где  $C_{31} = \frac{1}{C_{29}} \ln \left( \frac{1}{\exp\{-C_{29}\beta(0)\} - C_{29}^2 t_0} \right)$ , которая вместе с (7), (40) и (44) завершает доказательство Леммы 2.

#### 4 Сходимость приближенных решений

В данном разделе, на основании полученных равномерных по параметру  $m$  оценок, совершим предельный переход при  $m \rightarrow \infty$  и покажем, что совокупность предельных функций является сильным решением задачи (1)–(4) в малом по времени.

Построив согласно Лемме 1 решения  $(\rho_m, u_{1m}, \dots, u_{Nm})$  задач (7)–(10) при всех  $m \in \mathbb{N}$ , а затем при необходимости продолжив их на интервал  $(0, t_0)$ , согласно Лемме 2, можно использовать для них оценку (38). На основании этой оценки может быть выделена подпоследовательность (которую обозначим так же; далее эта процедура также будет подразумеваться при необходимости), для которой при  $m \rightarrow \infty$  для всех  $i = 1, \dots, N$  имеют место сходимости

$$\rho_m \rightarrow \rho \quad * \text{-слабо в } L_\infty(0, t_0; W_2^1(0, 1)),$$

$$u_{im} \rightarrow u_i \quad * \text{-слабо в } L_\infty(0, t_0; W_2^1(0, 1)) \text{ и слабо в } L_2(0, t_0; W_2^2(0, 1)).$$

Кроме того, оставшиеся свойства, перечисленные в (5), выполнены для нашей последовательности в  $Q_{t_0}$  равномерно по  $m$ , а значит предельные функции попадают в соответствующие классы. Покажем, что совокупность функций  $(\rho, u_1, \dots, u_N)$  является сильным решением задачи (1)–(4) на  $(0, t_0)$ .

Из равномерных оценок  $\rho_m, u_{im}, i = 1, \dots, N$  в  $L_\infty(0, t_0; W_2^1(0, 1))$  и  $\frac{\partial \rho_m}{\partial t}, \frac{\partial u_{im}}{\partial t}, i = 1, \dots, N$  в  $L_2(Q_{t_0})$  (см. (38)) получаем по теореме Арцела–Асколи ([51], Теорема 1.70, стр. 58) сходимости

$$\rho_m \rightarrow \rho \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ сильно в } C([0, t_0]; L_2(0, 1)), \quad (56)$$

$$u_{im} \rightarrow u_i \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ сильно в } C([0, t_0]; L_2(0, 1)), \quad i = 1, \dots, N. \quad (57)$$

Из ограниченности  $\frac{\partial u_{im}}{\partial t}, i = 1, \dots, N$  в  $L_2(Q_{t_0})$  следуют равномерные оценки  $\frac{\partial^2 u_{im}}{\partial t \partial x}, i = 1, \dots, N$  в  $L_2(0, t_0; W_2^{-1}(0, 1))$ , что вместе с оценками

$\frac{\partial u_{im}}{\partial x}$ ,  $i = 1, \dots, N$  в  $L_2(0, t_0; W_2^1(0, 1))$  приводит, по теореме Лионса–Обена ([51], Теорема 1.71, стр. 59), к сходимостям

$$\frac{\partial u_{im}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x} \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ сильно в } L_2(Q_{t_0}), \quad i = 1, \dots, N. \quad (58)$$

Отсюда и из (57) следуют соотношения

$$u_{im} \rightarrow u_i \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ сильно в } L_2(0, t_0; C[0, 1]), \quad i = 1, \dots, N. \quad (59)$$

Таким образом, предельные функции  $\rho$ ,  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , удовлетворяют уравнениям неразрывности (1) с  $v = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j$  почти всюду в  $Q_{t_0}$ , начальным условиям (3) — для почти всех  $x \in (0, 1)$  и граничным условиям (4) — для почти всех  $t \in (0, t_0)$ .

Из ограниченности  $\frac{\partial u_{im}}{\partial t}$ ,  $i = 1, \dots, N$  в  $L_2(Q_{t_0})$  следуют слабые сходимости  $\frac{\partial u_{im}}{\partial t}$  к  $\frac{\partial u_i}{\partial t}$  в  $L_2(Q_{t_0})$ ,  $i = 1, \dots, N$ , что вместе с (56) и ограниченностью  $\rho_m \frac{\partial u_{im}}{\partial t}$ ,  $i = 1, \dots, N$  в  $L_2(Q_{t_0})$ , влечет слабые сходимости  $\rho_m \frac{\partial u_{im}}{\partial t}$  к  $\rho \frac{\partial u_i}{\partial t}$  в  $L_2(Q_{t_0})$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Далее, из (56) и (58) следует, что при всех  $i = 1, \dots, N$

$$\rho_m \frac{\partial u_{im}}{\partial x} \rightarrow \rho \frac{\partial u_i}{\partial x} \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ сильно в } L_2(0, t_0; L_1(0, 1)), \quad (60)$$

откуда и из (59) получаем для всех  $i, j = 1, \dots, N$  сходимости

$$\left( \rho_m \frac{\partial u_{im}}{\partial x} \right) u_{jm} \rightarrow \left( \rho \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) u_j \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ сильно в } L_1(Q_{t_0}). \quad (61)$$

Из (8) следует, что для любых функций вида ( $i = 1, \dots, N$ )

$$\varphi_i = \sum_{s=1}^M \eta_{is}(t) \sin(\pi s x), \quad \eta_{is} \in C[0, t_0], \quad k = 1, \dots, M, \quad M \leq m, \quad (62)$$

выполнены для всех равенства

$$\int_{Q_{t_0}} \left( \rho_m \frac{\partial u_{im}}{\partial t} + \rho_m v_m \frac{\partial u_{im}}{\partial x} + \alpha_i R \frac{\partial \rho_m}{\partial x} - \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_{jm}}{\partial x^2} \right) \varphi_i dx dt = 0, \quad v_m = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_{jm}, \quad (63)$$

переходя в которых (благодаря полученным выше сходимостям) к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , получаем (поскольку множество функций вида (62) всюду плотно в  $L_2(Q_{t_0})$ ) справедливость уравнений баланса импульсов

(2) для предельных функций  $\rho$ ,  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  почти всюду в  $Q_{t_0}$ . Таким образом, доказано существование сильного решения задачи (1)–(4) в малом по времени.

## 5 Глобальные априорные оценки

В данном разделе, чтобы продолжить решение задачи (1)–(4) с интервала  $(0, t_0)$  на весь рассматриваемый интервал  $(0, T)$ , получим для него априорные оценки, константы в которых зависят лишь от данных задачи и от величины  $T$ , но не от малого параметра  $t_0$  (см., например, [20], стр. 40).

При выводе оценок далее, иногда будет удобно пользоваться массовыми лагранжевыми координатами. Возьмем за новые независимые пере-

менные  $t$  и  $y(t, x) = \int_0^x \rho(t, s) ds$ . Тогда уравнения (1), (2) примут вид

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \tilde{\rho}^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0, \quad \tilde{v} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \tilde{u}_j, \quad (64)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \alpha_i R \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} = \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y} \right). \quad (65)$$

Область  $Q_T$  при таком переходе отображается в область

$P_T = (0, T) \times (0, d)$ , где  $d = \int_0^1 \rho_0(x) dx$ ,  $\rho_0 = \sum_{j=1}^N \rho_{0j}$ , начальные и краевые

условия (3), (4) преобразуются к виду

$$\tilde{\rho}|_{t=0} = \tilde{\rho}_0(y), \quad \tilde{u}_i|_{t=0} = \tilde{u}_{0i}(y), \quad i = 1, \dots, N, \quad (66)$$

$$\tilde{u}_i|_{y=0} = \tilde{u}_i|_{y=d} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (67)$$

Приступим к выводу априорных оценок.

**Лемма 3.** *В предположениях Теоремы 1 существует положительная постоянная  $C_{32}$  такая, что*

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho u_i^2 dx + \int_0^1 (\rho \ln \rho - (\ln d + 1)\rho + d) dx + \\ & + \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx dt \leq C_{32}, \end{aligned} \quad (68)$$

где  $C_{32} = C_{32} \left( \sup_{(0,1)} \rho_0, \{ \|u_{0i}\|_{L_2(0,1)} \}, N, d, N, R \right)$ .

**Доказательство.** Умножим уравнения (2) на  $u_i$ , проинтегрируем по  $x$  и просуммируем по  $i = 1, \dots, N$ . Учитывая, что в силу (1), (4) и условия  $\mathbf{N} > 0$ , имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left( \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \nu u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dx &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho u_i^2 dx \right), \\ R \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^1 u_i \frac{\partial \rho}{\partial x} dx &= R \frac{d}{dt} \left( \int_0^1 (\rho \ln \rho - (\ln d + 1)\rho + d) dx \right), \\ \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} dx &= - \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx \leq \\ &\leq -C_1 \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx, \end{aligned} \tag{69}$$

получим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho u_i^2 dx \right) + R \frac{d}{dt} \left( \int_0^1 (\rho \ln \rho - (\ln d + 1)\rho + d) dx \right) + \\ + C_1 \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx \leq 0. \end{aligned} \tag{70}$$

Неравенство (70) проинтегрируем по  $t$ , используя (3), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho u_i^2 dx + R \int_0^1 (\rho \ln \rho - (\ln d + 1)\rho + d) dx + \\ + C_1 \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx d\tau \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho_0 u_{0i}^2 dx + \\ + R \int_0^1 (\rho_0 \ln \rho_0 - (\ln d + 1)\rho_0 + d) dx. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует оценка (68). Лемма 3 доказана.

**Замечание 2.** Оценка (68) в массовых лагранжеских координатах имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^d \tilde{u}_i^2 dy + \int_0^d \frac{(\tilde{\rho} \ln \tilde{\rho} - (\ln d + 1)\tilde{\rho} + d)}{\tilde{\rho}} dy + \\ & + \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_0^d \tilde{\rho} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y} \right)^2 dy dt \leq C_{32}. \end{aligned} \quad (71)$$

**Замечание 3.** Из оценки (68) следует, что

$$\sum_{i=1}^N \int_0^T \left( \sup_{[0,1]} |u_i| \right)^2 dt \leq C_{32}. \quad (72)$$

**Лемма 4.** В предположениях Теоремы 1 существуют положительные постоянные  $C_{33}$ ,  $C_{34}$  такие, что

$$\frac{1}{C_{33}} \leq \tilde{\rho}(t, y) \leq C_{33}, \quad \frac{1}{C_{33}} \leq \rho(t, x) \leq C_{33}, \quad (73)$$

$$\int_0^1 \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^T \int_0^1 \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 dx dt \leq C_{34} \quad (74)$$

где  $C_{33} = C_{33} \left( \arg. C_{32}, \inf_{[0,d]} \tilde{\rho}_0, \|\tilde{\rho}_0\|_{W_2^1(0,d)}, \{\|\tilde{u}_{0i}\|_{L_2(0,d)}\}, \tilde{\mathbf{N}}, \tilde{R}, N, d \right)$ ,  
 $C_{34} = C_{34}(\arg. C_{33})$ .

**Доказательство.** Перепишем уравнения (65) в виде

$$\sum_{j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} + R \left( \sum_{j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_j \right) \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y} \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (75)$$

где  $\tilde{\nu}_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  — элементы матрицы  $\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N}^{-1} > 0$ , а затем умножим (75) на  $\alpha_i$  и просуммируем по  $i = 1, \dots, N$ , получим, что

$$\sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} + \tilde{R} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right), \quad (76)$$

где  $\tilde{R} = \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \alpha_j > 0$ . Выражая из уравнения (64)

$$\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = - \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial t} \quad (77)$$

и подставляя в (76), приходим к равенству

$$\frac{\partial^2 \ln \tilde{\rho}}{\partial t \partial y} + \tilde{R} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial y} = - \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t}.$$

Умножим это равенство на  $\frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y}$  и проинтегрируем по  $y$ , получим соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_0^d \left( \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy \right) + \tilde{R} \int_0^d \tilde{\rho} \left( \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy = \\ = - \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \left( \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right) dy. \end{aligned} \quad (78)$$

Правую часть (78) преобразуем, интегрируя по частям и используя (77):

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \left( \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right) dy = - \frac{d}{dt} \left( \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \tilde{u}_j \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} dy \right) + \\ + \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \tilde{\rho} \left( \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) dy. \end{aligned} \quad (79)$$

Таким образом, после интегрирования (78) по  $t$ , учитывая (79), находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^d \left( \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy + \tilde{R} \int_0^t \int_0^d \tilde{\rho} \left( \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy d\tau = \\ = - \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \tilde{u}_j \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} dy + \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^t \int_0^d \tilde{\rho} \left( \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) dy d\tau + \\ + \sum_{i,j=1}^N \tilde{\nu}_{ij} \alpha_i \int_0^d \tilde{u}_{0j} \frac{d \ln \tilde{\rho}_0}{dy} dy + \frac{1}{2} \int_0^d \left( \frac{d \ln \tilde{\rho}_0}{dy} \right)^2 dy. \end{aligned}$$

Используя оценку (71), отсюда выводим неравенство

$$\int_0^d \left( \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy + \int_0^T \int_0^d \tilde{\rho} \left( \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy dt \leq C_{35}, \quad (80)$$

где  $C_{35} = C_{35} \left( C_{32}, \inf_{[0,d]} \tilde{\rho}_0, \|\tilde{\rho}_0\|_{W_2^1(0,d)}, \{\|\tilde{u}_{0i}\|_{L_2(0,d)}\}, \tilde{\mathbf{N}}, \tilde{R}, N \right)$ .

Из (64), (66) и (67) следует, что при каждом  $t \in [0, T]$  хотя бы в одной точке  $\tilde{y}(t) \in [0, d]$

$$\tilde{\rho}(t, \tilde{y}(t)) = d. \quad (81)$$

Следовательно, можно воспользоваться представлением

$$\ln \tilde{\rho}(t, y) = \ln \tilde{\rho}(t, \tilde{y}) + \int_{\tilde{y}}^y \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial s} ds,$$

из которого по неравенству Гельдера с учетом (80) и (81), имеем

$$|\ln \tilde{\rho}(t, y)| \leq |\ln d| + \sqrt{d} \sqrt{\int_0^d \left( \frac{\partial \ln \tilde{\rho}}{\partial y} \right)^2 dy} \leq C_{36}(C_{35}, d).$$

Отсюда и из (80) непосредственно следуют оценки (73) и (74). Лемма 4 доказана.

**Лемма 5.** *В предположениях Теоремы 1 существует положительная постоянная  $C_{37}$  такая, что*

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial t} \right)^2 dx + \sum_{i=1}^N \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^T \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx dt + \right. \\ & \left. + \int_0^T \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 dx dt \right) \leq C_{37}, \end{aligned} \quad (82)$$

где  $C_{37} = C_{37}$  (арг.  $C_{32}$ , арг.  $C_{33}$ ,  $\{\|u'_{0i}\|_{L_2(0,1)}\}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $R$ ,  $N$ ,  $T$ ).

**Доказательство.** Возведем в квадрат уравнения (2), поделим на  $\rho$ , просуммируем по  $i = 1, \dots, N$  и проинтегрируем по  $x$ , получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx - 2 \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \left( \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right) dx + \\ & + \sum_{i=1}^N \int_0^1 \frac{1}{\rho} \left( \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right)^2 dx = \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho \left( v \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\alpha_i R}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (83)$$

Введем следующее обозначение:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx + \\ & + \sum_{i=1}^N \int_0^1 \int_0^t \left( \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \left( \sum_{j=1}^N \nu_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx d\tau. \end{aligned}$$

Тогда из (83) и неравенств (69), (73) и (74) следует, что

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &\leq C_{38} + C_{39} \left( \sum_{j=1}^N \|u_j\|_{L_\infty(0,1)}^2 \right) \left( \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx \right) \leq \\ &\leq C_{38} + C_{39} \left( \sum_{j=1}^N \|u_j\|_{L_\infty(0,1)}^2 \right) \gamma(t), \end{aligned}$$

где  $C_{38} = C_{38}(C_{33}, C_{34}, R, N)$ ,  $C_{39} = C_{39}(C_1, C_{33}, N)$ , откуда и из неравенства Гронуолла (см. также (72)) получаем, что

$$\gamma(t) \leq C_{40} (C_{32}, C_{38}, C_{39}, \{\|u'_{0i}\|_{L_2(0,1)}\}_{i=1}^N, \mathbf{N}, N, T). \quad (84)$$

Из (84) непосредственно следует оценка

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N \left( \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx + \int_0^T \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 dx dt + \right. \\ &\left. + \int_0^T \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \right)^2 dx dt \right) \leq C_{41}(C_1, C_{33}, C_{40}, N). \end{aligned} \quad (85)$$

Наконец, из уравнения (1) и оценок (73), (74) и (85) получаем, что

$$\int_0^1 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2 dx \leq C_{42}(C_{33}, C_{34}, C_{41}, N).$$

Лемма 5 доказана.

Таким образом, в Леммах 3-5 получены все оценки, необходимые для продолжения решения начально-краевой задачи (1)–(4) с интервала  $(0, t_0)$  на интервал  $(0, T)$ .

## 6 Единственность решения

В данном разделе обоснуем единственность решения начально-краевой задачи (1)–(4) и завершим доказательство Теоремы 1.

Предположим, что  $(\rho^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_N^{(1)})$  и  $(\rho^{(2)}, u_1^{(2)}, \dots, u_N^{(2)})$  — два решения задачи (1)–(4). Положим  $\rho = \rho^{(1)} - \rho^{(2)}$ ,  $u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $v^{(1,2)} = \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j^{(1,2)}$ ,  $v = v^{(1)} - v^{(2)}$ . Из (1), (3) следуют равенства

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v^{(1)})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho^{(2)} v)}{\partial x} = 0, \quad \rho|_{t=0} = 0. \quad (86)$$

Умножая (86) на  $2\rho$  и интегрируя по  $x$ , получаем

$$y_1'(t) = - \int_0^1 \left( \rho^2 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} + 2\rho^{(2)} \rho \frac{\partial v}{\partial x} + 2\rho v \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x} \right) dx, \quad (87)$$

где

$$y_1(t) = \int_0^1 \rho^2 dx. \quad (88)$$

Слагаемые в правой части (87) можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} - \int_0^1 \rho^2 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} dx &\leq \left( \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,1)} \right) y_1(t), \\ -2 \int_0^1 \rho^{(2)} \rho \frac{\partial v}{\partial x} dx &\leq \|\rho^{(2)}\|_{L_\infty(Q_T)}^2 y_1(t) + N \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx, \\ -2 \int_0^1 \rho v \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x} dx &\leq y_1(t) + \|v^2\|_{L_\infty(0,1)} \left\| \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,1))} \leq \\ &\leq y_1(t) + N \left( \left\| \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,1))} \right) \left( \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx \right). \end{aligned}$$

В силу включений

$$\rho^{(2)} \in L_\infty(Q_T), \quad \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x} \in L_\infty(0, T; L_2(0, 1)),$$

$$\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x} \in L_2(0, T; L_\infty(0, 1)), \quad i = 1, \dots, N,$$

выводим оценку

$$y_1'(t) \leq C_{43}(t)y_1(t) + C_{44} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (89)$$

где  $C_{43} = C_{43} \left( \left\{ \left\| \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,1)} \right\}, \|\rho^{(2)}\|_{L_\infty(Q_T)} \right)$ ,  $C_{43} \in L_2(0, T)$ ,

$C_{44} = C_{44} \left( \left\| \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,1))}, N \right)$ . Поэтому, применяя неравенство

Гронуолла, приходим к неравенству

$$y_1(t) \leq C_{45} (C_{44}, \|C_{43}\|_{L_1(0,1)}) \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx d\tau. \quad (90)$$

Далее, из уравнений (2) и краевых условий (4) следует равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho^{(1)} u_i^2 dx \right) + \sum_{i,j=1}^N \nu_{ij} \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dx = \\ & = R \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^1 (\rho^{(1)} - \rho^{(2)}) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dx - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho u_i \left( \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t} \right) dx - \\ & - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho^{(1)} \nu u_i \left( \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho v^{(2)} u_i \left( \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx, \end{aligned} \quad (91)$$

из которого вытекает соотношение

$$\begin{aligned} y_2'(t) + y_3'(t) & \leq R \int_0^1 \rho \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho u_i \left( \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t} \right) dx - \\ & - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho^{(1)} \nu u_i \left( \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho v^{(2)} u_i \left( \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx, \end{aligned} \quad (92)$$

где

$$y_2(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho^{(1)} u_i^2 dx, \quad (93)$$

$$y_3(t) = C_1 \sum_{i=1}^N \int_0^t \int_0^1 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 dx d\tau.$$

Оценим слагаемые в правой части (92) следующим образом:

$$\begin{aligned} R \int_0^1 \rho \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx & \leq \frac{C_1}{4} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x} \right\|_{L_2(0,1)}^2 + \\ & + C_{46} \left( C_1, \|\rho^{(1,2)}\|_{L_\infty(Q_T)}, R, N \right) y_1(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho u_i \left( \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t} \right) dx \leq \frac{C_1}{4} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x} \right\|_{L_2(0,1)}^2 + \\
& \quad + C_{47} \left( C_1, \left\{ \left\| \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial t} \right\|_{L_2(0,1)} \right\} \right) y_1(t), \\
& - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho^{(1)} v u_i \left( \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx \leq C_{48} \left( \left\{ \left\| \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,1)} \right\}, N \right) y_2(t), \\
& - \sum_{i=1}^N \int_0^1 \rho v^{(2)} u_i \left( \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right) dx \leq C_{49} \left( \left\{ \|u_i^{(2)}\|_{L_\infty(Q_T)}, N \right\} \right) y_1(t) + \\
& \quad + C_{50} \left( \left\{ \left\| \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x} \right\|_{L_\infty(0,1)} \right\}, \left\| \frac{1}{\rho^{(1)}} \right\|_{L_\infty(Q_T)} \right) y_2(t),
\end{aligned}$$

где  $C_{47}, C_{50} \in L_1(0, T)$ ,  $C_{48} \in L_2(0, T)$ . Таким образом, из (92), с учетом уже доказанного соотношения (см. (90))

$$y_1(t) \leq C_{51}(C_1, C_{45})y_3(t),$$

следует неравенство

$$y_2'(t) + \frac{1}{2}y_3'(t) \leq C_{52}(C_{46}, \dots, C_{51}) \left( y_2(t) + \frac{1}{2}y_3(t) \right), \quad (94)$$

где  $C_{52} \in L_1(0, 1)$ , из которого, с учетом того, что  $y_2(0) = y_3(0) = 0$ , получаем тождества

$$y_1 \equiv y_2 \equiv y_3 \equiv 0, \quad (95)$$

завершающие доказательство Теоремы 1.

## References

- [1] K.R. Rajagopal, L. Tao, *Mechanics of Mixtures*, World Scientific, Singapore, 1995.
- [2] R.I. Nigmatulin, *Dynamics of Multiphase Media: V. 1–2*, Hemisphere, New York, 1990.
- [3] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 388–397.
- [4] A.D Kirwan, M. Massoudi, *The heat flux vector(s) in a two component fluid mixture*, Fluids, **5:2** (2020), 77, 15 pp.
- [5] R.T. Lee, K.T. Yang, Y.C. Chiou, *A novel model for a mixed-film lubrication with oil-in-water emulsions*, Tribology International, **66** (2013), 241–248.
- [6] J. Malek, K.R. Rajagopal, *A thermodynamic framework for a mixture of two liquids*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, **9:4** (2008), 1649–1660.
- [7] R.J. Atkin, R.E. Craine, *Continuum theories of mixtures: applications*, IMA Journal of Applied Mathematics, **17:2** (1976), 153–207.
- [8] I. Muller, *A thermodynamic theory of mixtures of fluids*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **28** (1968), 1–39.

- [9] I. Straskraba, A. Zlotnik, *Global properties of solutions to 1D-viscous compressible barotropic fluid equations with density dependent viscosity*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, **54** (2003), 593–607.
- [10] I. Straskraba, A. Zlotnik, *Global behavior of 1d-viscous compressible barotropic fluid with a free boundary and large data*, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, **5** (2003), 119–143.
- [11] A.A. Amosov, A.A. Zlotnik, *Uniqueness and stability of generalized solutions of quasi-averaged equations of the one-dimensional motion of a viscous barotropic medium*, Differential Equations, **31**:7 (1995), 1056–1066.
- [12] A.A. Zlotnik, N.Z. Bao, *Properties and asymptotic behavior of solutions of some problems of one-dimensional motion of a viscous barotropic gas*, Mathematical Notes, **55** (1994), 471–482.
- [13] S. Jiang, *On initial boundary value problems for a viscous, heat-conducting, one-dimensional real gas*, Journal of Differential Equations, **110**:2 (1994), 157–181.
- [14] S. Yanagi, *Global existence for one-dimensional motion of non-isentropic viscous fluids*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, **16**:9 (1993), 609–624.
- [15] D. Hoff, *Global well-posedness of the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations of nonisentropic flow with discontinuous initial data*, Journal of Differential Equations, **95**:1 (1992), 33–74.
- [16] V.A. Vaigant, *On the Cauchy problem for the system of equations of a viscous gas*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **102** (1992), 3–10.
- [17] A.A. Amosov, A.A. Zlotnik, *Solvability «in the large» of a system of equations of the one-dimensional motion of an inhomogeneous viscous heat-conducting gas*, Mathematical Notes, **52** (1992), 753–763.
- [18] A.A. Zlotnik, *On equations for one-dimensional motion of a viscous barotropic gas in the presence of a body force*, Siberian Mathematical Journal, **33** (1992), 798–815.
- [19] D. Hoff, *Discontinuous solutions of the Navier-Stokes equations for compressible flow*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **114** (1991), 15–46.
- [20] S.N. Antontsev, A.V. Kazhikhov, V.N. Monakhov, *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids*, Studies in Mathematics and its Applications, **22**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.
- [21] V.A. Vaigant, *Inhomogeneous boundary value problems for the equations of a viscous heat-conducting gas*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **97** (1990), 3–21.
- [22] T. Nagasawa, *On the one-dimensional free boundary problem for the heat-conductive compressible viscous gas*, North-Holland Mathematics Studies, **160** (1989), 83–99.
- [23] A.A. Zlotnik, A.A. Amosov, *The generalized solutions «in the large» to the equations for one-dimensional motion of a viscous barotropic gas*, Doklady Mathematics, **37**:2 (1988), 554–558.
- [24] V.A. Vaigant, A.A. Papin, *Solvability of the initial-boundary value problem for the equations of a barotropic gas with density-dependent viscosity*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **79** (1987), 3–9.
- [25] T. Nagasawa, *On the one-dimensional motion of the polytropic ideal gas nonfixed on the boundary*, Journal of Differential Equations, **65**:1 (1986), 49–67.
- [26] B. Kawohl, *Global existence of large solutions to initial boundary value problems for a viscous, heat-conducting, one-dimensional real gas*, Journal of Differential Equations, **58**:1 (1985), 76–103.
- [27] M. Okada, S. Kawashima, *On the equations of one-dimensional motion of compressible viscous fluids*, Journal of Mathematics of Kyoto University, **23**:1 (1983), 55–71.
- [28] S.Ya. Belov, *On the flow problem for the system of equations of one-dimensional motion of a viscous heat-conducting gas*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **56** (1982), 22–43.
- [29] A.V. Kazhikhov, *Cauchy problem for viscous gas equations*, Siberian Mathematical Journal, **23** (1982), 44–49.

- [30] S. Kawashima, T. Nishida, *Global solutions to the initial value problems for the equations of one-dimensional motion of viscous polytropic gases*, Journal of Mathematics of Kyoto University, **21**:4 (1981), 825–837.
- [31] A. Matsumura, T. Nishida, *The initial value problem for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids*, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, **55**:9 (1979), 337–342.
- [32] V.V. Shelukhin, *Periodic flows of viscous gas*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **42** (1979), 80–102.
- [33] A.V. Kazhikhov, *On the global solvability of one-dimensional boundary value problems for the equations of a viscous heat-conducting gas*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **24** (1976), 45–61.
- [34] A.V. Kazhikhov, *Correctness «in general» of mixed boundary value problems for a model system of equations of a viscous gas*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **21** (1975), 18–47.
- [35] Д.А. Прокудин, *Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для модели системы уравнений политропного движения смеси вязких сжимаемых жидкостей*, Сибирские электронные математические известия, **14** (2017), 568–585.
- [36] D.A. Prokudin, *Global solvability of the initial boundary value problem for a model system of one-dimensional equations of polytropic flows of viscous compressible fluid mixtures*, Journal of Physics: Conference Series, **894** (2017), 012076, 6 pp.
- [37] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Asymptotic behavior of the solution to the initial-boundary value problem for one-dimensional motions of a barotropic compressible viscous multicomponent fluid*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **45** (2024), 1463–1471.
- [38] D.A. Prokudin *On the stabilization of the solution to the initial boundary value problem for one-dimensional isothermal equations of viscous compressible multicomponent media dynamics*, Mathematics, **11**:14 (2023), 3065, 11 pp.
- [39] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Global unique solvability of an initial-boundary value problem for the one-dimensional barotropic equations of binary mixtures of viscous compressible fluids*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **15** (2021), 50–61.
- [40] D.A. Prokudin, *On the stabilization of solutions to the initial-boundary value problem for the equations of dynamics of viscous compressible multicomponent media*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **18**:2 (2021), 1278–1285.
- [41] D.A. Prokudin, *Unique solvability of initial-boundary value problem for a model system of equations for the polytropic motion of a mixture of viscous compressible fluids*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 568–585.
- [42] D.A. Prokudin, *Global solvability of the initial boundary value problem for a model system of one-dimensional equations of polytropic flows of viscous compressible fluid mixtures*, Journal of Physics: Conference Series, **894** (2017), 012076, 6 pp.
- [43] S. Li, *On one-dimensional compressible Navier-Stokes equations for a reacting mixture in unbounded domains*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, **68** (2017), 106, 24 pp.
- [44] D. Bresch, X. Huang, J. Li, *Global weak solutions to one-dimensional non-conservative viscous compressible two-phase system*, Communications in Mathematical Physics, **309** (2012), 737–755.
- [45] A.A. Papin, *On the uniqueness of the solutions of an initial boundary-value problem for the system of a heat-conducting two-phase mixture*, Mathematical Notes, **87** (2010), 594–598.
- [46] A.A. Zlotnik, *Weak solutions to the equations of motion of viscous compressible reacting binary mixtures: uniqueness and Lipschitz-continuous dependence on data*, Mathematical Notes, **75** (2004), 278–283.

- [47] A.A. Zlotnik, *Uniform estimates and stabilization of solutions to equations of one-dimensional motion of a multicomponent barotropic mixture*, Mathematical Notes, **58** (1995), 885–889.
- [48] A.N. Petrov, *Well-posedness of initial-boundary value problems for one-dimensional equations of mutually penetrating flows of ideal gases*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **56** (1982), 105–121.
- [49] A.V. Kazhikov, A.N. Petrov, *Well-posedness of the initial-boundary value problem for a model system of equations of a multicomponent mixture*, Dinamika Sploshnoy Sredy, **35** (1978), 61–73.
- [50] R.J. DiPerna, P.L. Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Inventiones Mathematicae, **98** (1989), 511–547.
- [51] A. Novotny, I. Straskraba, *Introduction to the Mathematical Theory of Compressible Flow*, Oxford University Press, Oxford, 2004.

VICTORIA YURIEVNA NOGOVISHCHEVA  
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,  
ST. PIROGOVA, 1,  
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
Email address: [v.nogovishcheva@ngs.nsu.ru](mailto:v.nogovishcheva@ngs.nsu.ru)

DMITRIY ALEXEYEVICH PROKUDIN  
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,  
ST. PIROGOVA, 1,  
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA  
Email address: [prokudin@hydro.nsc.ru](mailto:prokudin@hydro.nsc.ru)