РЕЦЕНЗИЯ

на статью Осипова Н.Н. «On a conjecture on Sharygin triangles»

Контекст. Рассмотрим на евклидовой плоскости треугольник ABC, пусть точки A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис, проведенных из вершин A, B, C соответственно. Предположим, что $\triangle A_1B_1C_1$ равнобедренный; верно ли, что $\triangle ABC$ тоже равнобедренный? Оказывается, что неверно.

Треугольником Шарыгина называется такой $\triangle ABC$ с попарно различными длинами сторон, что треугольник $\triangle A_1B_1C_1$ равнобедренный. Для удобства будем далее считать, что a, b, c — длины сторон $\triangle ABC$, лежащих напротив одноименных вершин, аналогично для $\triangle A_1B_1C_1$. Будем считать, что $a_1 = b_1$

Ранее было показано (Шарыгин, Маркелов, Савватеев, Нетай):

(1) угол C тупой, причем его косинус лежит в очень узком интервале $(-1, \sqrt{17} - 5)$;

(2) треугольник с вершинами в точках $1, \zeta, \zeta^3$, где $\zeta = \exp \frac{2\pi i}{7}$, является треугольником Шарыгина;

(3) имеется бесконечно много попарно не подобных треугольников Шарыгина;

(4) имеется бесконечно много попарно неподобных треугольников Шарыгина с рациональными (целыми) сторонами.

Имеется удивительная связь этой планиметрической задачи с классическими вопросами теории эллиптических кривых. Условие, что a, b, c являются длинами сторон треугольника Шарыгина, сводится к кубическому уравнению

$$a^3 + b^3 + ab(a + b) + c(a^2 + ab + b^(2) - c^2(a + b) - c^3 = 0,$$

задающему эллиптическую кривую $\mathcal{E}$.

Тем самым, утверждение (3) легко проверяется: в вещественной аффинной карте $\{c \neq 0\}$ на кривой имеется бесконечно много точек в полосе $x + y > 1, 0 < x < y + 1, 0 < y < x + 1$, где $x = a/c, y = b/c$.

Утверждение (4) доказывается значительно сложнее, а именно, для этого Савватеев и Нетай (2016) вычислили группу рациональных точек кривой $\mathcal{E}(\mathbb{Q})$.

Постановка задачи. В той же работе была высказана гипотеза, что если вершины треугольника Шарыгина одновременно являются вершинами правильного N-угольника, то этот треугольник подобен треугольнику из утверждения (2), в частности N делится на 7. Доказательству этой гипотезы посвящена рецензируемая работа Н.Н.Осипова.

О результатах статьи. Задача сводится к алгебраической следующим образом. Пусть $\triangle ABC$ — треугольник Шарыгина, причем точки A, B, C содержатся среди вершин правильного N-угольника, вписанного в окружность радиуса 1. Тогда $a = 2\sin\alpha$, $b = 2\sin\beta$, $\alpha = \frac{\pi m}{N}$, $\beta = \frac{\pi n}{N}$ для подходящих целых $0 < n, m < N/2$. Из уравнения кривой $\mathcal{E}$ получается соотношение на $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $y = \cos\beta + i\sin\beta$:

$$f(x, y) = 1 + x + y + x^2y^3 + x^3y^2 + x^3y^3 = 0,$$

а кроме того,

$$x^N = y^N = 1.$$

Решение, соответствующее утверждению (2), имеет вид $\{\alpha, \beta\} = \{\pi/7, 2\pi/7\}$. Наибольшая трудность здесь, очевидно, связана с тем, что априори нет оценки на N.

Усреднением по действию группы автоморфизмов поля $\mathbb{Q}(\exp(2\pi i/N))$, автор доказал, что любое решение x, y должно удовлетворять одной из 15 систем уравнений $f(x, y) = 0, g_i^l(x, y) = 1$, где $l = 2, 3, 5$, а мономы g_i, $i = 1, \ldots, 5$ равны, $x, y, x^2y^3, x^3y^2, x^3y^3$. Далее методами компьютерной алгебры эти системы были исследованы, была получена оценка $N \leq 210$, получен полный список решений (x, y), из которых геометрический смысл имеют только решения, соответствующие треугольнику Шарыгина из утверждения (2). Представляется, что исследование этих систем и получение оценки на N представляют наибольшие трудности; автор с ними успешно справился.

Заключение. С моей точки зрения, задача исследования треугольников Шарыгина недостаточно мотивирована для публикации в рецензируемом математическом журнале типа «Сибирских электронным математических известий». Сама по себе задача, равно как и примеры из раздела 4 (уравнения Гордана, Кокстера-Кросби), носит частный характер. Метод, предложенный автором, интересен, но применимость метода для широкого класса уравнений остается под вопросом. Я бы не рекомендовал статью «On a conjecture on Sharygin triangles» к публикации в журнале «Сибирские электронные математические известия».

С другой стороны, доказательство, предложенное автором, доступно продвинутому школьнику. Поэтому мне представляется, что сюжет и доказательство почти наверняка окажутся интересными читателям журнала «Математическое просвящение». Я бы рекомендовал автору переработать текст, расширив часть на стр. 148-149, добавить подробности, связанные с использованием базисов Гребнера, возможно, добавить примеры, аналогичные примерам на стр. 153, и представить статью в журнал «Математическое просвящение».