

Мульти-Агентные Логика с Взаимодействием,
Унифицируемость и Проективность.
In English – Multi-Agent Logics with agents'
Interruption, Unification and Admissibility.

В.В.Рыбаков, V.V. Rybakov

Институт Математики и Фундаментальной Информатики,
Сибирский Федеральный Университет,
Свободный 79, Красноярск
660 041, и Институт Систем
Информатики РАН, Novosibirsk
Vladimir_Rybakov@mail.ru;

In English - V.V.Rybakov, Institute of Mathematics and Fundamental Informatics,
Siberian Federal University, av. Svobodnui 79, Krasnoyarsk, 660 041 and
(pat time) Institute Systems in Informatics RAN, Novosibirsk, Vladimir_Rybakov@mail.ru

УДК 510.64,510.65,510.66

Аннотация. ¹ Данная работа изучает много-агентные не классические модальные логики, порождаемые реляционными Крипке-подобными моделями, описывающими передачу информации. Мы вводим Крипке-подобные модели существенно расширяющие обычные модели Крипке. Исследуются алгоритмические проблемы возникающие в таких логиках. Решается проблема разрешимости для таких логик, находятся алгоритмы, проверяющие выполнимость формул. Решается проблема допустимости в таких логиках на основе техники проективности формул и унификации.

This paper works with multi-agent none-classical modal logics generated by relational Kripke-like models describing transfer information and it reliability. We suggest Kripke-like models essentially extending usual multi-model Kripke semantics. We primarily study algorithmic problems connected with such logics. Our aim is finding the proof that such logics are decidable, finding algorithms verifying satisfiability formulas, we solve the problem of admissibility inference rules via technique of projective formulas and unification, we prove that this problem is decidable

Ключевые слова: модальные логики, мультиагентные логики, информация, знание, проблемы унификации и допустимости, разрешающие алгоритмы

1 Введение

Многоагентные и модальные логики активно используются в проблематике искусственного интеллекта и информатике начиная с 1980гг. Суммирование полученных к начальному времени результатов исследований можно найти в книге [1].

Анализируя этот подход, мы ранее предложили его обобщение, используя вместо формулы – знает $K_i A$ – общее определение для информированности агентов. Этот подход

¹Работа поддержана РНС - No.23-21- 00213) - Russian Scientific Foundation (Project No.23-21- 00213)

описан в Rybakov [2], в той работе найдены теоремы о разрешимости таких логик и их приложения. С тех пор было уделено много внимания приложениям много-агентных модальных логик к проблемам построения формальных моделей для концепции знания (см. [2], [3, 4, 5, 6], [6,7, 8–16]).

В этой нашей работе мы исследуем много-агентные не классические модальные логики, порождаемые реляционными Крипке-подобными моделями, описывающими доступ агентов к информации и ее передачу. Эти модели существенно расширяют стандартную семантику Крипке, в них моделируются различные методы доступа агентов к информации. Основная цель – исследование алгоритмические проблемы возникающие в таких логиках. Мы находим решение проблемы разрешимости для таких логик, находим алгоритмы, проверяющие выполнимость формул. На основе техники проективности формул и унификации решается проблема допустимости правил вывода в таких логиках.

2 Мульти-Агентные Логика с Взаимодействием

Начнем с модификации, предполагающей введение изолированных групп экспертов с редактируемыми правилами доступа к информации. Итак, основным стартовым объектом является линейный временной фрейм

$$\mathbf{F} := \langle \bigcup_{i \in N} C(i), \leq \rangle$$

где $\bigcup_{i \in N} C(i)$ это просто множество – это множество состояний (миров, временных состояний, $i \in N$ это индексы временных состояний, обозначаемые натуральными числами, $C(i)$ – некоторые множества состояний (элементов, миров) доступных в текущий момент времени i). Для $a \in C(i_1), b \in C(i_2), a \leq b$ если и только если $i_1 \leq i_2$. То есть $\leq$ это линейное (но не частично упорядоченное) отношение временной достижимости.

Фиксируется некоторое конечное множество индексов J для агентов, и для каждого агента $j \in J$ и каждого $C(i)$ фиксируется некоторое подмножество – группа состояний (миров, элементов) с которые агент может консультироваться об истинности утверждений. Основа предлагаемой нами новой модификации состоит в разделение линейных временных состояний, принятый в предпринятом ранее анализе на собственно временные дискретные состояния (сегодня, завтра, послезавтра) и последующее разделение линейных временных состояний на доступные в это время информационные состояния (базы данных, веб сайты и пр.) доступные агентам для консультаций. Этот подход изначально может быть проинтерпретирован следующим образом.

Определение 1. Временной многоагентный фрейм это

$$\mathbf{F} := \langle \bigcup_{i \in N} C(i), \leq, R_j, j \in J \rangle$$

где при $i \in N$ и любое $C(i)$ является просто некоторым множеством (называемым интерпретируемым как все информационные базы данных (веб узлы), доступные во время i). При разных i_1 и i_2 множества $C(i_1)$ и $C(i_2)$ предполагаются непересекающимися.

Фиксируется некоторое конечное множество агентов J ; любое J разбито на непересекающиеся множества агентов-экспертов, $J = J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_k$. Каждому J_m в любом $C(i)$ соответствует некоторое подмножество $Q(J_{i,m})$ множества $C(i)$ и все $Q(J_{i,m})$ также предполагаются непересекающимися.

Бинарные отношения достижимости агентов R_j между состояниями любого множества $C(i)$ для любого $j \in J$ определяются следующим образом

$$\forall a, b \in C(i), a R_j b \iff \exists Q(J_{i,m})(a, b \in Q(J_{i,m})).$$

То есть, все агенты из J_m могут видеть все состояния из $Q(J_{i,m})$ (внутри любого $C(i)$) и только эти состояния. Это значит, что они обладают абсолютно равными и одинаковыми возможностями для консультации об истинности информации. Это представляется реалистичным и более точным подходом к согласованию истинности информации. А именно, в любой фиксированный момент текущего времени (сегодня, например), для каждого эксперта существует некоторое фиксированное сообщество экспертов с которым эксперт может взаимно обмениваться информацией о том истинно ли утверждение.

Естественно любой фрейм превращается в модель введением означивания логических переменных, а именно

Определение 2. Модель на фрейме F задается введением некоторого означивания V на F некоторого множества пропозициональных переменных p , где $V(p) \subseteq \bigcup_{i \in N} C(i)$. Все состояния из $V(p)$ трактуются как те на которых переменные p истинны относительно V .

Логический язык стандартно включает все булевские логические операции, модальные операции $\Box$ и $\Diamond$ и унарные логические операции K_i для всех $i \in J$, $K_i \varphi$ - означает – агент i знает φ или агент i может узнать φ (мы не фиксируем жестко трактовку). Отношения определяющие истинность логических операций перечислены ниже.

Определение 3. $\forall a \in T(M): (F, a) \models_V p \Leftrightarrow p \in V(p)$;

для всех булевых операций определения вычисления истинности обычные и

$$\forall a \in C(i) [(F, a) \models_V \Box \varphi \Leftrightarrow \forall b \in C(j)(i \leq j \Rightarrow (F, b) \models_V \varphi)];$$

$$\forall a \in C(i) [(F, a) \models_V \Diamond \varphi \Leftrightarrow \exists b \in C(j)(i \leq j) \& (F, b) \models_V \varphi].$$

Истинность логических операций знания K_i определяются так:

$$\forall a \in C(i) [(F, a) \models_V K_i \varphi \Leftrightarrow \exists b[(a R_i b) \& (F, b) \models_V \varphi] \vee [(F, a) \models_V \varphi]].$$

При такой интерпретации $K_i \varphi$ означает, что агент может узнать, хотя бы раз, что φ бывает истинно.

Далее уже стандартным образом, по любому фиксированному классу моделей определяются логики, а именно

Определение 4. Для любого класса фреймов K , многоагентная логика $LMA(K)$, порожденная K , это множество всех формул истинных а всех состояниях фрейма при всех означиваниях

Теорема 5. Логика $LMA(K)$ разрешима, существует алгоритм проверяющие выполнимость формул.

Доказательство. Заметим, что прямой метод вариаций фильтраций здесь неприменим потому что если случится что в отдельном $C(i)$ все истинностные значения подформулы одинаковые и совпадают с истинностными значениями подформулы на некотором состоянии фрейма стоящим отдельно и вне (i) мы будем вынуждены сливать это внешнее состояние с некоторым состоянием из (j) и следовательно пересекать разные компоненты фрейма, что противоречит выбранному семантическому заданию логики, а также могут возникнуть и другие коллизии. Поэтому необходима предварительная несложная трансформация техники фильтрации и структур фреймов под рассмотрением, и, затем, последующая техника просеивания моделей. Итак, допустим, что формула φ выполняется в некоторой модели

$$(F, V) := \langle \bigcup_{i \in N} C(i), \leq, R_j, j \in J, V \rangle$$

на некотором состоянии a , $(F, a) \Vdash_V \varphi$; мы тогда естественно можем предположить, что имеет место $a \in C(0)$.

Первый шаг доказательства состоит в том, что мы изолируем каждый подсгусток $Q(J_{i,m})$ в любом временном сгустке $C(i)$ и проводим отделанную стандартную фильтрацию только внутри этих $Q(J_{i,m})$. В нашем данном случае это выглядит так:

$$\forall x, y \in Q(J_{i,m}) [x \equiv_J y \Leftrightarrow [\forall p \in \text{Var}(\varphi) [x \Vdash_V p \Leftrightarrow y \Vdash_V p]]].$$

Понятно что $\equiv_J$ является отношением эквивалентности, и мы замещаем любой $x \in Q(J_{i,m})$ классом эквивалентности $[x]_J$, оставляя между ними все те же отношения достижимости. Эту процедуру мы выполняем с каждым $Q(J_{i,m})$ в любом сгустке $C(i)$. Состояния расположенные вне множеств $Q(J_{i,m})$ остаются без изменений.

Этим способом мы выполняем только эту фильтрацию но, отдельно, на каждом $C(i)$ точно таким же образом как указано выше. Затем выполняем фильтрацию на всех $C(i)$ отдельно но только на состояниях не затронутых предыдущими фильтрациями. Этим способом мы выполняем только эту фильтрацию полностью, но отдельно на каждом $C(i)$. Легко проверить индукцией по длине формул, что указанная трансформация обладает всеми необходимыми свойствами фильтратий, в частности оно сохраняет истинность формул

$$\forall x \in F, \forall \psi \in \text{Sub}(\varphi) [(F, x) \Vdash_V \psi \Leftrightarrow (F_{\equiv_J}, [x]_J) \Vdash_V \psi]$$

В итоге каждый сгусток $C(i)$ в полученной модели становится конечным с числом состояний ограниченным числом вычислимым по размерности множества $\text{Sub}(\varphi)$. Далее работаем с только такими моделями и выполняем далее технику просеивания.

А именно теперь, рассматриваем все из получившихся в результате этой конструкции модели $C(i)$ внутри всего фрейма как идентичные если они изоморфны. Пусть

$$\forall n \in N, M(n) := \{C(i) \mid i \geq n\}.$$

Ввиду того, что осталось только конечное число таких моделей $C(i)$ и их число ограничено числом вычислимым их числа подформул множества $\text{Sub}(\varphi)$, получаем, что существует число $st \in N$, такое что

$$M(st) = M(k), \forall k \geq st.$$

Пусть

$$\text{Repr}(st) := \{C(i_1), \dots, C(i_t)\}$$

это множество всех возможных различных моделей такого сорта из $M(st)$ при $i_j > st$. Порядок и последовательность выбора представителей неважных, но индексы i_j взяты в возрастающем порядке. Далее выберем множество

$$\text{Repr}(st2) := \{C(k_1), \dots, C(k_t)\}$$

которое тоже является множеством всех возможных различных моделей $C(i)$ но уже из $M(i_t)$ при $k_j > i_t$. (снова порядок и последовательность выбора представителей неважны, но индексы k_j взяты в возрастающем порядке). Теперь преобразуем получившуюся модель, считая временной индекс следующим за k_t число st и удаляя полностью все сгустки выше времени k_t . Обозначим получившуюся модель через M_1 .

Лемма 6. Для любой формулы ψ из $\text{Sub}(\varphi)$ и для любого $a \in M_1$

$$(M_1, a) \Vdash_V \psi \iff (M, a)(M, a) \Vdash_V \psi.$$

Доказательство следует несложной прямой индукцией по длине формул ψ учитывая выбор чисел st и k_t выше и выбор всех оставшихся в модели сгустков $C(i)$. $\square$

Если же выполняется $(M_1, a) \Vdash_V \varphi$ для некоторой такой конечной модели (M_1) , то разворачивая цикл сгустков расположенных между $C(st)$ и $C(k_t)$ в возрастающую бесконечную цепь, получаем что $(M, a) \Vdash_V \varphi$ и для некоторой стандартной бесконечной модели M .

Таким образом, благодаря этой лемме, мы сводим вопрос о выполнимости в логике $LMA(K)$, порожденной бесконечными моделями с произвольной структурой моделей, к выполнимости формул на конечных моделях вида M_1 размера не выше вычислимого по размеру формулы. Теорема доказана. $\square$.

Рассмотрим возможный вариант определения локального знания, локальной информации агентов, через предложенные семантические модели. Один из возможных путей выглядит так (итак пусть логическая связка LCK интерпретируется как обозначение для локального знания).

$$\begin{aligned} \forall a \in C(i) \quad & [(F, a) \Vdash_V LCK\varphi \Leftrightarrow [(F, a \Vdash_V \varphi] \vee \\ & [\exists j \in J, \exists b \in C(i)(aR_j b \ \& \ (F, b) \Vdash_V \varphi)]]. \end{aligned}$$

Ясно что эта связка очевидно выражима в предложенном логическом языке, а именно

$$LCK\varphi \equiv \varphi \vee \bigvee_{j \in J} K_j \varphi.$$

То есть это означает что либо формула φ истинна уже в текущем состоянии (на a) либо существует агентное отношение достижимости из a к состоянию - базе данных - которая знает φ . Локальность здесь означает, что это возможно только внутри текущего кластера времени. $C(i)$. Думается, что такой подход разумен и хорошо совпадает часто с реальной регламентацией работы агентов для получения информации.

Сейчас мы введем еще один возможный способ формализовать локальное общее знание. Идея состоит в том чтобы не назначать никакой регулярной системы изолированных баз знаний для только экспертов, а регламентировать доступ к информации предписанием агентам администратором. В принципе принятый подход состоит в том, что любому агенту жестко назначено множество состояний и агентов с которыми он может консультироваться и получать от них информацию. Формально это выглядит следующим образом.

Определение 7. Фрейм внешне выглядит как и в предыдущем определении

$$F := \langle \bigcup_{i \in N} C(i), \leq, R_j, j \in J \rangle.$$

И любое R_j это просто бинарное отношение на любом $C(i)$ и R_j не является отношением эквивалентности и даже не транзитивно. Задается оно следующим образом. Выбирается некоторое зафиксированное множество состояний $a \in C(i)$ и для каждого из них зафиксировано некоторое множество состояний $In_a \subseteq C(I)$ с которыми агент j может консультироваться находясь в состоянии a :

$$R_{j,a} := \bigcup \{ \langle a, b \rangle \mid b \in In_a \} \cup \{ \langle a, a \rangle \}.$$

То есть теперь поведение $R_{j,a}$ не регулярно и полностью определено так сказать администратором (хотя думается это хорошо соответствует решениям принятым реальными администраторами). Помимо этого, мы предполагаем что различные множества

$R_{j,a}$ полностью не пересекаются - не имеют общих состояний вообще. Это сделано для того чтобы избежать возможных коллизий при попытках модифицировать технику фильтрации.

Для моделей на таких фреймах мы таким же как и ранее образом определяем вычисление истинности логических операций, в частности K_j . Как и ранее логика вводится обычным образом.

Определение 8. Для класса K указанных фреймов, многоагентная логика LRI порожденная K это множество всех формул истинных в всех состояниях таких фреймов при всех возможных означиваниях.

Теорема 9. Логика LRI разрешима, существует алгоритм, проверяющий выполнимость формул.

Доказательство. Мы вначале изолируем каждое множество

$$R_{j,a} := \bigcup \{ \langle a, b \rangle \mid b \in In_a \} \cup \{ \langle a, a \rangle \}$$

и выполняем на нем следующие преобразования. Пусть

$$\forall x, y \in In_a [xE_J y \Leftrightarrow [\forall p \in Var(\varphi) [x \Vdash_V p \Leftrightarrow y \Vdash_V p]]].$$

Очевидно что это отношение E_J является отношением эквивалентности на In_a и мы берем фактор множество на In_a по E_J и заменяем все $b \in In_a$ там на содержащие их фактор множества. В полученной модели M_1 очевидно выполняется

$$\forall x \in F, \forall \psi \in Sub(\varphi) [(F, x) \Vdash_V \psi \Leftrightarrow (M_1, x_J) \Vdash_V \psi],$$

где x_J это состояние соответствующее x после сделанного преобразования. Выполним такое преобразование для всех $R_{j,a}$.

После этого в любом сгустке $C(i)$ получившейся модели из множества всех получившихся $R_{j,a}$, изоморфных как модели, удалим все копии оставив только одну такую уникальную модель $R_{j,a}$. В полученной таким образом модели M_2 очевидно тоже выполняется

$$\forall x \in M_1, \forall \psi \in Sub(\varphi) [(M_1, x) \Vdash_V \psi \Leftrightarrow (M_2, x_J) \Vdash_V \psi],$$

где x_J это состояние соответствующее x после сделанного преобразования.

Заметим, что после этого преобразования все состояния расположенные вне $R_{j,a}$ остались нетронутыми. Теперь мы выполняем стандартную фильтрацию только на таких состояниях нетронутых предыдущими преобразованиями, но только внутри каждого $C(i)$ отдельно.

В результате получаем модель M_3 . Ясно что (это факт легко проверить индукцией по длине формул) эти преобразования сохраняют истинность формул и

$$\forall x \in M_2, \forall \psi \in Sub(\varphi) [(M_2, x) \Vdash_V \psi \Leftrightarrow (M_3, x_J) \Vdash_V \psi]$$

После этого получаем, что любое $C(i)$ конечно и имеет число элементов не выше числа эффективно вычислимого по числу подформул формулы φ .

Теперь, рассматриваем все из получившихся в результате этой конструкции модели $C(i)$ внутри всего фрейма как идентичные если они изоморфны. Пусть $\forall n \in N, M(n) := \{C(i) \mid i \geq n\}$. После этого осталось только конечное число таких моделей $C(i)$.

Ясно что их число ограничено числом вычислимым из числа подформул нашей формулы. Поэтому получаем, что существует число $st \in N$, такое что $M(st) = M(k), \forall k \geq st$. Пусть как и ранее $Repr(st) := \{C(i_1), \dots, C(i_t)\}$ это множество всех возможных различных моделей такого сорта из $M(st)$ при $i_j > st$. Порядок и последовательность

выбора представителей неважны, но индексы i_j взяты в возрастающем порядке. Далее мы снова выберем множество $Repr(st_F) := \{C(k_1, \dots, C(k_t))\}$ которое тоже является множеством всех возможных различных моделей $C(i)$ но уже из $M(i_t)$ при $k_j > i_t$. (снова порядок и последовательность выбора представителей неважны, но индексы k_j взяты в возрастающем порядке).

Теперь преобразуем получившуюся модель, считая временным индексом следующим за k_t число st и удаляя полностью все сгустки выше времени k_t . Обозначим получившуюся модель через M_4 .

Лемма 10. Для любой формулы ψ из $Sub(\varphi)$ и для любого $a \in M_4$

$$(M_4, a) \Vdash_V \psi \iff (M_3, a) \Vdash_V \psi.$$

Доказательство следует несложной прямой индукцией по длине формул ψ учитывая выбор чисел st и k_t выше и выбор всех оставшихся в модели сгустков $C(i)$. $\square$

В случае когда выполняется $(M_4, a) \Vdash_V \varphi$ для некоторой такой конечной модели (M_4) , то разворачивая цикл сгустков расположенных между (C_{st}) и (C_{k_t}) в возрастающую бесконечную цепь, получаем что $(M, a) \Vdash_V \varphi$ и для некоторой стандартной бесконечной модели M .

Таким образом, благодаря этой лемме, мы сводим вопрос о выполнимости в логике LRI , порожденной бесконечными моделями с произвольной структурой моделей, к выполнимости формул на конечных моделях вида M_4 размера не выше вычислимого по размеру формулы. Теорема доказана. $\square$

3 Вводная информация по унифицируемости

Кратко напомним, что подстановка для множества пропозициональных переменных (или букв) P это некоторое отображение ε множества P во множество всех формул For . Любая такая подстановка может быть расширена на множество всех формул с посредством $\varepsilon(\varphi(x_1, \dots, x_n)) := \varphi(\varepsilon(x_1), \dots, \varepsilon(x_n))$.

Определение 11. Формула φ называется унифицируемой в логике L если существует подстановка ε (называемая унификатором формулы φ) такая что $\varepsilon(\varphi) \in L$.

Определение 12. Унификатор ε для формулы φ в логике L является более общим чем унификатор ε_1 если существует подстановка δ такая что для любой буквы x , $[\varepsilon_1(x) \equiv \delta(\varepsilon(x))] \in L$.

Если логика разрешима, то обычно проверить унифицируемость формул довольно просто (теоретически, но сложность и длина вычислений может быть недопустимо высокой) : достаточно использовать только подстановки переменных в – истина-ложна $-\{\perp, \top\}$. Но проблема нахождения всех унификаторов гораздо более сложна.

Определение 13. Множество унификаторов CU для данной формулы φ в логике L является полным множеством унификаторов, если выполняется следующее. Для любого унификатора σ формулы φ в L , существует унификатор σ_1 из CU , такой что σ_1 более общий чем σ .

Для модальных логик, расширяющих модальную систему $S4$ определение проективности формул может быть дано следующим образом.

Определение 14. Формула φ называется проективной в логике L если выполняется следующее. Существует подстановка σ (называемая проективной подстановкой для φ) такая что σ является унификатором для φ в L и $\Box\varphi \rightarrow [x_i \equiv \sigma(x_i)] \in L$ for для любой переменной x_i из φ .

Лемма 15. Если подстановка σ_p проективна для φ в логике L , то $\{\sigma_p\}$ является полным множеством унификаторов для φ (т.е. подстановка σ_p является наиболее общим унификатором).

Доказательство. Действительно, пусть σ является унификатором для φ в L . Так как σ_p проективна для φ в L , мы получаем $\Box\varphi \rightarrow [x_i \equiv \sigma_p(x_i)] \in L$ для любой переменной x_i из φ . Применяя σ к формулам выше, мы получаем $\sigma(\Box\varphi) \rightarrow [\sigma(x_i) \equiv \sigma(\sigma_p(x_i))] \in L$, то есть $\sigma(x_i) \equiv \sigma(\sigma_p(x_i)) \in L$. Q.E.D.

Конечно не все унифицируемые формулы проективны в неклассических логиках, примеры широко известны.

Легко видеть, что если для разрешимой модальной логики L , расширяющей $S4$ мы можем определить проективна ли формула φ и вычислить ее проективный унификатор, то проблема допустимости правил вывода в L разрешима. Действительно, правило вывода $\varphi_1, \dots, \varphi_n / \psi$ не допустимо в L если и только если существует унификатор для $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ который не является унификатором для ψ . Но тогда вычислимый более общий унификатор получаемый по проективной подстановке для $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ проверяет это. Эта интересная идея была введена в обиход логиков, работающих в неклассической логике, Silvio Ghilardi (см. [19]). Мы применим в этой статье технику проективности для решения проблемы допустимости в изучаемых в этой статье логиках.

4 Разрешимость Допустимости через Проективность

Применение проективности в данном конкретном случае логик близких к линейным, позволит дать нам очень короткое и компактное доказательство решения проблемы допустимости правил вывода. Такой подход через технику проективности был найден Сильвио Гиларди и впоследствии был применен к линейным модальным логикам (Wojciech Dzik, Piotr Wojtylak) для модальных логик, расширяющих $S4.3$ [20], [18,19] и затем был развит для временных логик в V. Rybakov [17]. В этом параграфе нам необходима некая легкая модификация многоагентных фреймов, для того чтобы мы могли использовать технику проективных формул.

Определение 16. Как и ранее, в качестве фрейма мы можем использовать любую версию определенную ранее —

$$\mathbf{F} := \langle \bigcup_{i \in N} C(i), \leq, R_j, j \in J \rangle.$$

Но для унификации через проективность нам необходимо присутствие некоторого состояния в каждом кластере $C(i)$: мы допускаем, что для любого $C(i)$ существует по крайней мере единственное состояние $Dis \in C(i)$ такое что,

$$\forall i \in N, \forall j \in J, \forall b \in C(i), [Dis R_j b \iff b = Dis] \ \& \ [b R_j Dis \iff b = Dis].$$

Этот элемент Dis называем от-соединенным или выключенным (disjoint) так как любой агент не может его достичь по R_j и снять с него информацию, и также будучи в любом другом состоянии не видит по R_j этот элемент (он как бы невидим агентам). В частности, мы полагаем, что в любой модели при любом выбранном означивании на таком фрейме все переменные на элементах типа Dis ложны ($(M, Dis) \Vdash_V \neg p_j$). Эти ограничения, тем самым, никак не ограничивают выразимость информации но технически полезны для применения проективности. Как и ранее логика L это множество всех формул истинных на всех таких возможных моделях.

Теорема 17. В логике L любая унифицируемая формула является проективной. Унифицируемость формул в этой логике алгоритмически распознаваема. Существует алгоритм, строящий проективный унификатор для любой унифицируемой формулы. Поэтому проблема допустимости правил вывода разрешима для L .

Доказательство. Вначале нужно доказать алгоритмическую распознаваемость унифицируемых формул. Эта задача не так тривиальна как для просто булевой пропозициональной логики, но сравнительно достаточно несложна. Действительно, пусть дана произвольная формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и она унифицируема. Наша логика обладает в частности моделями M где каждый кластер $C(i)$ состоит только из одного состояния Dis .

Допустим что формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ унифицируема в логике L и σ_1 ее унификатор. Пусть подстановка σ_1 действует следующим образом,

$$\forall x_i, \sigma_1(x_i) := \alpha_i, \text{ где } \alpha_i \in For$$

При этой подстановке формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ истинна на M так как σ_1 ее унификатор. Тогда истинность любых переменных y_j из формул в указанных формулах α_i , участвующих в подстановке σ_1 , принимают истинностное значение ложь на любом состоянии Dis из этой модели M , – поэтому мы можем считать, что

$$\sigma_1(y_j) = \perp$$

и при этой подстановке σ_1 на этой модели истинна наша формула. При этом мы не утверждаем, что модифицированная подстановка унификатор в логике, но тем не менее очевидно верна

Лемма 18. Для данной модифицированной подстановке σ_1

$$\forall a \in M, (M, a) \models_V \neg \sigma_1(y_j).$$

В этом случае любая из формул α_i при этой подстановке σ_1 принимает одно и то же истинностное значение истина или ложна одновременно на всех состояниях из этой модели (а она состоит только из таких состояний Dis). Поэтому (легкая индукция по длине формул α_i) верна

Лемма 19. В модели M ,

$$\forall a, b \in M, \forall \alpha_i, (M, a) \models_V \sigma_1(\alpha_i) \Leftrightarrow (M, b) \models_V \sigma_1(\alpha_i).$$

Потому подстановка σ_1 вместо переменных формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ просто истинностных значений формул α_i в указанной модели M при том заданном означивании σ_1 , будет унификатором формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ в нашей логике (так как $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ при σ_1 истинна на исходной модели M). Поэтому и здесь для проверки унифицируемости достаточно рассмотреть просто одноэлементную модель и истинность на ней.

Конечно мы не знаем точного значения действия σ_1 на одноэлементной модели (как и в булевой логике), но его можно уточнить простым перебором пользуясь разрешимостью логики (она доказывается как и ранее в этой статье для упомянутых логик, просто в начале доказательства надо слить все состояния типа Dis в любом кластере $C(i)$ в одно состояние). Таким образом проблема распознавания унифицируемости в таких логиках разрешима. Зафиксируем необходимый нам в будущем некоторый вычисленный таким образом унификатор σ_3 для формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$,

$$\sigma_3(x_i) = \delta_i, \text{ где } \delta_i \in \{\perp, \top\}.$$

Но вот проблема нахождения наиболее общих унификаторов совсем не так проста.

Приступая к доказательству проективности унифицируемых формул, для любой пропозициональной переменной x_i из любой данной формулы φ мы определим следующую подстановку. Пусть $Var(\Box\varphi)$ является множеством всех пропозициональных переменных из $\Box\varphi$ и $Sub(\Box\varphi)$ является множеством всех подформул формулы $\Box\varphi$. Возьмем любое $X \subseteq Sub(\Box\varphi)$, и далее фиксируем формулы

Пусть для любой переменной x_i из $Var(\varphi)$,

$$\sigma(x_i) := (\Box\varphi \wedge x_i] \vee [\neg\Diamond\Box\varphi \wedge \sigma_3(x_i)] \vee [\neg\Box\varphi \wedge \Diamond\Box\varphi \wedge \perp].$$

Докажем, что эта подстановка является унификатором для формулы φ в логике L . Выбираем любую модель нашей логики, т.е. любой фрейм F (с состояниями Dis в любом сгустке) с любым означиванием V for для переменных x_i из данной формулы φ . Берем любое состояние $a \in F$.

Рассмотрим случай когда $(F, a) \Vdash_V \neg\Diamond\Box\varphi$. По определению подстановки σ_3 , она является унификатором для формулы φ в логике, поэтому

$$\forall b \in F, (F, b) \Vdash_V \sigma_3(\varphi) \text{ и соответственно } \forall b \in F, (F, b) \Vdash_V \sigma(\varphi).$$

Допустим теперь что $(F, a) \Vdash_V \Box\varphi$. Тогда подстановка σ не меняет истинностных значений переменных x_i в сравнении с их истинностными значениями при оригинальном означивании V . Поэтому

$$(F, a) \Vdash_V x_i \Leftrightarrow (F, a) \Vdash_V \sigma(x_i), \forall b \geq a (F, b) \Vdash_V x_i \Leftrightarrow (F, b) \Vdash_V \sigma(x_i),$$

следовательно

$$(F, a) \Vdash_V \sigma(\Box\varphi).$$

Осталось рассмотреть случай когда

$$(F, a) \Vdash_V \neg\Box\varphi \wedge \Diamond\Box\varphi.$$

Пусть $C(i)$ это наименьший сгусток где формула $\Box\varphi$ истинна при оригинальном означивании V , пусть $Dis(i)$ и $Dis(i-1)$ это два выбранных любых состояния типа Dis из $C(i)$ и $C(i-1)$ соответственно. Тогда для любой $x_i \in Var(\varphi)$ ввиду того что состояния $Dis(i)$ и $Dis(i-1)$ являются выключенными имеет место

$$(F, Dis(i)) \Vdash_V \neg x_i, \& (F, Dis(i-1)) \Vdash_V \neg x_i.$$

Используя это и вновь выключенность состояний $Dis(i)$ и $Dis(i-1)$ (ограничения на работу агентных операций R_j) прямой индукцией на длину формул легко проверить, что для любой булевой формулы α построенной из переменных x_i

Лемма 20.

$$(F, Dis(i)) \Vdash_V \alpha \Leftrightarrow (F, Dis(i-1)) \Vdash_V \alpha.$$

Кроме того верна

Лемма 21. Для любого состояния g типа Dis из любого сгустка $(C(j))$ модели и любого означивания V_2 на M , и любой формулы β из $Sub(\Box\varphi)$

$$(F, g) \Vdash_{V_2} \bigwedge_{\beta \in Sub(\Box\varphi)} ([\beta \rightarrow \bigwedge_{j \in J} K_j \beta] \wedge [\bigwedge_{j \in \beta \in Sub(\Box\varphi)} [K_j \beta \rightarrow \beta]]).$$

Доказательство прямо следует из определения агентных отношений достижимости R_j на состояниях типа Dis.

Из этих двух лемм, прямой индукцией по длине формул α выводится

Лемма 22. Для любой формулы α из $Sub((\Box\varphi))$, построенной из переменных x_i

$$(F, Dis(i)) \Vdash_V \sigma(\alpha) \Leftrightarrow (F, Dis(i-1)) \Vdash_V \sigma(\alpha).$$

Для сгустков $C(j)$ расположенных ниже $C(i-1)$ доказательство предыдущей леммы то же как и предыдущей леммы, так как в таких сгустках при подстановке σ переменные имеют то же означивание после применения подстановки σ как и в $C(i-1)$.

Тем самым мы доказали что подстановка σ построенная нами и является унификатором для φ . Проективность этой подстановки очевидна.

Теорема доказана

Список литературы

- [1] *Ronald Fagin, Joseph Y. Halpern, Yoram Moses and Moshe Vardi*) Reasoning About Knowledge, MIT, 1995).
- [2] V. V. Rybakov *Refined common knowledge logics or logics of common information* *Archive for mathematical Logic* 42 (2), 2003, 179-200.
- [3] S. Artemov *Evidence-Based Common Knowledge*, (Technical Report TR-2004018 CUNY Ph.D. Program in Computer Science, revised version)
- [4] S. Artemov *Explicit Generic Common Knowledge*, Lect/ Notes in CS, LFCS 2013: Logical Foundations of Computer Science 2013, pp 16–28 Cite as
- [5] S. Artemov *Justification awareness* *Journal of Logic and Computation* 30 (8), 2020, 1431-1446
- [6] V Rybakov *Temporal Multi-Agent's Logic, Knowledge, Uncertainty, and Plausibility* *Agents and Multi-Agent Systems: Technologies and Applications*, LNCS, 2021, 2005 - 2014.
- [7] Baader F., Küsters R. *Unification in a description logic with transitive closure of roles*. In: *Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning*, LPAR 2001. Vol. 2250. LNCS, Springer (2001), 217 – 232.
- [8] Rybakov V.V. *Problems of Substitution and Admissibility in the Modal System Grz and in Intuitionistic Propositional Calculus*. *Annals of Pure and Applied Logic*, 50(1), (1990) 71 – 106.
- [9] Rybakov V.V. *Rules of Inference with Parameters for Intuitionistic logic*.- *J. of Symbolic Logic*, 57 (3) (1992), 912 – 923.
- [10] Rybakov V.V. *Logical Consecutions in Discrete Linear Temporal Logic*. *J. of Symbolic Logic*, 70 (4) (2005), 1137 – 1149.
- [11] Rybakov V. V. *Linear temporal logic with until and next, logical consecutions*. *Annals of Pure and Applied Logic*, 155 (2008), 32 – 45.
- [12] Rybakov V. V. *Projective formulas and unification in linear temporal logic LTLU*, V Rybakov *Logic Journal of the IGPL* 22 (4), (2014), 665-672.

- [13] Rybakov V. V. *Non-transitive linear temporal logic and logical knowledge operations*, Journal of Logic and Computation 26 (3), Oxford Press, 2016, 945-958
- [14] Rybakov V.V. *Nontransitive temporal multiagent logic, information and knowledge, deciding algorithms*, Siberian. Math. J., 58, no 5, (2017), 875–886.
- [15] Rybakov V.V., *Multiagent temporal logics with multivaluations*, Siberian. Math. J., 59, no 4, (2018), 710–720.
- [16] Rybakov V.V., *Branching time agents' logic, satisfiability problem by rules in reduced form*, Siberian. Electron. Math. Izv., 16, (2019), 1158–1170.
- [17] Rybakov V. V. *Projective formulas and unification in linear temporal logic LTLU*, Logic Journal of the IGPL, Oxford Press 22 (4), (2014), 665-672.
- [18] Ghilardi S. *Unification Through Projectivity*, J. of Logic and Computation, Oxford Press, 7(6) (1997), 733 – 752.
- [19] Ghilardi S. *Unification, finite duality and projectivity in varieties of Heyting algebras*, Annals of Pure and Applied Logic, 127(1-3), (2004), 99 – 115.
- [20] Dzik W., Wojtylak P. *Projective unification in modal logic*. Logic Journal of IGPL 20, (1), (2012), 121 – 153.