c

S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 510.64, 510,65, 510.6
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 03B45,
03Gxx, 03Hxx

МУЛЬТИ-АГЕНТНЫЕ ЛОГИКИ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ, УНИФИЦИРУЕМОСТЬ И ПРОЕКТИВНОСТЬ.

В.В. Рыбаков

Представлено В.В.Рыбаков

Abstract: *Данная работа изучает много-агентные неклассические модальные логики, порождаемые реляционными Крипке–подобными моделями, описывающими передачу информации. Мы вводим Крипке-подобные модели, существенно расширяющие обычные модели Крипке. Исследуются алгоритмические проблемы, возникающие в таких логиках. Решается проблема разрешимости для таких логик, находятся алгоритмы, проверяющие выполнимость формул. Решается проблема допустимости в таких логиках на основе техники проективности формул и унификации.*

Keywords: *модальные логики, мультиагентные логики, информация, знание, проблемы унификации и допустимости, разрешающие алгоритмы*

В.В. Рыбаков, Мульти-Агентные Логики с Взаимодействием.

Работа поддержана РНС (23-21-00213).
Поступила 1 Июля 2024 г., опубликована 22 декабря 2024 г.

1 Введение

Многоагентные и модальные логики активно используюсь в проблематике искусственного интеллекта и информатике начиная с 1980гг. Суммирование полученных к начальному времени результатов исследований можно найти в книге [1].

Мы ранее, анализируя этот подход, предложили его обобщение, используя вместо формулы – знает $K_i A$ – общее определение для информируемости агентов. Эта техника предложена и исследована в Rybakov [2]. В этой работе найдены теоремы о разрешимости таких логик и их приложения. С тех пор было уделено много внимания приложениям много-агентных модальных логик к проблемам построения формальный моделей для концепции знания (см. [2], [3, 4, 5, 6], [6,7, 8–16).

В этой нашей работе мы исследуем много-агентные неклассические модальные логики, порождаемые реляционными Крипке–подобными моделями, описывающими доступ агентов к информации и ее передачу. Эти модели существенно расширяют стандартную семантику Крипке, в них моделируются различные методы доступа агентов к информации. Основная цель – исследование алгоритмических проблем. Мы находим решение проблемы разрешимости для таких логик, находим алгоритмы, проверяющие выполнимость формул. На основе техники проективности формул и унификации решается проблема допустимости правил вывода в таких логиках.

2 Мульти-Агентные Логики с Взаимодействием

Начнем с модификации, предполагающей введение изолированных групп экспертов с редактируемыми правилами доступа к информации. Итак, основным стартовым объектом является линейный временной фрейм

$$F := \langle \bigcup_{i \in N} C(i), \leq \rangle$$

где $\bigcup_{i \in N}, C(i)$ – это множество состояний (миров, временных состояний, $i \in N$ – это индексы временный состояний, обозначаемые натуральными числами, $C(i)$ – некоторые множества состояний (элементов, миров), доступных в текущий момент времени i. Для $a \in C(i_1), b \in C(i_2)$, $a \leq b$ если и только если $i_1 \leq i_2$. То есть $\leq$ – это линейное (но не частично упорядоченное) отношение временной достижимости.

Фиксируется некоторое конечное множество индексов J для агентов (можем считать, что $J \subset N$, хотя можем выбрать для обозначения любые символы), и для каждого агента $j \in J$ и каждого $C(i)$ фиксируется некоторое подмножество - группа состояний (миров, элементов, которые агент может запрашивать об истинности утверждений). Основа предлагаемой нами модификации состоит в разделении временных состояний, достигнутых для анализа информации, на более структурированные модели. Рассматриваются собственно сами временные дискретные состояния (такие как сегодня, завтра, послезавтра) и в каждом отдельным временном состоянии рассматриваются формальные модели (модели Крипке), описывающие обмен информацией (моделирующие различные базы данных, такие как веб сайты и пр.) Этот подход изначально может быть проинтерпретирован следующим образом.

Определение 1. Временной многоагентный фрейм – это

$$F := \langle \bigcup_{i \in N} C(i), \leq, R_j, j \in J \rangle,$$

где $i \in N$ и любое $C(i)$ является просто некоторым множеством (называемым интерпретируемым как все информационные базы данных (веб узлы), доступные во время i). При разных i_1 и i_2 множества $C(i_1)$ и $C(i_2)$ предполагаются непересекающимися.

Фиксируется некоторое конечное множество агентов J; любое J разбито на непересекающиеся множества агентов–экспертов, $J = J_1 \cup J_1 \cup \ldots \cup J_k$. Каждому J_m в любом $C(i)$ соответствует некоторое подмножество $Q(J_{i,m})$ множества $C(i)$ и все $Q(J_{i,m})$ также предполагаются непересекающимися. Также предполагаем, что объединение всех $Q(J_{i,m})$ в $C(i)$ дает все множество $C(i)$ (т.е компетенция агентов покрывает все состояния). Бинарные отношения достижимости агентов R_j между состояниями любого множества $C(i)$ для любого $j \in J$ определяются следующим образом

$$\forall a, b \in C(i), aR_jb \iff \exists Q(J_{i,m})[j \in J_m \& (a, b \in Q(J_{i,m}))].$$

То есть, все агенты из J_m могут видеть все состояния из $Q(J_{i,m})$ (внутри любого $C(i)$) и только эти состояния. Это значит, что они обладают абсолютно равными и одинаковыми возможностями для консультации об истинности информации. Это представляется реалистичным и более точным подходом к согласованию истинности информации. А именно, в любой фиксированный момент текущего времени (сегодня, например), для каждого эксперта существует некоторое фиксированное сообщество экспертов с которым эксперт может взаимно обмениваться информацией о том истинно ли утверждение.

Естественно любой фрейм превращается в модель введением означивания логических переменных, а именно

Определение 2. *Модель на фрейме F задается введением некоторого означивания V на F некоторого множества пропозициональных переменных p, где $V(p) \subseteq \bigcup_{i \in N} C(i)$. Все состояния из $V(p)$ трактуются как те, на которых переменные p истинны относительно V.*

Логический язык стандартно включает все булевские логические операции, модальные операции $\Box$ и $\Diamond$ и унарные логические операции K_i

для всех $i \in J$, $K_i\varphi$ – означает – агент i знает φ, или агент i может узнать φ (мы не фиксируем жестко трактовку). Отношения, определяющие истинность логических операций перечислены ниже. Пусть задан фрейм $F := \langle \bigcup_{i \in N} C(i), \leq \rangle$ и модель $M := \langle F, V \rangle$ на нем.

Определение 3. $\forall a \in \bigcup_{i \in N} C(i)$: $(F, a) \Vdash_V p \;\Leftrightarrow\; p \in V(p)$;

для всех булевых операций определения вычисления истинности обычные и

$$\forall a \in C(i) \;\; [(F, a) \Vdash_V \Box\varphi \;\Leftrightarrow\; \forall b \in C(j)(i \leq j \Rightarrow (F, b) \Vdash_V \varphi)))];$$

$$\forall a \in C(i) \;\; [(F, a \Vdash_V \Diamond\varphi \;\Leftrightarrow \exists b \in C(j)(i \leq j) \& (F, b) \Vdash_V \varphi)).]$$

Истинность логических операций знания K_j определяются так:

$$\forall a \in C(i) \; [(F, a) \Vdash_V K_j\varphi \;\Leftrightarrow \exists b[(aR_jb) \& (F, b) \Vdash_V \varphi)] \vee [(F, a) \Vdash_V \varphi])].$$

При такой интерпретации $K_i\varphi$ означает, что агент может узнать, хотя бы раз, что φ бывает истинно. Далее (уже стандартным образом) по любому фиксированному классу моделей определяются логики, а именно

Определение 4. *Для класса всех фреймов K, определенных выше (для каждого зафиксированного конечного множества агентов J), многоагентная логика $LMA(K)$, порожденная K, – это множество всех формул, истинных на всех состояниях фрейма при всех означиваниях*

Теорема 5. *Логика $LMA(K)$ разрешима, существует алгоритм проверяющий выполнимость формул.*

Доказательство. Итак, дана формула φ и мы должны проверить входит ли эта формула в $LMA(K)$. Заметим, что прямой метод вариаций фильтраций здесь неприменим. Может случится, что в некотором состоянии некоторого $C(i)$ все истинностные значения подформул проверяемой формулы совпадают с истинностными значениями подформул на некоторым состоянии фрейма, стоящим вне $C(i)$ в некотором $C(j)$. Тогда мы будем вынуждены сливать это состояние с некоторым состоянием из $C(j)$ и следовательно пересекать разные компоненты фрейма, что противоречит выбранному семантическому заданию логики. Поэтому необходима предварительная несложная техники отличная от фильтрации (и, далее, использование техники просеивания моделей). Итак, допустим, что формула φ выполняется в некоторой модели

$$(F, V) := \langle \bigcup_{i \in N} C(i), \leq, R_j, j \in J, V \rangle$$

на некотором состоянии a, $(F, a) \Vdash_V \varphi$; мы тогда естественно можем предположить, что имеет место $a \in C(0)$.

Первый шаг доказательства состоит в том, что мы изолируем каждое подмножество $Q(J_{i,m})$ в любом временном сгустке $C(i)$ и модифицируем отдельно каждое $Q(J_{i,m})$ (напомним, что они не пересекаются). Вводим отношение $\equiv$ на элементах множества $Q(J_{i,m})$:

$$\forall x, y \in Q(J_{i,m})[x \equiv y[\forall p \in Var()[x \Vdash_V py \Vdash_V p]].$$

Понятно что $\equiv$ является отношением эквивалентности, и мы замещаем любой $x \in Q(J_{i,m})$ классом эквивалентности $[x]_\equiv$. Мы оставляем между $[x]_\equiv$ все те же отношения достижимости R_j что и были ранее. То есть

$$\forall a, b \in Q(J_{i,m}), [a]_\equiv R_j [b]_\equiv \iff j \in J_m.$$

Эту процедуру мы выполняем с каждым $Q(J_{i,m})$ в любом сгустке $C(i)$ отдельно (напомним $Q(J_{i,m})$ не пересекаются). Эта процедура не является фильтрацией, на дает нам необходимое свойство: легко проверить индукцией по длине формул, что указанная трансформация сохраняет истинность формул

$$\forall x \in F, \forall \psi \in Sub()[(F, x) \Vdash_V \psi \qquad [x]_\equiv \Vdash_V \psi].$$

В итоге каждый сгусток $C(i)$ в модели, полученной описанным преобразованием (слиянием элементов в сгустках $C(i)$ исходной модели), становится конечным с числом состояний ограниченным числом вычислимым по размерности множества $Sub(\varphi)$. Далее работаем с только такими моделями и выполняем далее технику просеивания.

А именно, теперь, рассматриваем все из получившихся в результате этой конструкции сгустки $C(i)$ внутри всего фрейма как идентичные если они изоморфны. Пусть

$$\forall n \in N, \ M(n) := \{C(i) \mid i \geq n\}.$$

Ввиду того, что осталось только конечное число таких моделей C(i) и их число ограничено числом вычислимым от числа подформул множества $Sub(\varphi)$, получаем, что существует число $st \in N$, такое что

$$M(st) = M(k), \forall k \geq st.$$

Заметим, что среди временных сгустков $C(i)$, расположенных раньше st, мы можем оставить только вычислимое конечное число сгустков, выбирая максимальные по возможной структуре и расположенные по времени прежде st.

Пусть

$$Repr(st) := \{C(i_1), \ldots, C(i_t)\}$$

– это множество всех возможный различных сгустков из $M(st)$ при $i_j > st$. Порядок и последовательность выбора представителей неважны, но индексы i_j взяты в возрастающем порядке. Далее выберем множество

$$Repr(st2) := \{C(k_1), \ldots, C(k_t)\}$$

которое тоже является множеством всех возможный различных моделей $C(i)$ но уже из множества $M(i_t)$ следующих по времени строго после $C(i_t)$ (снова порядок и последовательность выбора представителей неважны, но тем не менее индексы k_j взяты в возрастающем порядке). Теперь преобразуем получившуюся модель, считая временной индексом следующим за k_t число st и удаляя полностью все сгустки выше времени k_t. Обозначим получившуюся модель через M_1.

Построение модели M_1 закончено и ее структура полностью описана выше (здесь мы опять не используем фильтрацию).

Лемма 6. Для любой формулы ψ из $Sub(\varphi)$ и для любого $a \in M_1$

$$(M_1, a) \Vdash_V \psi \iff (M, a) \Vdash_V \psi.$$

Доказательство следует несложной прямой индукцией по длине формул ψ учитывая выбор чисел st и k_t выше и выбор всех оставшихся в модели сгустков $C(i)$. □

Если же выполняется $(M_1, a) \Vdash_V \varphi$ для некоторой такой конечной модели M_1, то разворачивая цикл сгустков расположенных между $C(st)$ и $C(k_t)$ в возрастающую бесконечную цепь, получаем что $(M, a) \Vdash_V \varphi$ и для некоторой стандартной бесконечной модели M.

Таким образом, благодаря этой лемме, мы сводим вопрос о выполнимости в логике $LMA(K)$, порожденной бесконечными моделями с произвольной структурой моделей, к выполнимости формул на конечных моделях вида M_1 размера не выше вычислимого по размеру формулы. Теорема доказана. □.

Рассмотрим возможный вариант определения локального знания, локальной информации агентов, через предложенные семантические модели. Один из возможных путей выглядит так (итак пусть логическая связка LCK интерпретируется как обозначение для локального знания).

$$\forall a \in C(i) \;\; [(F, a) \Vdash_V LCK\varphi \;\Leftrightarrow [(F, a \Vdash_V \varphi] \vee$$
$$[\exists j \in J, \exists b \in C(i)(aR_j b \;\&\; (F, b) \Vdash_V \varphi]].$$

Ясно, что эта связка очевидно выразима в предложенном логическом языке, а именно

$$LCK\varphi \;\; \equiv \;\; \varphi \;\vee \bigvee_{j \in J} K_j \varphi.$$

То есть это означает, что либо формула φ истинна уже в текущем состоянии (на a) и существует агентные отношение достижимости из a к состоянию - базе данных – которая знает φ. Локальность здесь означает, что это возможно только внутри текущего кластера времени. $C(i)$. Думается, что такой подход разумен и хорошо совпадает часто с реальной регламентацией работы агентов для получения информации.

Сейчас мы введем еще один возможный способ формализовать локальное общее знание. Идея состоит в том, чтобы не назначать никакой регулярной системы изолированных баз знаний для только экспертов, а регламентировать доступ к информации предписанием агентам администратором. В принципе принятый подход состоит в том, что любому агенту жестко назначено множество состояний и агентов, с которыми он может консультироваться и получать от них информацию. Формально это выглядит следующим образом.

Определение 7. Фрейм внешне выглядит как и в предыдущем определении

$$F := \langle \bigcup_{i \in N} C(i), \leq, R_j, j \in J \rangle.$$

Но в данном случае мы определяем агентные отношения R_j нестандартным образом, чтобы смоделировать идею администрирования. Задаются они следующим образом. Выбрано и зафиксировано натуральное число k – число агентов. Выбирается некоторое зафиксированное конечное множество состояний $a = \{a_1, \ldots, a_k\} \in C(i)$ в моделях (возможны повторения); и для каждого из них зафиксировано некоторое множество состояний $In_a \subseteq C(I)$, с которыми агент a (как состояние) может консультироваться, находясь в состоянии a:

$$R_a := \bigcup \{< a, b >|\ b \in In_a\} \cup \{< a, a >\}.$$

То есть теперь поведение R_a не регулярно и полностью определено администратором (хотя думается, это хорошо соответствует решениям, принятым реальным администраторам). Помимо этого, мы предполагаем, что различные множества R_a полностью не пресекаются – не имеют общих состояний вообще, ни одно состояние b модели не может входить как компонента бинарных отношений $< x, y >$ в разных R_a.

Для моделей на таких фреймах мы таким же как и ранее образом определяем вычисление истинности логических операций, в частности K_a. Как и ранее логика вводится обычным образом.

Определение 8. *Для класса K указанных фреймов, многоагентная логика LRI порожденная K – это множество всех формул, истинных на всех состояниях таких фреймов при всех возможных означиваниях.*

Теорема 9. *Логика LRI разрешима, существует алгоритм, проверяющий выполнимость формул.*

Доказательство. Мы вначале изолируем каждое множество

$$R_a := \bigcup \{< a, b >|\ b \in In_a\} \cup \{< a, a >\}$$

и выполняем на нем следующие преобразования. Пусть

$$\forall x, y \in In_a[xEy \quad [\forall p \in Var(\varphi)[x \Vdash_V p \ \ y \Vdash_V p]].$$

Очевидно, что это отношение E является отношением эквивалентности на In_a, и мы берем фактор множество на In_a по E и заменяем все $b \in In_a$ на содержащие их фактор множества $[b]_E$ и полагаем $[a]_E := \{a\}$, далее считаем $[a]_E R_a [b]_E$. Выполняем такое преобразование для каждого $C(i)$ и для каждого R_a при a из $C(i)$. Получаем модель M_1. В M_1 очевидно выполняется

$$\forall x \in F, \forall \psi \in Sub(\varphi)[(F, x) \Vdash_V \psi \qquad (M_1, [x]_E) \Vdash_V \psi],$$

где $[x]_E$ – это состояние, соответствующее x после сделанного преобразования.

После этого в любом сгустке $C(i)$ получившейся модели из множества всех получившихся R_a, изоморфных между собой как модели с означиванием, удалим все копии, оставив только одну такую уникальную модель R_a. В полученной таким образом модели M_2 очевидно тоже выполняется

$$\forall x \in M_1, \forall \psi \in Sub(\varphi)[(M_1, x) \Vdash_V \psi \qquad (M_2, x_s) \Vdash_V \psi],$$

где x_s – это состояние, соответствующее x после сделанного преобразования.

После этого получаем, что любое $C(i)$ конечно и имеет число элементов не выше числа эффективно вычислимого по числу подформул формулы φ.

Теперь, рассматриваем все из получившихся в результате этой конструкции модели $C(i)$ внутри всего фрейма как идентичные, если они изоморфны. Пусть $\forall n \in N,\ M(n) := \{C(i) \mid i \geq m\}$. После этого осталось только конечное число таких моделей C(i).

Ясно, что их число ограничено числом вычислимым из числа подформул нашей формулы. Поэтому получаем, что существует число $st \in N$, такое что $M(st) = M(k), \forall k \geq st$. Как мы уже использовали ранее среди временных сгустков $C(i)$, расположенных раньше st, мы можем оставить только вычислимое конечное число сгустков, выбирая максимальные по возможной структуре и расположенные по времени прежде st. Пусть как и ранее $Repr(st) := \{C(i_1, \ldots, C(i_t)\}$ – это множество всех возможный различных моделей такого сорта из $M(st)$ при $i_j > st$. Порядок и последовательность выбора представителей неважны, но индексы i_j взяты в возрастающем порядке. Далее мы снова выберем множество $Repr(st_F) := \{C(k_1, \ldots, C(k_t)\}$, которое тоже является множеством всех возможный различных моделей $C(i)$, но уже из $M(i_t)$ при $k_j > i_t$. (снова порядок и последовательность выбора представителей неважны, но индексы k_j взяты в возрастающем порядке).

Теперь преобразуем получившуюся модель, считая временным индексом следующим за k_t число st и удаляя полностью все сгустки выше времени k_t. Обозначим получившуюся модель через M_3.

Лемма 10. Для любой формулы ψ из $Sub(\varphi)$ и для любого $a \in M_2$

$$(M_2, a) \Vdash_V \psi \iff (M_3, a) \Vdash_V \psi.$$

Доказательство следует несложной прямой индукцией по длине формул ψ учитывая выбор чисел st и k_t выше и выбор всех оставшихся в модели сгустков $C(i)$. $\square$

В случае, когда выполняется $(M_3, a) \Vdash_V \varphi$ для некоторой такой конечной модели (M_3), то разворачивая цикл сгустков, расположенных между (C_{st}) и (C_{k_t}) в возрастающую бесконечную цепь, получаем, что $(M, a) \Vdash_V \varphi$ и для некоторой стандартной бесконечной модели M.

Таким образом, благодаря этой лемме, мы сводим вопрос о выполнимости в логике LRI, порожденной бесконечными моделями с произвольной структурой моделей, к выполнимости формул на конечных моделях вида M_3 размера не выше вычислимого по размеру формулы. Теорема доказана. $\square$

3 Вводная информация по унифицируемости

Кратко наполним,что подстановка для множества пропозициональных переменных (или букв) P – это некоторое отображение ε множества P во множество всех формул For. Любая такая подстановка может быть расширена на множество всех формул с посредством $\varepsilon(\varphi(x_1, \ldots, x_n)) := \varphi(\varepsilon(x_1), \ldots, \varepsilon(x_n))$.

Определение 11. Формула φ называется унифицируемой в логике L, если существует подстановка ε (называемая унификатором формулы φ) такая, что $\varepsilon(\varphi) \in L$.

Определение 12. *Унификатор ε для формулы φ в логике L является более общим чем унификатор ε_1 если существует подстановка δ такая, что для любой буквы x, $[\varepsilon_1(x) \equiv \delta(\varepsilon(x))] \in L$.*

Если логика разрешима, то обычно проверить унифицируемость формул довольно просто (теоретически, но сложность и длина вычислений может быть недопустимо высокой) : достаточно использовать только подстановки переменных в – истина-ложна $-\{\bot, \top\}$. Но проблема нахождения всех унификаторов гораздо более сложна.

Определение 13. Множество унификаторов CU для данной формулы φ в логике L является полным множеством унификаторов, если выполняется следующее. Для любого унификатора σ формулы φ в L, существует унификатор σ_1 из CU, такой что σ_1 более общий чем σ.

Для модальных логик, расширяющих модальную систему $S4$ определение проективности формул может быть дано следующим образом.

Определение 14. Формула φ называется проективной в логике L, если выполняется следующее. Существует подстановка σ (называемая проективной подстановкой для φ) такая что σ является унификатором для φ в L и $\Box\varphi[x_i \equiv \sigma(x_i)] \in L$ для любой переменной x_i из φ.

Лемма 15. Если подстановка σ_p проективна для φ в логике L, то $\{\sigma_p\}$ является полным множеством унификаторов для φ (т.е. подстановка σ_p является наиболее общим унификатором).

Доказательство. Действительно, пусть σ является унификатором для φ в L. Так как σ_p проективна для φ в L, мы получаем $\Box\varphi[x_i \equiv \sigma_p(x_i)] \in L$ для любой переменной x_i из φ. Применяя σ к формулам выше, мы получаем $\sigma(\Box\varphi)[\sigma(x_i) \equiv \sigma(\sigma_p(x_i))] \in L$, то есть $\sigma(x_i) \equiv \sigma(\sigma_p(x_i)) \in L$. Q.E.D.

Конечно не все унифицируемые формулы проективны в неклассических логиках, примеры широко известны.

Легко видеть, что если для разрешимой модальной логики L, расширяющей $S4$ мы можем определить проективна ли формула φ и вычислить ее проективный унификатор, то проблема допустимости правил вывода в L разрешима. Действительно, правило вывода $\varphi_1, \dots \varphi_n/\psi$ не допустимо в L если и только если существует унификатор для $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$, который не является унификатором для ψ. Но тогда вычислимый более общий унификатор, получаемый по проективной подстановке для $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ проверяет это. Эта интересная идея была введена в обиход логиков, работающих в неклассической логике, Silvio Ghilardi (см. [19]). Мы применим в этой статье технику проективности для решения проблемы допустимости в изучаемых в этой статье логиках.

4 Разрешимость Допустимости через Проективность

Применение проективности в данном конкретном случае логик близких к линейным, позволит дать нам очень короткое и компактное доказательство решения проблемы допустимости правил вывода. Такой подход через технику проективности был найден Сильвио Гиларди и впоследствии был применен к линейным модальным логикам (Wojciech Dzik, Piotr Wojtylak) для модальных логик, расширяющих S.4.3 [20], [18,19] и затем был развит для временных логик в V. Rybakov [17]. В этом параграфе нам необходима некая легкая модификация многоагентных фреймов, для того чтобы мы могли использовать технику проективных формул.

Определение 16. Как и ранее, в качестве фрейма мы можем использовать любую версию определенную ранее —

$$\mathbf{F} := \langle \bigcup_{\mathbf{i} \in \mathbf{N}} \mathbf{C}(\mathbf{i}), \leq, \mathbf{R_j}, \mathbf{j} \in \mathbf{J} \rangle.$$

Но для унификации через проективность нам необходимо присутствие некоторого состояния в каждом кластере $C(i)$: мы допускаем, что для любого $C(i)$ существует по крайней мере единственное состояние $Dis \in C(i)$ такое что,

$$\forall i \in N, \forall j \in J, \forall b \in C(i),\ [DisR_jb \iff b = Dis]\ \&\ [bR_jDis \iff b = Dis].$$

Этот элемент Dis называем от-соединенным или выключенным (disjoint), так как любой агент не может его достичь по R_j и снять с него информацию, и также будучи в любом другом состоянии не видит по R_j этот элемент (он как бы невидим агентам). В частности, мы полагаем, что в любой модели при любом выбранном означивании на таком фрейме все переменные на элементах типа Dis ложны ($(M, Dis) \Vdash_V \neg p_j$). Эти ограничения, тем самым, никак не ограничивают выразимость информации, но технически полезны для применения проективности. Как и ранее логика L – это множество всех формул истинных на всех таких возможных моделях.

Теорема 17. *В логике L любая унифицируемая формула является проективной. Унифицируемость формул в этой логике алгоритмически распознаваема. Существует алгоритм, строящий проективный унификатор для любой унифицируемой формулы. Поэтому проблема допустимости правил вывода разрешима для L.*

Доказательство. Вначале нужно доказать алгоритмическую распознаваемость унифицирумых формул. Эта задача не так тривиальна, как для просто булевой пропозициональной логики, но сравнительно достаточно несложна. Действительно, пусть дана произвольная формула $\varphi(x_1, ..., x_n)$ и она унифицируема. Наша логика обладает в частности моделями M, где каждый кластер $C(i)$ состоит только из одного состояния Dis.

Допустим, что формула $\varphi(x_1, ..., x_n)$ унифицируема в логике L и σ_1 ее унификатор. Пусть подстановка σ_1 действует следующим образом,

$$\forall x_i, \sigma_1(x_i) := \alpha_i, \text{ где } \alpha_i \in For$$

При этой подстановке формула $\varphi(x_1, ..., x_n)$ истинна на M, так как σ_1 ее унификатор. Тогда истинность любых переменных y_j из формул в указанных формулах α_i, участвующих в подстановке σ_1, принимают истинностное значение ложь на любом состоянии Dis из этой модели M, – поэтому мы можем считать, что

$$\sigma_1(y_j) = \bot$$

и при этой подстановке σ_1 на этой модели истинна наша формула. При этом мы не утверждаем, что модифицированная подстановка – унификатор в логике, но тем не менее очевидно верна

Лемма 18. Для данной модифицированной подстановки σ_1

$$\forall a \in M, (M, a) \Vdash_V \neg\sigma_1(y_j).$$

В этом случае любая из формул α_i при этой подстановке σ_1 принимает одно и то же истинностное значение истина или ложна одновременно на всех состояниях из этой модели (а она состоит только из таких состояний Dis). Поэтому (легкая индукция по длине формул α_i) верна

Лемма 19. В модели M,

$$\forall a, b \in M,\ \forall \alpha_i (M, a) \Vdash_V \sigma_1(\alpha_i)\ (M, b) \Vdash_V \sigma_1(\alpha_i).$$

Потому подстановка σ_1 вместо переменных формулы $\varphi(x_1, ..., x_n)$ просто истинностных значений формул α_i в указанной модели M при том заданном означивании σ_1, будет унификатором формулы $\varphi(x_1, ..., x_n)$ в нашей логике (так как $\varphi(x_1, ..., x_n)$ при σ_1 истинна на исходной модели M). Поэтому и здесь для проверки унифицируемости достаточно рассмотреть просто одноэлементную модель и истинность на ней.

Конечно мы не знаем точного значения действия σ_1 на одноэлементной модели (как и в булевой логике), но его можно уточнить простым перебором пользуясь разрешимостью логики (она доказывается как и ранее в этой статье для упомянутых логик, просто в начале доказательства надо слить все состояния типа Dis в любом кластере C(i) в одно состояние). Таким образом проблема распознавания унифицируемости в таких логиках разрешима. Зафиксируем необходимый нам в будущем некоторый вычисленный таким образом унификатор σ_3 для формулы $\varphi(x_1, ..., x_n)$,

$$\sigma_3(x_i) = \delta_i, \text{где } \delta_i \in \{\bot, \top\}.$$

Но вот проблема нахождения наиболее общих унификаторов совсем не так проста.

Приступая к доказательству проективности унифицирумых формул, для любой пропозициональной переменной x_i из любой данной формулы φ мы определим следующую подстановку. Пусть $Var(\Box\varphi)$ является множеством всех пропозициональных переменных из $\Box\varphi$ и $Sub(\Box\varphi)$ является множеством всех подформул формулы $\Box\varphi$. Возьмем любое $X \subseteq Sub(\Box\varphi)$, и далее фиксируем формулы.

Пусть для любой переменной x_i из $Var(\varphi)$,

$$\sigma(x_i) := [(\Box\varphi) \wedge x_i] \vee [\neg\Diamond\Box\varphi \wedge \sigma_3(x_i)] \vee$$
$$[\neg\Box\varphi \wedge \Diamond\Box\varphi \wedge \bot].$$

Докажем, что эта подстановка является унификатором для формулы φ в логике L. Выбираем любую модель нашей логики, т.е. любой фрейм F (с состояниями Dis в любом сгустке) с любым означиванием V для переменных x_i из данной формулы φ. Берем любое состояние $a \in F$.

Рассмотрим случай когда $(F,a) \Vdash_V \neg\Diamond\Box\varphi$. По определению подстановки σ_3, она является унификатором для формулы φ в логике, поэтому

$$\forall b \in F,\ (F,b) \Vdash_V \sigma_3(\varphi)) \text{ и соответсвенно } \forall b \in F,\ (F,b) \Vdash_V \sigma(\varphi)).$$

Допустим теперь что $(F,a) \Vdash_V \Box\varphi$. Тогда подстановка σ не меняет истинностных значений переменных x_i в сравнении с их истинностными значениями при оригинальном означивании V. Поэтому

$$(F,a) \Vdash_V x_i \ \ (F,a) \Vdash_V \sigma(x_i),\ \forall b \geq a\ (F,b) \Vdash_V x_i \ \ (F,b) \Vdash_V \sigma(x_i),$$

следовательно

$$(F,a) \Vdash_V \sigma(\Box\varphi).$$

Осталось рассмотреть случай когда

$$(F,a) \Vdash_V \neg\Box\varphi \wedge \Diamond\Box\varphi.$$

Пусть $C(i)$ – это наименьший сгусток, где формула $\Box\varphi$ истинна при оригинальном означивании V, пусть $Dis(i)$ и $Dis(i-1)$ – это два выбранных любых состояния типа Dis из $C(i)$ и $C(i-1)$ соответственно. Тогда для любой $x_i \in Var(\varphi)$ ввиду того, что состояния $Dis(i)$ и $Dis(i-1)$ являются выключенными имеет место

$$(F, Dis(i)) \Vdash_V \neg x_i \&\ (F, Dis(i-1)) \Vdash_V \neg x_i.$$

Используя это и вновь выключенность состояний $Dis(i)$ и $Dis(i-1)$ (ограничения на работу агентных операций R_j) прямой индукцией по длине формулы легко проверить, что для любой булевой формулы α построенной из переменных x_i

Лемма 20.

$$(F, Dis(i)) \Vdash_V \alpha \ \ (F, Dis(i-1)) \Vdash_V \alpha.$$

Кроме того верна

Лемма 21. Для любого состояния g типа Dis из любого сгустка $C(j)$ модели и любого означивания V_2 на M, и любой формулы β из $Sub(\Box\varphi)$

$$(F,g) \Vdash_{V_2} \bigwedge_{\beta \in Sub(\Box\varphi)} ([\beta \bigwedge_{j \in J} K_j\beta] \wedge [\bigwedge_{j \in J \in Sub(\Box\varphi)} [K_j\beta\beta]).$$

Доказательство прямо следует из определения агентных отношений достижимости R_j на состояниях типа Dis.

Из этих двух лемм, прямой индукцией по длине формул α выводится

Лемма 22. Для любой формулы α из $Sub(\Box\varphi)$, построенной из переменных x_i

$$(F, Dis(i)) \Vdash_V \sigma(\alpha) \quad (F, Dis(i-1)) \Vdash_V \sigma(\alpha).$$

Для сгустков $C(j)$ расположенных ниже $C(i{-}1)$ доказательство предыдущей леммы аналогичное, так как в таких сгустках при подстановке σ переменные имеют то же означивание после применения подстановки σ как и в $C(i-1)$.

Тем самым мы доказали, что подстановка σ, построенная нами и является унификатором для φ. Проективность этой подстановки очевидна.

Теорема доказана

References

[1] *Ronald Fagin, Joseph Y. Halpern, Yoram Moses and Moshe Vardi)* Reasoning About Knowledge, MIT, 1995).

[2] *V. V. Rybakov Refined common knowledge logics or logics of common information Archive for mathematical Logic 42 (2), 2003, 179-200.*

[3] *S. Artemov* Evidence-Based Common Knowledge, (Technical Report TR-2004018 CUNY Ph.D. Program in Computer Science, revised version)

[4] *S. Artemov* Explicit Generic Common Knowledge, Lect/ Notes in CS, LFCS 2013: Logical Foundations of Computer Science 2013, pp 16–28Cite as

[5] *S. Artemov* Justification awareness Journal of Logic and Computation 30 (8), 2020, 1431-1446

[6] *V Rybakov Temporal Multi-Agent's Logic, Knowledge, Uncertainty, and Plausibility* Agents and Multi-Agent Systems: Technologies and Applications, LNCS, 2021, 2005 - 2014.

[7] Baader F., Kusters R. *Unification in a description logic with transitive closure of roles.* In: Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning, LPAR 2001. Vol. 2250. LNCS, Springer (2001), 217 – 232.

[8] Rybakov V.V. *Problems of Substitution and Admissibility in the Modal System Grz and in Intuitionistic Propositional Calculus.* Annals of Pure and Applied Logic, 50(1), (1990) 71 – 106.

[9] Rybakov V.V. *Rules of Inference with Parameters for Intuitionistic logic.*- J. of Symbolic Logic, 57 (3) (1992), 912 – 923.

[10] Rybakov V.V. *Logical Consecutions in Discrete Linear Temporal Logic.* J. of Symbolic Logic, 70 (4) (2005), 1137 – 1149.

[11] Rybakov V. V. *Linear temporal logic with until and next, logical consecutions.* Annals of Pure and Applied Logic, 155 (2008), 32 – 45.

[12] Rybakov V. V.Projective formulas and unification in linear temporal logic LTLU, V Rybakov Logic Journal of the IGPL 22 (4), (2014), 665-672.

[13] Rybakov V. V. *Non-transitive linear temporal logic and logical knowledge operations*, Journal of Logic and Computation 26 (3), Oxford Press, 2016, 945-958

[14] Rybakov V.V. *Nontransitive temporal multiagent logic, information and knowledge, deciding algorithms*, Siberian. Math. J., 58, no 5, (2017), 875–886.

[15] Rybakov V.V., *Multiagent temporal logics with multivaluations*, Siberian. Math. J., 59, no 4, (2018), 710–720.

[16] Rybakov V.V., *Branching time agents' logic, satisfiability problem by rules in reduced form*, Siberian. Electron. Math. Izv., 16, (2019), 1158-–1170.

[17] Rybakov V. V. *Projective formulas and unification in linear temporal logic* $LTLU$, Logic Journal of the IGPL, Oxford Press$<$ 22 (4), (2014), 665-672.

[18] Ghilardi S. *Unification Through Projectivity,* J. of Logic and Computation, Oxford Press, 7(6) (1997), 733 – 752.

[19] Ghilardi S. *Unification, finite duality and projectivity in varieties of Heyting algebras,* Annals of Pure and Applied Logic, 127(1-3), (2004), 99 – 115.

[20] Dzik W., Wojtylak P. *Projective unification in modal logic.* Logic Journal of IGPL 20, (1), (2012), 121 – 153.

Рыбаков Владимир Владимирович
Сибирский Федеральный Университет,
пр. Свободный 79,
660041, Красноярск, Россия
Email address: vrybakov@sfu-kras.ru