

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧ
МАСКИРОВКИ ДЛЯ 2D МОДЕЛИ
МАГНИТОСТАТИКИГ.В. АЛЕКСЕЕВ  AND Ю.Э. СПИВАК *Представлено П. П. П.*

Abstract: The inverse problems for a two-dimensional model of magnetostatics arising in the development of design technologies of devices for material body cloaking are considered. It is assumed that the cloaking devices to be designed consist of a finite number of concentric annular layers filled with homogeneous anisotropic or isotropic media. The optimization technology is developed by which the mentioned inverse problems are reduced to finite-dimensional extremum problems. The role of controls in them is played by the magnetic permeabilities of the individual layers that compose the designed device. For their numerical solution, the algorithm based on the particle swarm optimization method is used. Important properties of optimal solutions are established, one of which is the bang-bang property in the case when all separate layers are isotropic. It is shown on the basis of computational experiments that cloaking devices designed using the developed optimization technology have simplicity of technical implementation and the highest efficiency in the class of devices under consideration.

ALEKSEEV, G.V., SPIVAK, YU.E., OPTIMIZATION ANALYSIS OF THE CLOAKING PROBLEMS FOR A 2D MODEL OF MAGNETOSTATICS.

© 2024 АЛЕКСЕЕВ Г.В., СПИВАК Ю.Э.

Работа первого автора выполнена в ДЦМИ при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение N 075-02-2024-1440 от 28.02.2024 по реализации программ развития РНОМЦ. Работа второго автора выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (N 075-00459-24-00).

Поступила XX января 2023 г., опубликована XX декабря 2023 г.

Keywords: inverse problems, magnetostatics model, optimization method, cloaking shells, bang-bang principle, particle swarm optimization method, magnetic permeabilities.

1 Введение

В последние два десятилетия актуальным в области математической физики остается направление, связанное с разработкой специальных структур, используемые для управления физическими полями в сплошных средах. Важным частным случаем таких структур являются маскировочные или экранирующие оболочки, служащие для маскировки или экранирования помещенных внутрь них материальных тел от их обнаружения с помощью волновых или статических физических полей. В пионерских работах в этой области [1, 2, 3, 4] был разработан метод, названный transformation optics (ТО), для решения задач электромагнитной маскировки, который долгое время оставался наиболее популярным методом маскировки. Далее, в работе [5], опубликованной в 2007 г., ТО был применен для решения задач акустической маскировки, а с 2008 г. он стал применяться для решения задач маскировки материальных тел относительно статических (тепловых, магнитных и электрических) полей (см. [6, 7, 8, 9, 10, 11]). Альтернативный подход к постановкам задач акустической маскировки и их решению был предложен в работах [12, 13, 14]. Позже выяснилось, что полученные с помощью ТО метода решения обеспечивают идеальный маскировочный эффект только теоретически, а в практическом плане они являются технически нереализуемыми, поскольку описывают отсутствующие в природе материалы с весьма экзотическими свойствами. Так как задачи маскировки, как и задачи дизайна, относятся к обратным задачам, начиная с 2009 г., некоторые исследователи стали применять для решения задач дизайна маскировочных оболочек методы оптимизации (см. [15, 16]). Хорошо известно, что оптимизационный метод решения обратных задач, разработанный в трудах академика А.Н. Тихонова при создании им метода регуляризации некорректных задач (см. детали в [17]), широко используется при решении обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных. В частности, этот метод успешно применялся как при теоретическом анализе задач маскировки в [18, 19, 20, 21], так и при численном исследовании указанных задач маскировки с использованием методов топологической [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31] либо глобальной оптимизации [32, 33, 34, 35, 36, 37, 38].

В настоящей работе предлагается оптимизационная технология решения обратных задач маскировки для двумерной модели магнитостатики, основанная на использовании оптимизационного метода исследования

обратных задач и метода роя частиц [39, 40] в качестве метода численной оптимизации. На основе анализа проведенных вычислительных экспериментов показывается, что предложенная оптимизационная технология позволяет проектировать магнитные маскировочные или экранирующие слоистые оболочки, обладающие наивысшей эффективностью в рассматриваемом классе устройств и простотой технической реализации.

Настоящая статья написана по материалам двух докладов, сделанных авторами на двух научных конференциях, состоявшихся в г. Новосибирске: XV молодежная научная школа-конференция “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач” (30.10–03.11.2023) и “Современные проблемы обратных задач” (06.11–09.11.2023), посвященных 85-летию академика РАН В.Г. Романова.

2 Постановка прямой и обратных задач магнитостатики на плоскости

Сформулируем сначала прямую задачу магнитостатики, рассматриваемую во всей плоскости \mathbb{R}^2 , заполненной однородной средой с постоянной магнитной проницаемостью $\mu_0 > 0$. Будем предполагать, что в \mathbb{R}^2 задано постоянное магнитное поле $\mathbf{H}_a = -\nabla\Phi_a$, отвечающее магнитному потенциалу $\Phi_a(\mathbf{x}) = -H_a(r/b) \cos \varphi$, где r, φ – полярные координаты точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $H_a = \text{const}$, $b = \text{const}$. Рассмотрим физический сценарий, когда в плоскость вносится объект $(\Omega, \boldsymbol{\mu})$, где Ω – кольцо $a < r < b$, а $\boldsymbol{\mu}$ – магнитная проницаемость среды, заполняющей область Ω (см. рис. 1). Тогда поле Φ_a изменяется и принимает вид $\Phi = \Phi_a + \Phi^s$, где Φ^s – возмущение поля Φ_a , вызванное внесением объекта $(\Omega, \boldsymbol{\mu})$ в \mathbb{R}^2 , на которое мы будем ссылаться как на рассеянный магнитный отклик.

Чтобы найти рассеянный отклик Φ^s , нужно сформулировать прямую задачу магнитостатики, отвечающую описанному выше физическому сценарию. Введем два множества:

$$\Omega_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < a\} \text{ и } \Omega_e^\infty = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| > b\}$$

и предположим, что область Ω состоит из конечного числа M элементарных колец (см. рис. 2)

$$\Omega_m = \{R_{m-1} < r = |\mathbf{x}| < R_m, m = \overline{1, M}, R_0 = a, R_M = b\}$$

одинаковой ширины $d = (b - a)/M$. Каждое из них заполнено однородной анизотропной (в общем случае) средой, постоянная магнитная проницаемость которой μ_m , $m = \overline{1, M}$ описывается диагональным в полярных координатах тензором $\mu_m = \text{diag}(\mu_{rm}, \mu_{\varphi m})$, где μ_{rm} (либо $\mu_{\varphi m}$) – радиальная (либо тангенциальная) компонента тензора μ_m .

В дальнейшем для описания кусочно-однородной среды, заполняющей область Ω , мы будем использовать $2M$ -мерный вектор $\mathbf{m} = (\mu_{r1},$

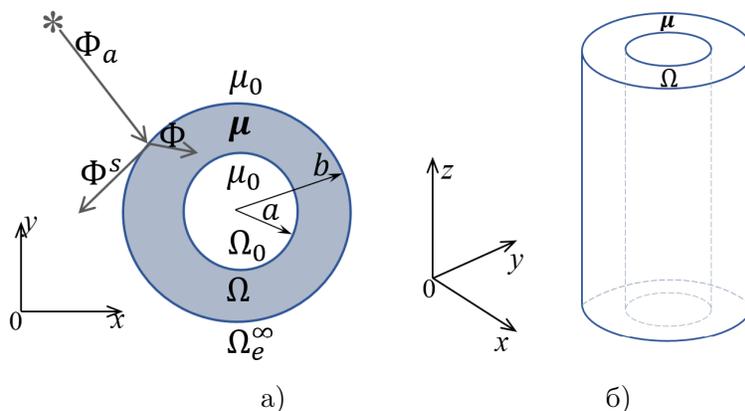


Рис. 1. Схематическое изображение геометрии задачи: а) поперечное сечение Ω однослойной магнитной маскировочной оболочки, имеющей вид бесконечно длинного цилиндра (б).

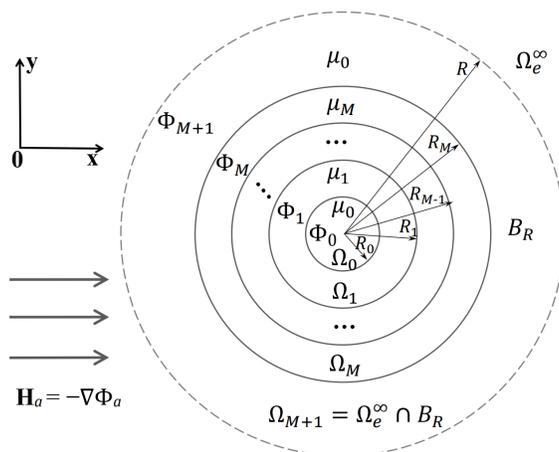


Рис. 2. Геометрия слоистой двумерной маскировочной оболочки и схематическое изображение внешнего магнитного поля.

$\mu_{\varphi 1}, \dots, \mu_{rM}, \mu_{\varphi M}$), составленный из компонент магнитных проницаемостей всех слоев Ω_m , $m = \overline{1, M}$, причем на пару (Ω, \mathbf{m}) будем ссылаться как на слоистую магнитную оболочку. При этом среду, заполняющую область Ω , будем называть допустимой, если выполняется условие положительности компонент: $\mu_{rm} > \mu_{min} > 0$, $\mu_{\varphi m} > \mu_{min} > 0$, $m = \overline{1, M}$. Оно проистекает из физического смысла радиальной и тангенциальной компонент μ_{rm} и $\mu_{\varphi m}$. Условие допустимости среды, заполняющей Ω , эквивалентно принадлежности соответствующего вектора \mathbf{m} следующему

ограниченному множеству в \mathbb{R}^{2M} :

$$K = \{\mathbf{m} = (\mu_{r1}, \mu_{\varphi1}, \dots, \mu_{rM}, \mu_{\varphi M}) \in \mathbb{R}^{2M} : 0 < \mu_{min} \leq (\mu_{rm}, \mu_{\varphi m}) \leq \mu_{max}\}. \quad (1)$$

Здесь заданные положительные константы μ_{min} и μ_{max} определяют нижнюю и верхнюю границы множества K .

Множество K по своему физическому смыслу описывает множество допустимых кусочно-однородных анизотропных сред, заполняющих все слои Ω_m области Ω . В математическом плане множество K можно рассматривать как цифровой двойник множества всех допустимых кусочно-однородных анизотропных сред, заполняющих область Ω . В частном случае, когда каждый слой Ω_m , $m = \overline{1, M}$, заполняется однородной изотропной средой с постоянной магнитной проницаемостью $\mu_m = \mu_{rm} = \mu_{\varphi m}$, множество K переходит в M -мерное множество

$$K' = \{\mathbf{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M) \in \mathbb{R}^M : 0 < \mu_{min} \leq \mu_m \leq \mu_{max}\}. \quad (2)$$

Обозначим через Φ_m сужение $\Phi|_{\Omega_m}$ полного поля $\Phi = \Phi_a + \Phi^s$ на подобласть Ω_m , $m = \overline{0, M}$. Положим $\Phi_{M+1} = \Phi|_{\Omega_e^\infty}$. Тогда прямая задача нахождения полного поля $\Phi = \Phi_a + \Phi^s$ сводится к нахождению всех $M+2$ полей Φ_m в областях Ω_m , $m = \overline{0, M+1}$, путем решения следующей задачи магнитного сопряжения:

$$\Delta\Phi_0 = 0 \text{ в } \Omega_0, \quad (\mu_m \nabla\Phi_m) = 0 \text{ в } \Omega_m, \quad m = \overline{1, M}, \quad \Delta\Phi^s = 0 \text{ в } \Omega_e^\infty, \quad (3)$$

$$\Phi_m = \Phi_{m+1}, \quad \mu_{rm} \frac{\partial\Phi_m}{\partial r} = \mu_{r(m+1)} \frac{\partial\Phi_{m+1}}{\partial r} \text{ при } r = R_m, \quad m = \overline{0, M}, \quad (4)$$

$$\Phi_0(\mathbf{x}) = O(1) \text{ при } r = |\mathbf{x}| \rightarrow 0, \quad \Phi^s(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (5)$$

рассматриваемой во всей плоскости \mathbb{R}^2 . Напомним, что соотношения (5) имеют смысл стандартных условий для магнитного поля при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$, тогда как (4) являются следствием фундаментального свойства непрерывности нормальной компоненты вектора индукции магнитного поля при переходе через границы раздела двух разных сред.

Рассуждая, как в [19, 20], можно показать, что для любого вектора $\mathbf{m} \in K$ решение $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_M, \Phi_{M+1}$ задачи (3)–(5) существует и единственно. Более того, используя метод разделения переменных, поля $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_M, \Phi_{M+1}$ можно записать в явном виде

$$\Phi_0(r, \varphi) = \alpha_0(r/b) \cos \varphi \text{ в } \Omega_0, \quad (6)$$

$$\Phi_m(r, \varphi) = (\alpha_m(r/b)^{\gamma_m} + \beta_m(b/r)^{\gamma_m}) \cos \varphi \text{ в } \Omega_m, \quad m = \overline{1, M} \quad (7)$$

$$\Phi_{M+1}(r, \varphi) = (-H_a(r/b) + \beta_{M+1}(b/r)) \cos \varphi \text{ в } \Omega_e^\infty. \quad (8)$$

Здесь $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_M, \beta_M, \beta_{M+1}$ – неизвестные коэффициенты, а константа γ_m носит название коэффициента или степени анизотропии среды в Ω_m . Она определяется формулой

$$\gamma_m = \sqrt{\mu_{\varphi m} / \mu_{rm}}, \quad m = \overline{1, M}. \quad (9)$$

Легко проверить, что все уравнения в (3) и условия (5) выполняются на введенных в (6)–(8) функциях Φ_m , $m = \overline{0, M+1}$ для любых значений коэффициентов α_m, β_m , $m = \overline{0, M+1}$. Остается их выбрать так, чтобы выполнялись граничные условия (4).

Подставляя (6)–(8) в условия сопряжения (4), получим:

$$-\alpha_0 + \alpha_1 c_0^{1-\gamma_1} + \beta_1 c_0^{1+\gamma_1} = 0, \quad (10)$$

$$-\mu_0 \alpha_0 + \mu_{r1} \alpha_1 \gamma_1 c_0^{1-\gamma_1} - \mu_{r1} \beta_1 \gamma_1 c_0^{1+\gamma_1} = 0, \quad (11)$$

$$-\alpha_m c_m^{-\gamma_m} - \beta_m c_m^{\gamma_m} + \alpha_{m+1} c_m^{-\gamma_{m+1}} + \beta_{m+1} c_m^{\gamma_{m+1}} = 0, \quad (12)$$

$$-\mu_{rm} \alpha_m \gamma_m c_m^{1-\gamma_m} + \mu_{rm} \beta_m \gamma_m c_m^{1+\gamma_m} + \mu_{r(m+1)} \alpha_{m+1} \gamma_{m+1} c_m^{1-\gamma_{m+1}} - \\ - \mu_{r(m+1)} \beta_{m+1} \gamma_{m+1} c_m^{1+\gamma_{m+1}} = 0, \quad m = \overline{1, M-1}, \quad (13)$$

$$-\alpha_M - \beta_M + \beta_{M+1} = H_a, \quad (14)$$

$$-\mu_{rM} \alpha_M \gamma_M + \mu_{rM} \beta_M \gamma_M - \mu_{M+1} \beta_{M+1} = \mu_{M+1} H_a. \quad (15)$$

Здесь $c_m = b/R_m$, $m = \overline{0, M-1}$.

Равенства (10)–(15) представляют собой систему $2M+2$ линейных алгебраических уравнений относительно $2M+2$ неизвестных коэффициентов $\alpha_0, \alpha_m, \beta_m, \beta_{M+1}$, $m = \overline{1, M}$, с положительно определенной матрицей коэффициентов. Последнее является следствием обратимости оператора, отвечающего прямой задаче (3)–(5). Именно систему (10)–(15) необходимо решить для нахождения полей Φ_m , $m = \overline{0, M+1}$.

Ниже мы также будем рассматривать более простой частный случай системы (10)–(15), соответствующий коэффициенту анизотропии $\gamma_m = 1$. Такой случай отвечает дизайну полностью изотропной многослойной оболочки (Ω, \mathbf{m}) , $\mathbf{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$, где $\mu_m > 0$ – постоянные магнитные проницаемости однородных изотропных слоев Ω_m , $m = \overline{1, M}$.

Обозначим через $\Phi[\mathbf{m}] = (\Phi_0[\mathbf{m}], \Phi_1[\mathbf{m}], \dots, \Phi_{M+1}[\mathbf{m}])$, где $\mathbf{m} = (\mu_{r1}, \mu_{\varphi 1}, \dots, \mu_{rM}, \mu_{\varphi M}) \in K$, решение задачи (3)–(5), отвечающее тензорам магнитной проницаемости $\mu_m = \text{diag}(\mu_{rm}, \mu_{\varphi m})$ в Ω_m , $m = \overline{1, M}$, и постоянной магнитной проницаемости μ_0 в Ω_0 и Ω_e^∞ . Положим $\Omega_{M+1} = \Omega_e^\infty \cap B_R$, где B_R – круг достаточно большого радиуса R , содержащий Ω внутри себя (см. рис. 2).

Ниже мы будем рассматривать обратную задачу, называемую задачей магнитной маскировки. Она состоит в нахождении вектора магнитных проницаемостей $\mathbf{m} = (\mu_{r1}, \mu_{\varphi 1}, \dots, \mu_{rM}, \mu_{\varphi M}) \in K$, где K – введенное в (1) ограниченное множество, исходя из выполнения следующих условий:

$$\nabla \Phi_0[\mathbf{m}] = 0, \quad (\text{т.е. } \Phi_0[\mathbf{m}] = \text{const}) \quad \text{в } \Omega_0,$$

$$\Phi_{M+1}[\mathbf{m}] = \Phi_a|_{\Omega_{M+1}}, \quad (\text{т.е. } \Phi^s[\mathbf{m}] = 0) \quad \text{в } \Omega_{M+1} \equiv \Omega_e^\infty \cap B_R. \quad (16)$$

К условиям (16) следует также добавить условие принадлежности $\mathbf{m} \in K$ вектора \mathbf{m} . Ясно в силу условия $\mathbf{m} \in K$, что точного решения сформулированной выше обратной задачи может не существовать, поэтому в следующем разделе мы заменим исходную обратную задачу обратной экстремальной задачей, используя оптимизационный метод. В

результате будет получена конечномерная экстремальная задача, для численного решения которой мы применим метод роя частиц (МРЧ) по схеме предложенной и развитой в [32, 34, 38].

Замечание 1. На практике часто рассматриваются более простые обратные задачи, заключающиеся в нахождении магнитных проницаемостей лишь из первого либо второго условия в (16). На указанные задачи обычно ссылаются, соответственно, как на задачу экранирования (или внутренней маскировки), либо задачу внешней маскировки (см. подробнее о них в [41]). ■

3 Формулировка экстремальной задачи

Для решения сформулированной обратной задачи мы применим оптимизационный метод [17]. Следуя ему, введем следующие функционалы качества:

$$J_i(\mathbf{m}) = \frac{\|\nabla\Phi_0[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_0)}}{\|\nabla\Phi_a\|_{L^2(\Omega_0)}}, \quad J_e(\mathbf{m}) = \frac{\|\Phi_{M+1}[\mathbf{m}] - \Phi_a\|_{L^2(\Omega_{M+1})}}{\|\Phi_a\|_{L^2(\Omega_{M+1})}},$$

$$J(\mathbf{m}) = 0.5J_i(\mathbf{m}) + 0.5J_e(\mathbf{m}). \quad (17)$$

Здесь

$$\|\nabla\Phi_a\|_{L^2(\Omega_0)}^2 = \int_{\Omega_0} |\nabla\Phi_a|^2 d\mathbf{x}, \quad \|\Phi_a\|_{L^2(\Omega_{M+1})}^2 = \int_{\Omega_{M+1}} |\Phi_a|^2 d\mathbf{x},$$

$$\|\nabla\Phi_0[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_0)}^2 = \int_{\Omega_0} |\nabla\Phi_0[\mathbf{m}]|^2 d\mathbf{x},$$

$$\|\Phi_{M+1}[\mathbf{m}] - \Phi_a\|_{L^2(\Omega_{M+1})}^2 = \int_{\Omega_{M+1}} |\Phi_{M+1}[\mathbf{m}] - \Phi_a|^2 d\mathbf{x}. \quad (18)$$

Сформулируем следующую экстремальную задачу полной маскировки

$$J(\mathbf{m}) \rightarrow \inf, \quad \mathbf{m} \in K. \quad (19)$$

Напомним, что способность проектируемой оболочки (Ω, \mathbf{m}) маскировать материальные объекты принято характеризовать маскировочной эффективностью. Рассуждая, как в [32, 38], нетрудно показать, что маскировочная эффективность оболочки (Ω, \mathbf{m}) связана со значением $J(\mathbf{m})$ обратной зависимостью: чем меньше значение $J(\mathbf{m})$, т.е. чем меньше ошибка выполнения обоих условий в (16), тем выше маскировочная эффективность оболочки (Ω, \mathbf{m}) , и наоборот. Отсюда следует, что задача (19) направлена на нахождение маскировочной оболочки (Ω, \mathbf{m}) , обладающей наивысшей маскировочной эффективностью на классе устройств, отвечающих множеству K , введенному в (1). Точно так же задача

$$J(\mathbf{m}) \rightarrow \inf, \quad \mathbf{m} \in K' \quad (20)$$

направлена на нахождение маскировочной оболочки (Ω, \mathbf{m}) , обладающей наивысшей маскировочной эффективностью на классе устройств, отвечающих множеству K' , введенному в (2), тогда как задача

$$J_i(\mathbf{m}) \rightarrow \inf, \quad \mathbf{m} \in K' \quad (21)$$

направлена на нахождение оболочки (Ω, \mathbf{m}) , обладающей наивысшей экранирующей эффективностью на классе устройств, отвечающих множеству K' .

Замечание 2. Обозначим через \mathbf{m}^{opt} минимайзер (оптимальное решение) задачи (19). Если при этом выполняется условие $J(\mathbf{m}^{opt}) = 0$, то это означает, согласно (16), (17), (18), что \mathbf{m}^{opt} является точным решением задачи маскировки. Однако такая ситуация может возникнуть лишь в исключительных случаях. Поэтому при проведении конкретных расчетов нашей основной целью будет являться нахождение таких параметров искомой оболочки в виде некоторого вектора $\mathbf{m}^{opt} \in K$ (либо $\mathbf{m}^{opt} \in K'$), для которого $J(\mathbf{m}^{opt})$ принимает достаточно малое значение, имеющее, например, порядок 10^{-4} , 10^{-5} и ниже, которому соответствует высокая маскировочная эффективность. Аналогичный факт справедлив и в отношении задачи экранирования (21). ■

4 Анализ результатов вычислительных экспериментов

Обсудим здесь результаты численного решения задач маскировки для следующих (часто используемых в литературе) исходных данных:

$$a = 0.05 \text{ м}, \quad b = 0.06 \text{ м}, \quad \mu_0 = 1, \quad R = 3 \text{ м}.$$

В качестве границ μ_{min} и μ_{max} множеств K и K' мы будем использовать две пары

$$(0.08; 20), \quad (0.02; 50) \quad (22)$$

для анизотропного сценария и три пары

$$(0.007; 14), \quad (0.01; 100), \quad (0.007; 140) \quad (23)$$

для изотропного сценария.

Для удобства разобьем множество всех вычислительных экспериментов на две группы: первая группа отвечает задаче маскировки для анизотропного случая, тогда как вторая группа отвечает задачам маскировки и экранирования для чисто изотропного случая. Наш первый тест относится к решению экстремальной задачи (19) для случая полностью анизотропной многослойной оболочки (Ω, \mathbf{m}) для первой пары $\mu_{min} = 0.08$ и $\mu_{max} = 20$ значений в (22). Этой паре отвечает контраст $\mu_{max}/\mu_{min} = 250$ и значение коэффициента анизотропии γ , равное 15.8 в силу формулы (9).

Численный анализ для различных значений $M = \overline{1, 16}$ показал (см. табл. 1), что оптимальные значения $(\mu_{rm}^{opt}, \mu_{\phi m}^{opt})$ магнитных проницаемостей всех слоев, найденные с помощью МРЧ, совпадают с парой (μ_{min}, μ_{max})

для каждого слоя при любом $M = \overline{1, 16}$, а следовательно, соответствующий минимайзер \mathbf{m}^{opt} задачи (19), отвечающий первой паре в (22), имеет вид

$$\mathbf{m}^{opt} = ((\mu_{min}, \mu_{max}); (\mu_{min}, \mu_{max}); \dots; (\mu_{min}, \mu_{max})), \quad (24)$$

причем выполняется соотношение $J(\mathbf{m}^{opt}) = 3.38 \cdot 10^{-2}$. Это означает, что все слои проектируемой многослойной оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$ должны быть заполнены одной и той же анизотропной средой с проницаемостями $\mu_{rm}^{opt} = 0.08$ и $\mu_{\varphi m}^{opt} = 20$. Другими словами, спроектированная с помощью предложенной оптимизационной технологии оболочка должна представлять собой единый анизотропный образец, для которого глобальные проницаемости μ_r^{opt} , μ_{φ}^{opt} и минимальное значение $J(\mathbf{m}^{opt})$, обратное к маскировочной эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$, при любом числе слоев $M = \overline{1, 16}$ определяются соотношениями (см. табл. 1)

$$\mu_r^{opt} = \mu_{min} = 0.08, \quad \mu_{\varphi}^{opt} = \mu_{max} = 20, \quad J(\mathbf{m}^{opt}) = 3.38 \cdot 10^{-2}. \quad (25)$$

Ясно, что среди всех анизотропных оболочек, отвечающих элементам множества K , оптимальная оболочка $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$ является наиболее простой с точки зрения технической реализации. Однако оптимальное значение $J(\mathbf{m}^{opt})$ в (25) соответствует слабой маскировочной эффективности (см. Замечание 2) проектируемой анизотропной маскировочной оболочки. Таким образом, даже оптимальное решение задачи (19) (отвечающее однородной анизотропной оболочке) с компонентами $\mu_r = \mu_{min} = 0.08$ и $\mu_{\varphi} = \mu_{max} = 20$ не обеспечивает высокой маскировочной эффективности. Это можно объяснить, используя физические соображения, малостью коэффициента анизотропии $\gamma = 15.8$ спроектированной маскировочной оболочки. В этом также можно убедиться с помощью анализа изолиний магнитного поля $\Phi[\mathbf{m}^{opt}]$, приведенных на рис. 3а при выполнении (25), которые во внешности оболочки Ω заметно искривлены, т.е. возмущены по сравнению с прямыми изолиниями поля Φ_a . Этот факт, малое значение коэффициента анизотропии γ , равное 15.8, и относительно большое значение $J[\mathbf{m}^{opt}] = 3.38 \cdot 10^{-2}$ функционала качества J демонстрируют низкую маскировочную эффективность оболочки $(\Omega, \mu_r, \mu_{\varphi})$.

ТАБЛИЦА 1. Задача маскировки: $\mu_{min} = 0.08$, $\mu_{max} = 20$, контраст = 250, $\gamma_m = 15.8$

M	$(\mu_{r1}^{opt}, \mu_{\varphi1}^{opt})$	$(\mu_{r2}^{opt}, \mu_{\varphi2}^{opt})$...	$(\mu_{rM}^{opt}, \mu_{\varphiM}^{opt})$	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$
1	(0.08, 20)				3.38·10 ⁻²
2	(0.08, 20)	(0.08, 20)			
4	(0.08, 20)	(0.08, 20)	(0.08, 20)	(0.08, 20)	
8	(0.08, 20)	(0.08, 20)	(0.08, 20)	(0.08, 20)	
12	(0.08, 20)	(0.08, 20)	(0.08, 20)	(0.08, 20)	
16	(0.08, 20)	(0.08, 20)	(0.08, 20)	(0.08, 20)	

Для того, чтобы повысить маскировочную эффективность проектируемой оболочки, следует увеличить значение μ_{max}/μ_{min} (названное выше контрастом пары (μ_{min}, μ_{max})). Это можно сделать либо за счет уменьшения значения μ_{min} , либо за счет увеличения значения μ_{max} . В сделанном выводе можно убедиться из анализа результатов вычислительных экспериментов для второй пары $\mu_{min} = 0.02$ и $\mu_{max} = 50$ в (22), которой отвечает контраст $\mu_{max}/\mu_{min} = 2500$ и коэффициент анизотропии $\gamma = 50$.

Как показал численный анализ (см. табл. 2), оптимальные значения μ_{rm}^{opt} , $\mu_{\varphi m}^{opt}$ магнитных проницаемостей всех слоев, найденные с помощью МРЧ, опять совпадают при любом $M = \overline{1, 16}$ с новой парой (μ_{min}, μ_{max}) . Это соответствует заполнению всех слоев одной и той же анизотропной средой с проницаемостями $\mu_{rm}^{opt} = 0.02$ и $\mu_{\varphi m}^{opt} = 50$, причем, как вытекает из табл. 2, решение задачи (19) определяется соотношениями

$$\mu_r^{opt} = 0.02, \quad \mu_{\varphi}^{opt} = 50, \quad J(\mathbf{m}^{opt}) = 6.59 \cdot 10^{-5} \quad (26)$$

для каждого $M = \overline{1, 16}$, где \mathbf{m}^{opt} определено в (24). Подчеркнем, что значение $J(\mathbf{m}^{opt})$ в (26) соответствует (в силу Замечания 2) высокой маскировочной эффективности спроектированной анизотропной маскировочной оболочки. В этом также можно убедиться с помощью анализа изолиний магнитного поля $\Phi[\mathbf{m}^{opt}]$, приведенных на рис. 3б при выполнении (26), которые являются прямыми во внешности оболочки Ω , означая невозмущенность поля Φ_a вне Ω . Такая визуализация создает для внешнего наблюдателя иллюзию отсутствия оболочки во внешне приложенном магнитном поле. Этот факт и малость значения $J(\mathbf{m}^{opt}) = 6.59 \cdot 10^{-5}$ функционала качества J демонстрируют высокую маскировочную эффективность однородной анизотропной оболочки $(\Omega, \mu_r, \mu_{\varphi})$. Сравнение рис. 3а и 3б подтверждает тот факт, что увеличение значения коэффициента анизотропии спроектированной маскировочной оболочки за счет увеличения значения контраста μ_{ma}/μ_{min} параметров, входящих в определение множества управлений, приводит к существенному повышению маскировочной эффективности спроектированной анизотропной оболочки.

Однако нужно отметить, что полученному оптимальному решению \mathbf{m}^{opt} отвечает анизотропный материал, который хотя и является однородным, но он обладает достаточно высоким коэффициентом анизотропии. Последнее существенно усложняет техническую реализацию решения \mathbf{m}^{opt} . Один из способов избавления от этого недостатка состоит в том, чтобы воспользоваться теорией эффективной (изотропной) среды, используемой в инженерной физике [42, 43]. Согласно этой теории, примененной к рассматриваемому нами физическому сценарию, действие анизотропной однородной оболочки $(\Omega, \mu_r^{opt}, \mu_{\varphi}^{opt})$ при малой ее толщине $b - a$ эквивалентно (по своей маскировочной эффективности) действию

двух концентрических оболочек в виде колец $a < r < c$ и $c < r < b$, заполненных однородными изотропными средами с определенным образом выбранными магнитными проницаемостями (см. [41, с. 112]).

Вместо этой теории мы воспользуемся в нашей работе разработанной оптимизационной технологией, которую можно рассматривать как ее математический аналог. Согласно данной технологии задача нахождения магнитной маскировочной оболочки, обладающей наивысшей эффективностью в рассматриваемом классе устройств и простотой технической реализации, сводится к нахождению минимума функционала J на множестве K' , введенном в (2), т.е. к нахождению решения задачи (20). Напомним в этой связи, что именно множество K' описывает множество всех M -слойных кусочно-однородных изотропные оболочки, каждый слой которых заполнен однородной изотропной средой с постоянной магнитной проницаемостью μ_m из интервала $[\mu_{min}, \mu_{max}]$.

ТАБЛИЦА 2. Задача маскировки: $\mu_{min} = 0.02$, $\mu_{max} = 50$, контраст = 2500, $\gamma_m = 50$

M	$(\mu_{r1}^{opt}, \mu_{\varphi1}^{opt})$	$(\mu_{r2}^{opt}, \mu_{\varphi2}^{opt})$...	$(\mu_{rM}^{opt}, \mu_{\varphiM}^{opt})$	$J_i(\mathbf{m}^{opt})$
1	(0.02, 50)				$6.59 \cdot 10^{-5}$
2	(0.02, 50)	(0.02, 50)			
4	(0.02, 50)	(0.02, 50)	(0.02, 50)	(0.02, 50)	
8	(0.02, 50)	(0.02, 50)	(0.02, 50)	(0.02, 50)	
12	(0.02, 50)	(0.02, 50)	(0.02, 50)	(0.02, 50)	
16	(0.02, 50)	(0.02, 50)	(0.02, 50)	(0.02, 50)	

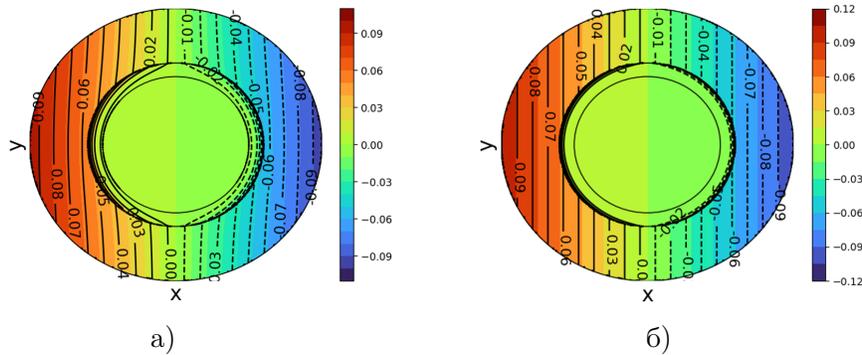


Рис. 3. Изолинии магнитного потенциала Φ в случае однойслойной анизотропной маскировочной оболочки с проницаемостью а) $\boldsymbol{\mu} = \text{diag}(\mu_r, \mu_\varphi) = \text{diag}(0.08, 20)$ и б) $\boldsymbol{\mu} = \text{diag}(0.02, 50)$.

Как уже выше указывалось, мы обсудим результаты вычислительных экспериментов по решению задач (20) и (21) для трех введенных в

(23) разных пар (μ_{min}, μ_{max}) с увеличивающимся контрастом μ_{max}/μ_{min} . Предварительно отметим, что все введенные в (23) значения, кроме $\mu_{min} = 0.007$ и $\mu_{min} = 0.01$, отвечают магнитным проницаемостям известных природных или инженерных материалов. Так, значение $\mu_{max} = 14$ описывает магнитную проницаемость никель-цинкового феррита, $\mu_{max} = 100$ описывает магнитную проницаемость стали и $\mu_{max} = 140$ описывает магнитную проницаемость никеля. Что касается значений $\mu_{min} = 0.007$ и $\mu_{min} = 0.01$, то они описывают проницаемости известного сверхпроводникового метаматериала – ниобий-титанового сплава [44]. Использование введенного (указанного) материала, обладающего близкой к нулю магнитной проницаемостью, позволяет добиться успеха в случае изотропного сценария.

Перейдем теперь к анализу результатов вычислительных экспериментов для тестов второй группы. Начнем с результатов по решению задачи экранирования. Как показал численный анализ, оптимальное решение задачи экранирования обладает важным свойством, которое носит название принципа релейности (или bang-bang принципа).

Согласно этому принципу каждая компонента μ_m^{opt} оптимального решения \mathbf{m}^{opt} задачи (21) принимает лишь одно из двух значений μ_{min} или μ_{max} , причем эти значения чередуются между собой. Указанное свойство релейности справедливо для решений задачи экранирования и для других статических моделей (см., например, [32]). В то же время, как показал численный анализ, для задачи маскировки принцип релейности выполняется лишь с точностью до последнего управления μ_M^{opt} . Более конкретно, для компонент μ_m^{opt} оптимального решения \mathbf{m}^{opt} с номерами $m = \bar{1}, M - \bar{1}$ выполняется строгое чередование, т.е. выполняется одно из двух соотношений

$$\mu_1^{opt} = \mu_3^{opt} = \dots = \mu_{M-1}^{opt} = \mu_{min}, \quad \mu_2^{opt} = \mu_4^{opt} = \dots = \mu_{M-2}^{opt} = \mu_{max} \quad (27)$$

либо

$$\mu_2^{opt} = \mu_4^{opt} = \dots = \mu_{M-1}^{opt} = \mu_{min}, \quad \mu_1^{opt} = \mu_3^{opt} = \dots = \mu_{M-2}^{opt} = \mu_{max},$$

тогда как последнее значение μ_M^{opt} может принимать любое значение из интервала $[\mu_{min}, \mu_{max}]$, так что выполняется соотношение

$$\mu_{min} \leq \mu_M^{opt} \leq \mu_{max}. \quad (28)$$

Таким образом, именно поведением последней компоненты μ_M^{opt} вектора \mathbf{m}^{opt} отличается решение задачи маскировки от соответствующего решения задачи экранирования, причем указанный факт справедлив и для других статических моделей, рассмотренных, в частности в [32, 35, 36, 38]. Это отличие в поведении наглядно проявляется на рис. 4, где представлены схематические визуализированные изображения экранирующей (рис. 4а) и маскировочной (рис. 4б) оболочек при любом четном $M \leq 16$, отличающихся лишь значением μ_M^{opt} .

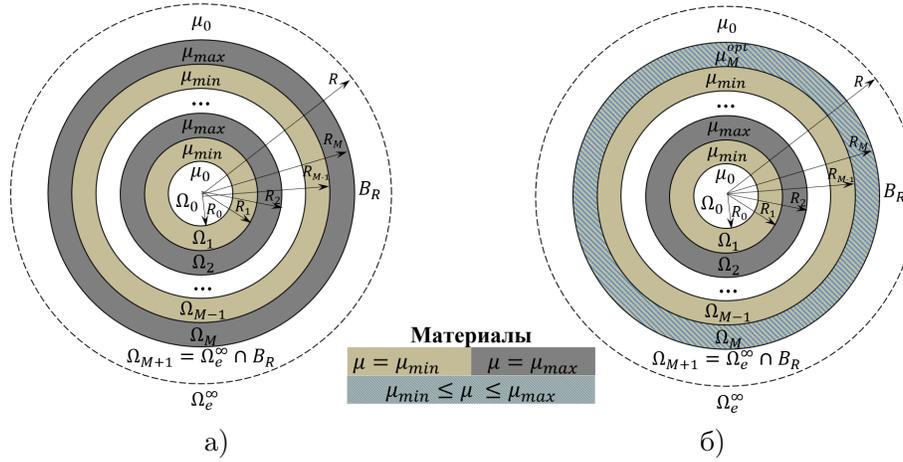


Рис. 4. Схематическое изображение оптимальных многослойных изотропных оболочек, полученных с помощью решения задач экранирования (а) либо маскировки (б) для пары значений μ_{min} и μ_{max} , являющихся границами множества K .

Второе важное свойство (установленное с помощью проведенных вычислительных экспериментов) состоит в том, что для любого числа слоев M величина (минимальное значение) $J^{opt} = J(\mathbf{m}^{opt})$ убывает, а, следовательно, маскировочная эффективность проектируемой оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$ растет с увеличением контраста μ_{max}/μ_{min} . Аналогичный факт справедлив и для J_i^{opt} .

Наглядным подтверждением этих двух свойств оптимального решения являются табл. 3–5 и рис. 5. В табл. 3 (4 либо 5) представлены результаты решения задачи (19) для первой (второй либо третьей) пары в (23) в виде оптимальных значений μ_1^{opt} , μ_2^{opt} , μ_{M-1}^{opt} , μ_M^{opt} магнитных проницаемостей двух первых и двух последних слоев оболочки и значений $J(\mathbf{m}^{opt})$ функционала J на оптимальном решении \mathbf{m}^{opt} задачи маскировки (19). На рис. 5 представлены графики зависимости минимального значения $J^{opt} \equiv J(\mathbf{m}^{opt})$ от числа слоев M для трех разных пар (μ_{min}, μ_{max}) , приведенных в (23).

Анализ табл. 3–5 показывает, что найденные значения μ_1^{opt} , μ_2^{opt} , μ_{M-1}^{opt} в точности удовлетворяют соотношениям (27) и (28). (То же самое справедливо и для остальных значений μ_m^{opt} при $3 \leq m \leq M-2$ в силу свойства релейности). Кроме того, как следует из табл. 3 при увеличении M от 2 до 16 значения $J(\mathbf{m}^{opt})$ уменьшаются с $2.70 \cdot 10^{-2}$ до значения $6.39 \cdot 10^{-3}$, которому соответствует слабая маскировочная эффективность оптимальной оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{opt})$. В свою очередь, при увеличении M от 2 до 16 значения $J(\mathbf{m}^{opt})$ уменьшаются с $1.64 \cdot 10^{-2}$ до значения $1.44 \cdot 10^{-4}$ в случае табл. 4 и $9.60 \cdot 10^{-3}$ до значения $1.26 \cdot 10^{-6}$ в случае

ТАБЛИЦА 3. Задача маскировки: $\mu_{min} = 0.007$, $\mu_{max} = 14$, контраст = 2800, $\gamma_m = 1$

M	μ_1^{opt}	μ_2^{opt}	μ_{M-1}^{opt}	μ_M^{opt}	$J(\mathbf{m}^{opt})$
2	0.007	14			$2.70 \cdot 10^{-2}$
4	0.007	14	0.007	14	$9.72 \cdot 10^{-3}$
8	0.007	14	0.007	14	$6.74 \cdot 10^{-3}$
12	0.007	14	0.007	14	$6.43 \cdot 10^{-3}$
16	0.007	14	0.007	14	$6.39 \cdot 10^{-3}$

ТАБЛИЦА 4. Задача маскировки: $\mu_{min} = 0.01$, $\mu_{max} = 100$, контраст = 10000, $\gamma_m = 1$

M	μ_1^{opt}	μ_2^{opt}	μ_{M-1}^{opt}	μ_M^{opt}	$J(\mathbf{m}^{opt})$
2	0.01	100			$1.64 \cdot 10^{-2}$
4	0.01	100	0.01	18.47	$4.54 \cdot 10^{-3}$
8	0.01	100	0.01	28.80	$5.13 \cdot 10^{-4}$
12	0.01	100	0.01	34.50	$2.17 \cdot 10^{-4}$
16	0.01	100	0.01	37.92	$1.44 \cdot 10^{-4}$

ТАБЛИЦА 5. Задача маскировки: $\mu_{min} = 0.007$, $\mu_{max} = 140$, контраст = 28000, $\gamma_m = 1$

M	μ_1^{opt}	μ_2^{opt}	μ_{M-1}^{opt}	μ_M^{opt}	$J(\mathbf{m}^{opt})$
2	0.007	140			$9.60 \cdot 10^{-3}$
4	0.007	140	0.007	20.91	$9.32 \cdot 10^{-4}$
8	0.007	140	0.007	37.19	$2.30 \cdot 10^{-5}$
12	0.007	140	0.007	49.64	$3.58 \cdot 10^{-6}$
16	0.007	140	0.007	59.49	$1.26 \cdot 10^{-6}$

табл. 5. Последнему значению соответствует достаточно высокая маскировочная эффективность оптимальной оболочки (Ω , \mathbf{m}^{opt}).

Факт уменьшения $J(\mathbf{m}^{opt})$ с увеличением контраста μ_{max}/μ_{min} также вытекает из рис. 5: чем больше контраст μ_{max}/μ_{min} , тем ниже на рис. 5 график функции $J^{opt} = J^{opt}(M)$, описывающей зависимость J^{opt} от M , а следовательно, тем выше маскировочная эффективность соответствующей оболочки (Ω , \mathbf{m}^{opt}).

Более того, поскольку оптимальное решение содержит в силу своей структуры только два чередующихся (с точностью до последнего слоя) легкодоступных природных либо инженерных материала, то слои $\Omega_1, \dots, \Omega_{M-1}$ спроектированной маскировочной оболочки допускают простую техническую реализацию. Что касается последнего слоя Ω_M , то проблема его технической реализации не является принципиальной в виду больших успехов, достигнутых к настоящему времени в области

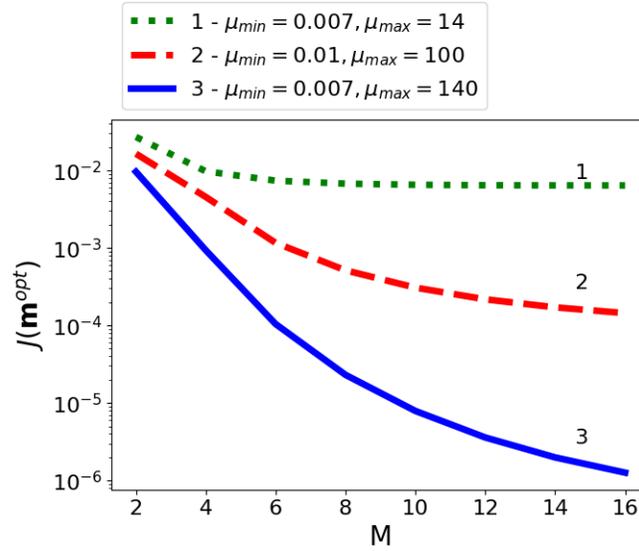


Рис. 5. Графики зависимости минимального значения $J^{opt} \equiv J(\mathbf{m}^{opt})$ функционала качества J , соответствующего задаче маскировки, от числа изотропных слоев M для трех разных пар (μ_{min}, μ_{max}) , приведенных в (23).

создания композитов и метаматериалов с заданными магнитными свойствами.

5 Заключение

В этой статье мы изучили обратные задачи для 2D модели магнитостатики, возникающие при разработке технологий дизайна устройств маскировки материальных тел в виде кольцевых слоистых оболочек. С использованием предложенной авторами оптимизационной технологии указанные задачи были сведены к конечномерным задачам управления, в которых магнитные проницаемости отдельных слоев играют роль управлений. Проведенный численный анализ показал, что высокая эффективность проектируемых устройств магнитной маскировки может быть достигнута при использовании как однослойных анизотропных оболочек в виде колец с высокой степенью анизотропии, так и многослойных кольцевых оболочек, состоящих из нескольких изотропных однородных слоев с оптимально выбранными постоянными проницаемостями. Их значения находятся с помощью разработанного численного алгоритма, использующего метод роя частиц. В случае изотропных оболочек построенные оптимальные решения \mathbf{m}^{opt} обладают свойством релейности, согласно которому для любого числа слоев M каждая компонента μ_m^{opt} , $m = \overline{1, M}$ оптимального решения \mathbf{m}^{opt} (кроме последней μ_M^{opt}) принимает

одно из двух значений: μ_{min} и μ_{max} , являющихся границами множества управлений K . Это позволяет сделать важный вывод о том, что предложенная оптимизационная технология позволяет построить оптимальные решения задач маскировки и экранирования, которым при надлежащем выборе множества управлений отвечают высокоэффективные слоистые оболочки, обладающие простотой технической реализации.

References

- [1] A. Alu, N. Engheta, *Achieving transparency with plasmonic and metamaterial coatings*, Physical Review E, **72**:1 (2005), 1–9.
- [2] J.B. Pendry, D. Shurig, D.R. Smith, *Controlling electromagnetic field*, Science, **312**:5781 (2006), 1780–1782.
- [3] U. Leonhardt, *Optical conformal mapping*, Science, **312**:5781 (2006), 1777–1780.
- [4] H. Chen, C. Chan, P. Sheng, *Transformation optics and metamaterials*, Nature materials, **9** (2010), 387–396.
- [5] S.A. Cummer, D. Shurig, *One path to acoustic cloaking*, New Journal of Physics, **9**:45 (2007), 1–8.
- [6] A. Sanchez, C. Navau, J. Prat-Camps, D.-X. Chen, *Antimagnets: controlling magnetic fields with superconductor/metamaterial hybrids*, New Journal of Physics, **13**:093034 (2011), 1–11.
- [7] S. Guenneau, C. Amra, D. Veynante, *Transformation thermodynamics: cloaking and concentrating heat flux*, Optic Express, **20** (2012), 8207–8218.
- [8] F. Yang, Z.L. Mei, T.Z. Jin, T.J. Cui, *DC electric invisibility cloak*, Physical Review Letters, **109**:053902 (2012), 1–5.
- [9] F. Gömöry, M. Šolovyov, J. Souc, C. Navau, J. Prat-Camps, A. Sanchez, *Experimental realization of a magnetic cloak*, Science, **335** (2012), 1466–1468.
- [10] T. Han, C.-W. Qiu, *Transformation Laplacian metamaterials: recent advances in manipulating thermal and dc fields*, Journal of Optics, **18**:5 (2016), 1–13.
- [11] L. Kroon, K. Jarrendahl, *Neutral shielding and cloaking of magnetic fields using isotropic media*, J. of Physics Condensed Matter., **29**:3 (2017), 1–11.
- [12] V.G. Romanov, *The inverse diffraction problem for acoustic equations*, Doklady Mathematics, **81**:2 (2010), 238–240.
- [13] V.G. Romanov, Ju.A. Chirkunov, *Nonscattering acoustic objects in an anisotropic medium of special kind*, Нерассеивающие акустические объекты в анизотропной среде специального вида // Doklady Mathematics, **87**:1 (2013), 73–75.
- [14] Ju.A. Chirkunov, *Nonscattering acoustic objects in a medium with a spherical stratification*, Acta Mechanica, **228**:7 (2017), 2533–2539.
- [15] B.I. Popa, S.A. Cummer, *Cloaking with optimized homogeneous anisotropic layers*, Physical Review A, **79** (2009), 1–4.
- [16] S. Xi, H. Chen, B. Zhang, B.-I. Wu, J.Au Kong, *Route to low-scattering cylindrical cloaks with finite permittivity and permeability*, Physical Review B, **79** (2009), 1–4.
- [17] A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenyev, *Solutions of Ill-Posed Problems*, 1st ed. Winston: New York, USA, 1977.
- [18] G.V. Alekseev, A.V. Lobanov, Yu.E. Spivak, *Optimization method in problems of acoustic cloaking of material bodies*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **57** (2017), 1459–1474.
- [19] G.V. Alekseev, Yu.E. Spivak, *Theoretical analysis of the magnetic cloaking problem based on an optimization method*, Differential Equations, **54** (2018), 1125–1136.
- [20] Yu.E. Spivak, *Optimization method in 2D magnetic cloaking problems*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **16** (2019), 812–825.

- [21] A.V. Lobanov, Yu.E. Spivak, *Optimization method in two-dimensional electrical cloaking problems*, Far Eastern Mathematical Journal, **19**:1 (2019), 31–42.
- [22] I. Peralta, V.D. Fachinotti, *Optimization-based design of heat flux manipulation devices with emphasis on fabricability*, Scientific Reports, **7** (2017), 1–8.
- [23] V.D. Fachinotti, A.A. Ciarbonetti, I. Peralta, I. Rintoul, *Optimization-based design of easy-to-make devices for heat flux manipulation*, International Journal of Thermal Sciences, **128** (2018), 38–48.
- [24] G. Fujii, Y. Akimoto, M. Takahashi, *Exploring optimal topology of thermal cloaks by CMA-ES*, Applied Physics Letters, **112**:061108 (2018), 1–5.
- [25] Q. Ji, G. Fang, J. Liang, *Achieving thermal magnification by using effective thermal conductivity*, Theoretical and Applied Mechanics Letters, **8** (2018), 164–170.
- [26] L. Lan, F. Sun, Y. Liu, C.K. Ong, Y. Ma, *Experimentally demonstrated a unidirectional electromagnetic cloak designed by topology optimization*, Applied Physics Letters, **103**:12 (2013), 1–4.
- [27] F. Cakoni, V.A. Kovtuneneko, *Topological optimality condition for the identification of the center of an inhomogeneity*, Inverse Problems, **34** (2018), 1–18.
- [28] G. Fujii, Y. Akimoto, M. Takahashi, *Direct-current electric invisibility through topology optimization*, Journal of Applied Physics, **123**:23 (2018), 1–7.
- [29] I. Peralta, V.D. Fachinotti, J.C. Álvarez Hostos, *A brief review on thermal metamaterials for cloaking and heat flux manipulation*, Advanced Engineering Materials, **22**:2 (2020), 1–10.
- [30] J.C. Álvarez Hostos, V.D. Fachinotti, I. Peralta, *Computational design of thermo-mechanical metadevices using topology optimization*, Applied Mathematical Modelling, **90** (2021), 758–776.
- [31] G. Fujii, Y. Akimoto, *Electromagnetic-acoustic biphysical cloak designed through topology optimization*, Optics Express, **30**:4 (2022), 6090–6106.
- [32] G.V. Alekseev, D.A. Tereshko, *Particle swarm optimization-based algorithms for solving inverse problems of designing thermal cloaking and shielding devices*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **135** (2019), 1269–1277.
- [33] Zh. Fang, J. Li, X. Wang, *Optimal control for electromagnetic cloaking metamaterial parameters design*, Computers and Mathematics with Applications, **79**:4 (2020), 1165–1176.
- [34] G. Alekseev, Yu. Spivak, *Numerical analysis of two-dimensional magnetic cloaking problems based on an optimization method*, Differential Equations, **56** (2020), 1219–1229.
- [35] G.V. Alekseev, A.V. Lobanov, *Optimization analysis of electrostatic cloaking problems*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **14** (2020), 599–609.
- [36] G.V. Alekseev, D.A. Tereshko, Y.V. Shestopalov, *Optimization approach for axisymmetric electric field cloaking and shielding*, Inverse Problems in Science and Engineering, **29**:1 (2021), 40–55.
- [37] G.V. Alekseev, Yu.E. Spivak, *Optimization-based numerical analysis of three-dimensional magnetic cloaking problems*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **61** (2021), 212–225.
- [38] G.V. Alekseev, A.V. Lobanov, *Optimization method for solving cloaking and shielding problems for a 3D model of electrostatics*, Mathematics, **11**:6 (2023), 1–17.
- [39] J. Kennedy, R. Eberhart, *Particle Swarm Optimization*, Proceedings of ICNN'95 – International Conference on Neural Networks, Perth, WA, Australia, **4** (1995), 1942–1948.
- [40] R. Poli, J. Kennedy, T. Blackwell, *Particle swarm optimization: an overview*, Swarm Intelligence, **1** (2007), 33–57.
- [41] G.V. Alekseev, *Invisibility Problem in Acoustics, Optics and Heat Transfer*, Dalnauka: Vladivostok, Russia, 2016. (In Russian)

- [42] T.C. Choy, *Effective Medium Theory: Principles and Applications*, (2nd edn), Oxford University Press, United Kingdom, 2015.
- [43] D. Stroud, *Generalized effective-medium approach to the conductivity of an inhomogeneous material*, Physical Review B, **12**:8 (1975), 3368–3373.
- [44] I. Itoh, K. Fujisawa, H. Otsuka, *NbTi/Nb/Cu multilayer composite materials for superconducting magnetic shielding*, Nippon Steel Technical Report, **85** (2002), 118–124.

GENNADY VALENTINOVICH ALEKSEEV
FAR EASTERN FEDERAL UNIVERSITY,
ISLAND RUSSKY, BAY AJAX, 10,
690922, VLADIVOSTOK, RUSSIA;
INSTITUTE OF APPLIED MATHEMATICS FEB RAS,
ST. RADIO, 7,
690041, VLADIVOSTOK, RUSSIA
Email address: alekseev@iam.dvo.ru

YULIYA EDUARDOVNA SPIVAK
INSTITUTE OF APPLIED MATHEMATICS FEB RAS,
ST. RADIO, 7,
690041, VLADIVOSTOK, RUSSIA
Email address: uliyaspivak@gmail.com