S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 2, стр. ???–??? (2024) УДК 519.21
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.??? MSC 60G10

О СУЩЕСТВОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ M-ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ЗАДАННЫМИ КОВАРИАЦИЯМИ
ON THE EXISTENCE OF STATIONARY SEQUENCES OF M-DEPENDENT RANDOM VARIABLES WITH SPECIFIED COVARIANCES

И.С. БОРИСОВ

ПРЕДСТАВЛЕНО Н.С. АРКАШОВЫМ

Abstract: Necessary and sufficient conditions are studied for a covariance matrix of finite size to be interpreted as a covariance matrix of a finite segment of an infinite stationary sequence of random variables.

Keywords: stationary sequence, m-dependent random variables, covariance matrix.

1 Введение и формулировка основных результатов

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – стационарная в широком смысле последовательность случайных величин с нулевыми средними и единичными дисперсиями. Напомним, что стационарность в широком смысле (в дальнейшем – стационарность) означает независимость коэффициентов корреляции $r(k) :=$

Borisov, I.S., On the existence of stationary sequences of M-dependent random variables with specified covariances.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект FWNF-2024-0001.

Поступила 29 сентября 2024 г., опубликована ??? 2024 г.

$\mathbf{E}\xi_l\xi_{l+k}$ от натурального l для каждого фиксированного целого $k \geq 0$. Наша цель – получить необходимые и достаточные условия на конечный набор $r(k)$, $k = 0, 1, \ldots, m$, которые гарантируют существование стационарной последовательности m-зависимых случайных величин, для которой данный набор описывает корреляцию первых m членов этой стационарной последовательности. При этом мы будем трактовать m-зависимость в более широком смысле по сравнению с общепринятым, а именно, мы предполагаем только, что $r(k) = 0$ при всех $k > m$. Понятно, для гауссовских стационарных последовательностей такое определение m-зависимости равносильно классическому.

Скажем, при $m = 1$ эту задачу можно переформулировать следующим образом. Пусть на некотором вероятностном пространстве у нас задана пара центрированных случайных величин ξ_1 и ξ_2 с единичными вторыми моментами и ненулевым коэффициентом корреляции. Спрашивается, при каких ограничениях на указанный коэффициент корреляции можно достроить рассматриваемую пару случайных величин до 1-зависимой стационарной (бесконечной) последовательности? Эта задача допускает и простую геометрическую интерпретацию. Пусть в некотором бесконечномерном евклидовом пространстве имеется пара неортогональных векторов единичной длины с некоторым “углом” (или фиксированным скалярным произведением) между ними. Спрашивается, при каких условиях на этот угол данную пару можно достроить до бесконечной системы векторов единичной длины, удовлетворяющих следующему условию: вновь построенный вектор с номером $j \geq 3$ будет ортогонален каждому из векторов с номерами от 1 до $j - 2$, а с вектором, имеющим номер $j - 1$, он будет составлять тот же угол, что и в исходной паре. Понятно, что соответствующее скалярное произведение двух исходных векторов по модулю не должно быть близким к 1. Например, для системы из трех векторов в R^3 эта задача решается элементарно: с необходимостью угол между исходными векторами должен быть не меньше $\pi/4$, т. е. соответствующее скалярное произведение по модулю должно быть не больше $1/\sqrt{2}$. С увеличением числа рассматриваемых векторов с указанным выше свойством в евклидовом пространстве соответствующей размерности отмеченная верхняя граница уменьшается и “геометрическое” решение этой задачи становится менее тривиальным.

Нижеследующие две теоремы дают нам необходимые и достаточные условия на коэффициенты корреляции $\{r(k)\}$ для того, чтобы конечный набор случайных величин можно было бы в принципе достроить до бесконечной стационарной последовательности. Точнее, отчасти будет дан ответ на вопрос, всегда ли можно рассматривать ту или иную корреляционную матрицу размера $m \times m$ как корреляционную матрицу первых m элементов некоторой бесконечной стационарной последовательности?

Теорема 1. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – стационарная последовательность m-зависимых случайных величин с нулевыми средними и единичными дисперсиями. Тогда с необходимостью*

$$|\sum_{k=1}^{m} kr(k)| \le m/2 + \sum_{k=1}^{m-1} kr(m-k), \tag{1}$$

где сумма в правой части (1) при $m = 1$ по определению полагается равной нулю.

Теорема 2. *Пусть*

$$M := \|r(|i-j|)\|_{m\times m}$$

– ковариационная матрица размера $m \times m$, где $r(0) = 1$. Для того, чтобы M была ковариационной матрицей первых m координат бесконечной стационарной последовательности, достаточно потребовать, чтобы была разрешима следующая система уравнений:

$$\begin{cases} x_1^2 + \ldots + x_{m+1}^2 = 1, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_m x_{m+1} = r(1), \\ x_1x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_{m-1}x_{m+1} = r(2), \\ \qquad\qquad \ldots \qquad , \\ x_1 x_{m+1} = r(m). \end{cases} \tag{2}$$

Пример 1. Пусть $m = 1$. Тогда из (1) следует, что с необходимостью $|r(1)| \le 1/2$. С другой стороны, при любом значении $r(1)$ из указанного диапазона система (2) будет разрешимой. В самом деле, при $m = 1$ система уравнений (2) имеет вид

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1, \\ x_1x_2 = r(1). \end{cases}$$

Решение этой системы вычисляется элементарно:

$$x_1 = (1/2 + \sqrt{1/4 - r^2(1)})^{1/2}, \quad x_2 = (1/2 - \sqrt{1/4 - r^2(1)})^{1/2}.$$

Стало быть, при любом значении $r(1) \in [-1/2, 1/2]$ существует бесконечная стационарная последовательность случайных величин с указанной корреляцией ее элементов.

Пример 2. Пусть $m = 2$. Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & r(1) & r(2) \\ r(1) & 1 & r(1) \\ r(2) & r(1) & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Для того чтобы эта матрица была ковариационной, необходимо и достаточно, чтобы она была положительно определенной. Иными словами, с учетом неравенств $|r(k)| \le 1$ нам достаточно потребовать, чтобы детерминант этой матрицы был неотрицательным, поскольку два других угловых минора, очевидно, неотрицательны. Это приводит к требованию, чтобы $1 + r(2) - 2r^2(1) \geq 0$. Последнее неравенство заведомо будет выполнено, если $0 \leq r(1) \leq r(2)$. Это соотношение далее предполагается выполненным. В этом случае неравенство (1) принимает вид $0 \leq r(2) \leq 1/2$. Система уравнений (2) для $m = 2$ записывается как

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \\ x_2(x_1 + x_3) = r(1), \\ x_1 x_3 = r(2). \end{cases} \tag{4}$$

Например, если $r(1) = 0$ и $r(2) = 1/2$, то система (4), очевидно, разрешима: $x_2 = 0$, $x_1 = x_3 = 1/\sqrt{2}$. Если же $0 < r(1) \leq 1/2$ и $r(2) = 1/2$, то решения нет. Последнее следует из элементарного факта, что уравнение $x_1 x_3 = 1/2$ при условии $x_1^2 + x_3^2 \leq 1$ имеет единственное решение $x_1 = x_3 = 1/\sqrt{2}$. Отсюда и из (4) получаем, в свою очередь, равенство $x_2 = 0$, что несовместимо с предположением $r(1) > 0$. Так что в первом случае мы можем рассматривать матрицу (4) как ковариационную матрицу трех подряд стоящих элементов бесконечной стационарной последовательности, а во втором случае, строго говоря, мы не можем дать подобную гарантию. Во втором случае можно только определенно утверждать, что не существует гауссовской 3-зависимой последовательности, у которой $r(0) = 1$, $r(1) > 0$ и $r(2) = 1/2$, хотя матрица (1) в вышеприведенных ограничениях является ковариационной для трехмерного гауссовского распределения.

2 Доказательства

Доказательство теоремы 1. Для любого натурального n имеем, во-первых,

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_{2i-1} \sum_{i=1}^{n} \xi_{2i}\right) = (2n-1)\mathbf{E}\xi_1\xi_2 = (2n-1)r(1),$$

и, во-вторых, в силу неравенства Коши – Буняковского, центрированности и ортогональности элементов последовательности $\{\xi_i\}$ "через одного" мы имеем

$$\left|\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_{2i-1} \sum_{i=1}^{n} \xi_{2i}\right)\right| \leq n.$$

Из этих двух соотношений следует оценка

$$|r(1)| \leq \frac{1}{2 - 1/n},$$

В силу произвольности n получаем соотношение (1) при $m = 1$:

$$|r(1)| \leq \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Пусть теперь $m > 1$. Введем в рассмотрение новую последовательность центрированных случайных величин

$$\eta_k := \sum_{j=(k-1)m+1}^{km} \xi_j, \quad k = 1, 2, ...,$$

которая, очевидно, является стационарной 1-зависимой. Поэтому в силу (5) с учетом нормировки получаем следующее усиление неравенства Коши – Буняковского:

$$|\mathbf{E}\eta_1\eta_2| \le \frac{1}{2}\mathbf{E}\eta_1^2.$$

Остается только заметить, что

$$\mathbf{E}\eta_1\eta_2 = \sum_{k=1}^{m} kr(k), \quad \mathbf{E}\eta_1^2 = m + 2\sum_{k=1}^{m-1} kr(m-k).$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим последовательность $\{\eta_i\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевыми средними и единичными дисперсиями. Теперь введем стационарную последовательность m-зависимых случайных величин

$$\xi_i := x_1\eta_i + x_2\eta_{i+1} \ldots + x_{m+1}\eta_{i+m},$$

где $x_1, \ldots, x_{m+1}$ – свободные неслучайные переменные. Нам остается только конкретизировать условия $\mathbf{E}\xi_i^2 = 1$ и $\mathbf{E}\xi_i\xi_{i+k} = r(k)$. В результате мы придем к системе уравнений (2). Теорема 2 доказана.

Igor Semyonovich Borisov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: sibam@math.nsc.ru