S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 502–512 (2020) УДК 519.1+519.173
DOI 10.33048/semi.2020.17.031 MSC 05C75+05C30

КЛАССИФИКАЦИЯ ГРАФОВ ДИАМЕТРА 2

Т.И. ФЕДОРЯЕВА

Abstract. The classification of graphs of diameter 2 by the number of pairs of diametral vertices contained in the graph is designed. All possible values of the parameters n and k are established for which there exists a n-vertex graph of diameter 2 that has exactly k pairs of diametral vertices. As a corollary, the smallest order of these graphs is found. Such graphs with a large number of vertices are also described and counted. In addition, for any fixed integer $k \geq 1$ inside each distinguished class of n-vertex graphs of diameter 2 containing exactly k pairs of diametral vertices, a class of typical graphs is constructed. For the introduced classes, the almost all property is studied for any $k = k(n)$ with the growth restriction under consideration, covering the case of a fixed integer $k \geq 1$. As a consequence, it is proved that it is impossible to limit the number of pairs of diametral vertices by a given fixed integer k in order to obtain almost all graphs of diameter 2.

Keywords: graph, diameter 2, diametral vertices, typical graphs, almost all graphs.

Введение

В работе изучаются конечные помеченные обыкновенные графы. Для связного графа G *расстояние* $\rho_G(u,v)$ между вершинами $u, v \in V$ определяется как длина кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины, при этом $d(G) = \max_{u,\, v\in V} \rho_G(u,v)$ есть его *диаметр.* Кратчайшая цепь длины $d(G)$ называется *диаметральной цепью* графа G, а её концы — *диаметральными вершинами.*

В [2–4] с целью нахождения асимптотически точного значения числа n-вершинных графов фиксированного диаметра исследовались типичные графы

Fedoryaeva, T.I., Classification of graphs of diameter 2.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314-2019-0017.

Поступила 19 января 2020 г., опубликована 6 апреля 2020 г.

и их свойства в классе $\mathcal{J}_{n,\,d=k}$ всех n-вершинных помеченных графов диаметра k. Оказалось, что почти все n-вершинные графы заданного диаметра $k \geq 3$ имеют единственную пару диаметральных вершин, кроме того выполняется ещё ряд свойств типичных графов класса $\mathcal{J}_{n,\,d=k}$, связанных с разнообразием метрических шаров в графе. Этот неожиданный результат справедлив даже для более широких классов графов и, в частности, для графов, не обязательно связных, но содержащих кратчайшую цепь заданной длины $k \geq 3$. Однако для графов диаметра 2 было установлено, что данное свойство не выполняется, т.е. n-вершинных графов диаметра 2 с единственной парой диаметральных вершин асимптотически мало. Это побудило к детальному исследованию более общих свойств графов диаметра 2, связанных с числом пар диаметральных вершин, содержащихся в графе. В частности, один из возникающих здесь вопросов, можно ли ограничить число пар диаметральных вершин, чтобы получить почти все графы диаметра 2. Кроме того, класс $\mathcal{J}_{n,\,d=2}$ всегда представлял особый интерес ввиду, с одной стороны, кажущейся простоты его объектов, с другой стороны, широты его "охвата" всех графов: хорошо известно, что почти все графы имеют диаметр 2. В связи с этим интересна дальнейшая более тонкая классификация графов диаметра 2, когда выделяются подклассы, образующие разбиение всего класса $\mathcal{J}_{n,\,d=2}$. Причём для содержательной класссификации требуется, чтобы ни один из рассматриваемых подклассов не оказался бы бедным и слишком богатым, т.е. асимптотически не совпадал со всем классом. При этом, учитывая "богатство" всего класса $\mathcal{J}_{n,\,d=2}$, по-видимому не приходится ожидать хорошей характеризации выделенных подклассов, однако возникает естественная задача описания или построения класса типичных графов для каждого изучаемого подкласса с целью выяснения строения таких графов с бо́льшим числом вершин.

В настоящей работе построена классификация графов диаметра 2 по числу пар диаметральных вершин, содержащихся в графе. Необходимые предварительные сведения содержатся в разд. 1. В разд. 2 для произвольного неотрицательного целого k исследуется класс $\mathcal{J}_{n,\,q=k}$ всех n-вершинных помеченных графов диаметра 2, содержащих в точности k пар диаметральных вершин. Очевидно, что

$$\mathcal{J}_{n,\,d=2} = \bigcup_{k\geq 0} \mathcal{J}_{n,\,q=k},$$

причём $\mathcal{J}_{n,\,q=0} = \varnothing$ и непустые подклассы $\mathcal{J}_{n,\,q=k}$ образуют разбиение класса всех n-вершинных графов диаметра 2. В теореме 3 устанавливаются все возможные значения параметров n и k, при которых существует n-вершинный граф диаметра 2, имеющий в точности k пар диаметральных вершин. Как следствие найден наименьший порядок таких графов. В разд. 3 описаны и подсчитаны графы класса $\mathcal{J}_{n,\,q=k}$ с бо́льшим числом вершин. Типичные графы класса $\mathcal{J}_{n,\,q=k}$ построены в разд. 4 (теорема 5). Там же приводится пример широкого подкласса нетипичных графов, показывающий, что при $k \geq 2$ построенный класс типичных графов не исчерпывает весь класс $\mathcal{J}_{n,\,q=k}$, а класс графов $\mathcal{J}_{n,\,q=1}$ явно описан в теореме 2. В разд. 5 изучается свойство почти все для введенных классов графов. Доказано, что для любого $k = k(n)$ с рассматриваемым ограничением роста, охватывающем случай фиксированного целого $k \geq 1$, почти все n-вершинные графы диаметра 2 имеют не менее k пар диаметральных вершин (теорема 7). В частности, чтобы получить почти все графы диаметра 2 нельзя ограничить число пар диаметральных вершин наперед заданным фиксированным целым k.

1. Предварительные сведения

В статье используются общепринятые понятия и обозначения теории графов [1, 7], а также стандартные понятия комбинаторного анализа [6]. Рассматриваются только конечные обыкновенные (без петель и кратных рёбер) графы G с множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Как обычно, через $E(G)$ обозначим *множество ребер* графа G, $N_G(v) = \{u \in V \mid uv \in E(G)\}$ — *окружение вершины* v графа G, $G \setminus v$ — граф, полученный в результате *удаления вершины* v и всех инцидентных ей рёбер, $G \setminus V'$ — граф, полученный в результате удаления всех вершин из множества $V' \subseteq V$, $\overline{G}$ — *дополнение графа* G, kG — *дизъюнктное объединение* k копий графа G, $G + H$ — граф, полученный *операцией соединения* из графов G и H, K_n — *полный* n-вершинный граф, $K_{1,n-1}$ — n-вершинная *звезда.* Запись $G \cong H$ означает *изоморфизм графов* G и H. Под парой вершин понимаем неупорядоченную выборку двух элементов множества V. Будем писать $\lceil x \rceil$ для обозначения наименьшего целого числа, большего или равного вещественного неотрицательного числа x.

Для оценки меры количества графов с определенным свойством часто используется понятие почти все, при таком подходе изучаемое свойство рассматривается для графов с больши́м числом вершин. Пусть $\mathcal{J}_n$ — класс помеченных n-вершинных графов с фиксированным множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим некоторое свойство $\mathcal{P}$, которым каждый граф может обладать или не обладать. Через $\mathcal{J}_n^{\mathcal{P}}$ обозначим множество всех графов из $\mathcal{J}_n$, которые обладают свойством $\mathcal{P}$. Говорят, что *почти все графы обладают свойством* $\mathcal{P}$, если $\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{J}_n^{\mathcal{P}}|}{|\mathcal{J}_n|} = 1$, и *почти нет графов, обладающих свойством* $\mathcal{P}$, если $\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{J}_n^{\mathcal{P}}|}{|\mathcal{J}_n|} = 0$. Как уже отмечалось, класс графов диаметра 2 оказывается богатым среди всех графов в смысле вышеприведенного понятия, впервые такой результат был по-видимому получен в [8]. Сформулируем этот факт и приведем одно из его простых обоснований.

Теорема 1 [8]**.** *Почти все графы имеют диаметр* 2*.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{J'}_n$ – класс всех n-вершинных помеченных графов, в которых окружения любых двух различных вершин имеют общую вершину. Тогда $\mathcal{J'}_n \setminus \{K_n\} \subseteq \mathcal{J}_{n,\, d=2}$. Нам потребуется следующая

Лемма 1. *Почти во всех графах окружения любых двух различных вершин имеют общую вершину.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathcal{J}_n \setminus \mathcal{J'}_n = \bigcup_{u \neq v} \mathcal{J}_n(u, v)$, где $\mathcal{J}_n(u, v) = \{G \in \mathcal{J}_n \mid N_G(u) \cap N_G(v) = \varnothing\}$. При $u \neq v$ нетрудно вычислить $|\mathcal{J}_n(u, v)| = 2^{\binom{n}{2}} (\frac{3}{4})^{n-1}$ (см., например, [2]). Следовательно, $|\mathcal{J}_n \setminus \mathcal{J'}_n| \leq 2^{\binom{n}{2}} \binom{n}{2} (\frac{3}{4})^{n-1}$. Таким образом, при $n \to \infty$ заключаем

$$\frac{|\mathcal{J'}_n|}{|\mathcal{J}_n|} = \frac{|\mathcal{J}_n| - |\mathcal{J}_n \setminus \mathcal{J'}_n|}{|\mathcal{J}_n|} = 1 - \frac{|\mathcal{J}_n \setminus \mathcal{J'}_n|}{|\mathcal{J}_n|} \geq 1 - \binom{n}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \to 1.$$

$\square$

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что $|\mathcal{J}_{n,\,d=2}| \geq |\mathcal{J}'_n| - 1$ и воспользоваться леммой 1. $\square$

При исследовании и выделении почти всех графов для рассматриваемого класса графов часто бывает полезным определять не сами характеристические свойства для понятия почти все, а непосредственно выделять сам подкласс типичных графов (в [2, 3] сформулировано более общее понятие класса типичных комбинаторных объектов и абстрактного типичного комбинаторного объекта для заданного класса объектов, допускающих понятие размерности). Далее будем также придерживаться этого формального понятия для графов (когда под размерностью графа понимается число его вершин). Пусть Ω — произвольный класс графов такой, что $\Omega_n \neq \varnothing$ для всех достаточно больших n, где $\Omega_n = \Omega \cap \mathcal{J}_n$. Подкласс $\Omega^* \subseteq \Omega$ есть *класс типичных графов класса* Ω, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\Omega^*_n|}{|\Omega_n|} = 1.$$

В дальнейшем будем использовать следующие свойства биномиальных коэффициентов. Заметим, что последовательность биномиальных коэффициентов $\binom{n}{2}$, $n \geq 1$ является строго возрастающей:

$$0 = \binom{1}{2} < \binom{2}{2} < \ldots < \binom{n-1}{2} < \binom{n}{2} < \ldots. \tag{1}$$

Кроме того, справедливо следующее известное комбинаторное тождество:

$$\binom{n-m}{2} = \binom{n}{2} - nm + \frac{m(m+1)}{2}\,. \tag{2}$$

Далее для обозначения асимптотического равенства функций $f(n)$ и $g(n)$ при $n \to \infty$ будем использовать запись $f(n) \sim g(n)$, которая по определению означает, что $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$ или, эквивалентно, f(n) = g(n)(1+r(n)) для всех достаточно больших n, где r(n) = o(1) есть погрешность приближения.

Лемма 2. *При фиксированном* $k \geq 1$ *выполняется асимптотическое равенство* $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$.

Доказательство. При $n \to \infty$ имеем

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = \frac{n^k}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(1-\frac{i}{n}) = \frac{n^k}{k!}\,(1+o(1))\,.$$

$\square$

2. Класс графов $\mathcal{J}_{n,\,q=k}$

Выясним, когда в классе n-вершинных графов диаметра 2 существует граф, содержащий в точности k пар диаметральных вершин, т.е. найдем необходимое и достаточное условие, при котором $\mathcal{J}_{n,\,q=k} \neq \varnothing$. Сначала явно опишем графы класса $\mathcal{J}_{n,\,q=k}$ при $k=1$, а далее в нижеприведенных леммах для произвольного $k \geq 1$ установим ряд свойств таких графов и способы их построения.

Теорема 2 (о классе $\mathcal{J}_{n,\,q=1}$)**.** *Класс графов* $\mathcal{J}_{n,\,q=1}$ *при* $n \geq 3$ *состоит из графов, изоморфных* $\overline{K}_2 + K_{n-2}$*, и* $\mathcal{J}_{n,\,q=1} = \varnothing$ *при* $n < 3$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathcal{J}_{n,\,q=1}$ и u, v — диаметральные вершины графа G. Тогда u, v — несмежные вершины и $V \setminus \{u, v\} \neq \varnothing$. Поэтому $n \geq 3$. Так как $q = 1$, то каждая из вершин u, v смежна со всеми вершинами из множества $V \setminus \{u, v\}$. Кроме того, любые различные вершины $w_1, w_2 \in V \setminus \{u, v\}$ являются смежными, иначе получаем еще одну пару диаметральных вершин w_1, w_2. Следовательно, $G \setminus \{u, v\}$ есть граф K_{n-2}, а граф G изоморфен графу $\overline{K}_2 + K_{n-2}$.

Обратное утверждение $\overline{K}_2 + K_{n-2} \in \mathcal{J}_{n,\,q=1}$ очевидно. □

Следствие 1. *Справедливо равенство*

$$|\mathcal{J}_{n,\,q=1}| = \begin{cases} \binom{n}{2}, & \text{если } n \geq 3, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Достаточно заметить, что в силу теоремы 2 граф класса $\mathcal{J}_{n,\,q=1}$ полностью определяется выбором двух несмежных вершин. □

Лемма 3. *Пусть $n \geq 3$ и $k = \binom{n-1}{2}$. Тогда $G \in \mathcal{J}_{n,\,q=k}$ тогда и только тогда, когда G есть звезда $K_{1,\,n-1}$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathcal{J}_{n,\,q=k}$. Тогда в G любые две различные вершины являются либо диаметральными, либо смежными вершинами. Поэтому, учитывая (2), получаем

$$|E(G)| = \binom{n}{2} - k = \binom{n}{2} - \binom{n-1}{2} = n - 1.$$

Таким образом, G — n-вершинный связный граф с $n-1$ ребрами. В силу известного эквивалентного определения дерева (см., например, теорему 13.1 [1]), граф G является деревом. Поскольку $d(G) = 2$, заключаем $G \cong K_{1,\,n-1}$.

Обратное утверждение вытекает из наблюдения, что звезда $K_{1,\,n-1}$ содержит $\binom{n-1}{2}$ пар диаметральных вершин. □

Следствие 2. *Пусть $n \geq 3$ и $k = \binom{n-1}{2}$. Тогда $|\mathcal{J}_{n,\,q=k}| = n$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что в силу леммы 3 для построения графа из $\mathcal{J}_{n,\,q=k}$ нужно выбрать произвольную вершину v и соединить ее ребрами со всеми остальными вершинами $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Так как $n \geq 3$, такой граф однозначно определяется выбором вершины v. □

Лемма 4. *Пусть $s \geq 2$, $\binom{s-1}{2} < k \leq \binom{s}{2}$ и $G \in \mathcal{J}_{n,\,q=k}$. Тогда $n \geq s + 1$.*

Доказательство. Индукцией по k докажем требуемое утверждение.

Базис индукции. При $k = 1$ имеем $s = 2$ и $n \geq 3$ по теореме 2. Следовательно, базис индукции выполняется.

Индукционный переход. Пусть $k \geq 1$, $G \in \mathcal{J}_{n,\,q=k+1}$ и

$$\binom{s-1}{2} < k + 1 \leq \binom{s}{2}.$$

Так как $k \geq 1$, граф G содержит хотя бы две пары несмежных вершин. Соединим ребром произвольно выбранные несмежные вершины графа G. Полученный граф обозначим через G'. Очевидно, что $G' \in \mathcal{J}_{n,\,q=k}$. Имеем $\binom{s-1}{2} \leq k < \binom{s}{2}$. Если $\binom{s-1}{2} < k$, то по индукционному предположению заключаем $n \geq s+1$. Пусть теперь $k = \binom{s-1}{2}$. При $m \leq s-1$ в силу (1) имеем $\binom{m}{2} \leq \binom{s-1}{2} < k+1$.

Поэтому в m-элементном множестве вершин графа нет $k+1$ различных пар элементов. Следовательно, $n \geq s$. Теперь предположим, что $n = s$. Тогда G' есть звезда $K_{1,\,s-1}$ в силу леммы 3. С другой стороны, связный граф G получается из звезды G' удалением некоторого ребра, пришли к противоречию. Следовательно, $n \geq s+1$. □

Следующая лемма дает способ построения графов из класса $\mathcal{J}_{n,\,q=k}$.

Лемма 5. *Если $k \geq 1$ и G — $(n-1)$-вершинный граф с $\binom{n-1}{2} - k$ ребрами, то $K_1 + G \in \mathcal{J}_{n,\,q=k}$.*

Доказательство. Поскольку $k \geq 1$, граф G содержит несмежные вершины. Следовательно, $d(K_1+G) = 2$. Учитывая (2), получаем $|E(K_1+G)| = |E(G)| + n - 1 = \binom{n}{2} - k$. Теперь очевидно, что $K_1 + G \in \mathcal{J}_{n,\,q=k}$. □

Непосредственно из леммы 5 получаем

Следствие 3. *Если $k \geq 1$ и $G \in \mathcal{J}_{n,\,q=k}$, то $K_1 + G \in \mathcal{J}_{n+1,\,q=k}$.*

Теорема 3. *При $k \geq 1$ в классе n-вершинных графов диаметра 2 существует граф, имеющий в точности k пар диаметральных вершин, тогда и только тогда, когда $n \geq \lceil 0.5(3+\sqrt{1+8k})\rceil$.*

Доказательство. В силу условия $k \geq 1$ и системы строгих неравенств (1) существует единственное целое $s \geq 2$ такое, что

$$\binom{s-1}{2} < k \leq \binom{s}{2}. \tag{3}$$

Следовательно, s является наименьшим целым решением неравенства $k \leq \binom{s}{2}$. Решая это квадратное неравенство, находим

$$s = \lceil 0.5(1+\sqrt{1+8k})\rceil. \tag{4}$$

Необходимость. Пусть существует граф $G \in \mathcal{J}_{n,\,q=k}$. Тогда $n \geq s+1 = \lceil 0.5(3+\sqrt{1+8k})\rceil$ в силу (3), (4) и леммы 4.

Достаточность. Пусть $n \geq \lceil 0.5(3+\sqrt{1+8k})\rceil$. В силу (4) имеем $n \geq s+1$. Поэтому, учитывая (1) и (3), получаем

$$0 \leq \binom{n-1}{2} - k \leq \binom{n-1}{2}.$$

Следовательно, существует $(n-1)$–вершинный граф G с $\binom{n-1}{2} - k$ ребрами. По лемме 5 заключаем $K_1 + G \in \mathcal{J}_{n,\,q=k}$. □

3. Подсчет графов

Введем обозначения. Через $\mathcal{J}^*_{n,\,q=k}$ обозначим класс n-вершинных помеченных графов, содержащих в точности k пар различных несмежных вершин. Для произвольного подмножества рёбер $S \subseteq E(K_n)$ полного графа K_n через K_n^S обозначим граф, получающийся из K_n удалением рёбер из множества S. Непосредственно из определений вытекает следующая

Лемма 6 (о классе $\mathcal{J}^*_{n,\,q=k}$). *Граф $G \in \mathcal{J}^*_{n,\,q=k}$ тогда и только тогда, когда существует k-элементное множество $S \subseteq E(K_n)$ такое, что $G = K_n^S$.*

Следствие 4 (о числе графов класса $\mathcal{J}^*_{n,\,q=k}$). *Справедливо следующее равенство*

$$|\mathcal{J}^*_{n,\,q=k}| = \binom{\binom{n}{2}}{k}.$$

Доказательство. Непосредственно вытекает из леммы 6 и следующей очевидной эквивалентности: $K_n^S \neq K_n^{S'} \Leftrightarrow S \neq S'$. $\square$

Лемма 7. *При $n > k+1 > 1$ выполняется равенство $\mathcal{J}_{n,\,q=k} = \mathcal{J}^*_{n,\,q=k}$.*

Доказательство. Покажем включение $\mathcal{J}_{n,\,q=k} \subseteq \mathcal{J}^*_{n,\,q=k}$. Пусть $G \in \mathcal{J}_{n,\,q=k}$. Тогда в G имеется в точности k пар диаметральных вершин. Остальные пары различных вершин не являются диаметральными, а так как $d(G) = 2$, то они являются смежными. Следовательно, в графе G имеется в точности k пар различных несмежных вершин, т.е. $G \in \mathcal{J}^*_{n,\,q=k}$.

Пусть теперь $G \in \mathcal{J}^*_{n,\,q=k}$. Предположим, что G — несвязный граф и c — число его компонент связности. В силу известной верхней оценки числа ребер n-вершинного графа с c компонентами связности (см., например, теорему 4.9 [1]) и (1), имеем

$$|E(G)| = \binom{n}{2} - k \leq \binom{n-c+1}{2} \leq \binom{n-1}{2}.$$

Теперь, используя (2), получаем $n \leq k+1$, пришли к противоречию. Следовательно, G — связный граф. Кроме того, выполняется неравенство $d(G) \geq 2$, так как $k > 0$.

Предположим, что $d(G) \geq 3$. Тогда в графе G существует некоторая кратчайшая цепь длины 3 с концами $u, v \in V$ и проходящая через различные вершины $u', v' \in V \setminus \{u, v\}$ такие, что $\rho_G(u, u') = \rho_G(v, v') = 1$. Тогда в G нет трех рёбер uv, uv' и vu'. Кроме того, для любой вершины $w \in V \setminus \{u, u', v', v\}$ имеем $uw \notin E(G)$ или $vw \notin E(G)$. Следовательно, в G есть не менее $n-1$ пар несмежных различных вершин, т.е. $k \geq n-1$. Пришли к противоречию с условием $n > k+1$. Таким образом, заключаем $d(G) = 2$ и $G \in \mathcal{J}_{n,\,q=k}$. $\square$

Приведем пример графа, показывающий, что уже при $n = k+1$ равенство классов графов $\mathcal{J}_{n,\,q=k} = \mathcal{J}^*_{n,\,q=k}$ из леммы 7 не выполняется. Действительно, граф $K_1 \cup K_k$ имеет $k+1$ вершину и ровно k пар несмежных различных вершин, при этом не является связным. Следовательно, $K_1 \cup K_k \in \mathcal{J}^*_{n,\,q=k} \setminus \mathcal{J}_{n,\,q=k}$ при $n = k+1$. Поэтому оценка числа вершин из леммы 7 неулучшаема.

Непосредственно из леммы 7 и следствия 4 вытекает следующая

Теорема 4 (о числе графов класса $\mathcal{J}_{n,\,q=k}$). *Для любого наперед заданного целого $k \geq 1$ число помеченных n-вершинных графов диаметра 2, содержащих в точности k пар диаметральных вершин, равно $\binom{\binom{n}{2}}{k}$ для всех $n > k+1$.*

4. Типичные и нетипичные графы класса $\mathcal{J}_{n,\,q=k}$

Пусть $n \geq 2k > 0$ и $n \neq 2$ (т.е $n \geq 3$ при $k = 1$). Определим граф из класса $\mathcal{J}_{n,\,q=k}$ следующим образом. В графе K_n удалим произвольно выбранное ребро $e_1 = u_1v_1 \in E(K_n)$. Имеется $\binom{n}{2}$ возможностей выбора ребра e_1. Далее, в полученном графе $K_n \setminus e_1$ удалим произвольно выбранное ребро $e_2 = u_2v_2 \in E(K_n \setminus \{u_1, v_1\})$. Для выбора e_2 имеется $\binom{n-2}{2}$ возможностей. Продолжая этот процесс k раз, на последнем шаге построения в графе $K_n \setminus \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$

удалим ребро $e_k = u_k v_k \in E(K_n \setminus \{u_1, v_1, \ldots, u_{k-1}, v_{k-1}\})$, ребро e_k можно выбрать $\binom{n-2(k-1)}{2}$ способами. Полученный граф $K_n \setminus \{e_1, \ldots, e_k\}$ обозначим через $G(e_1, \ldots, e_k)$. В силу леммы 7 имеем $G(e_1, \ldots, e_k) \in \mathcal{J}_{n,\, q=k}$.

Через $\mathcal{J}^{\top}_{n,\, q=k}$ при $n \geq 2k > 0$ и $n \neq 2$ обозначим класс всех графов $G(e_1, \ldots, e_k)$, получаемых вышеописанным способом, в противном случае полагаем $\mathcal{J}^{\top}_{n,\, q=k} = \varnothing$. Иными словами, $\mathcal{J}^{\top}_{n,\, q=k}$ — класс графов, получаемых удалением k попарно несмежных рёбер из полного графа K_n при $n \neq 2$. На рис. 1 приведен пример графа из класса $\mathcal{J}^{\top}_{7,\, q=2}$, а именно граф $\overline{2K}_2 + K_3$.

$\overline{2K_2} + K_3 \in \mathcal{J}^{\top}_{7,\, q=2}$ $\quad$ $\overline{K}_{1,2} + K_4 \in \mathcal{J}^{\perp}_{7,\, q=2}$

Рис. 1. Графы класса $\mathcal{J}_{7,\, q=2}$

В следующей лемме и далее граф $G + K_n$ при $n = 0$ полагаем равным G. Непосредственно из построения, леммы 7 и теоремы 2 вытекает

Лемма 8 (о графах $G(e_1, \ldots, e_k)$)**.** *Выполняются следующие свойства:*

(i) $\mathcal{J}^{\top}_{n,\, q=k} \subseteq \mathcal{J}_{n,\, q=k}$ *и* $\mathcal{J}^{\top}_{n,\, q=1} = \mathcal{J}_{n,\, q=1}$;

(ii) $G(e_1, \ldots, e_k) = G(e'_1, \ldots, e'_k) \Leftrightarrow \{e_1, \ldots, e_k\} = \{e'_1, \ldots, e'_k\}$;

(iii) $G \in \mathcal{J}^{\top}_{n,\, q=k} \Leftrightarrow G \cong \overline{kK}_2 + K_{n-2k}\ \&\ n \geq 2k > 0\ \&\ n \neq 2$.

Подсчитаем число графов в $\mathcal{J}^{\top}_{n,\, q=k}$.

Лемма 9 (число графов класса $\mathcal{J}^{\top}_{n,\, q=k}$)**.** *Справедливы следующие равенства:*

(i) $|\mathcal{J}^{\top}_{n,\, q=k}| = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \binom{n-2i}{2}$ *при* $n \geq 2k > 0$ *и* $n \neq 2$;

(ii) $|\mathcal{J}^{\top}_{n,\, q=k}| \sim \frac{n^{2k}}{2^k k!}$ *при фиксированном* $k \geq 1$.

Доказательство. По вышеописанному построению графов $G(e_1, \ldots, e_k)$ выбор рёбер $e_1, \ldots, e_k$ (с попарно различными концами) возможен $\prod_{i=0}^{k-1} \binom{n-2i}{2}$ способами. Учитывая повторы графов, связанные с порядком выбора рёбер $e_1, \ldots, e_k$ (лемма 8(ii)), получаем требуемое в (i) выражение для $|\mathcal{J}^{\top}_{n,\, q=k}|$.

В силу леммы 2 и доказанного утверждения (i) при фиксированном $k \geq 1$ и $n \to \infty$ имеем

$$|\mathcal{J}^{\top}_{n,\, q=k}| \sim \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(n-2i)^2}{2} \sim \frac{n^{2k}}{2^k k!}.$$

□

В следующей теореме показывается, что $\mathcal{J}^{\top}_{n,\, q=k}$ — класс типичных графов для класса $\mathcal{J}_{n,\, q=k}$.

Теорема 5 (типичные графы класса $\mathcal{J}_{n,\, q=k}$)**.** *Для любого наперёд фиксированного $k \geq 1$ графы, изоморфные $\overline{kK}_2 + K_{n-2k}$ при $n \neq 2$, образуют класс типичных графов класса $\mathcal{J}_{n,\, q=k}$.*

Доказательство. В силу утверждений (i) и (iii) леммы 8 графы, изоморфные $\overline{kK_2 + K_{n-2k}}$ (при $n \geq 2k$ и $n \neq 2$), образуют подкласс $\mathcal{J}^{\top}_{n,\,q=k} \subseteq \mathcal{J}_{n,\,q=k}$. Учитывая теорему 4, лемму 2 и лемму 9(ii), заключаем

$$|\mathcal{J}_{n,\,q=k}| \sim \binom{\binom{n}{2}}{k} \sim \frac{1}{k!}\binom{n}{2}^k \sim \frac{n^{2k}}{2^k k!} \sim |\mathcal{J}^{\top}_{n,\,q=k}|.$$

□

Теорема 5 означает, что почти все графы класса $\mathcal{J}_{n,\,q=k}$ изоморфны $\overline{kK_2 + K_{n-2k}}$. Теперь покажем, что при $k \geq 2$ класс $\mathcal{J}_{n,\,q=k}$ не исчерпывается этими типичными графами из класса $\mathcal{J}^{\top}_{n,\,q=k}$ ($\mathcal{J}_{n,\,q=k} = \mathcal{J}^{\top}_{n,\,q=k}$ при $k = 1$). Рассмотрим ещё один достаточно широкий подкласс класса $\mathcal{J}_{n,\,q=k}$ при $n > k+1 > 1$ (графы из этого подкласса уже использовались в предыдущем разделе 3). Определим граф из класса $\mathcal{J}_{n,\,q=k}$ следующим образом. Выберем различные вершины $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V$, а затем в графе K_n последовательно удалим рёбра $e_1 = v_0v_1$, ..., $e_k = v_0v_k$. Полученный граф $K_n \setminus \{e_1, \ldots, e_k\}$ обозначим через $G(v_0, v_1, \ldots, v_k)$. Пусть при $n > k+1 > 1$ класс $\mathcal{J}^{\perp}_{n,\,q=k}$ состоит из всех графов $G(v_0, v_1, \ldots, v_k)$, получаемых вышеописанным способом, в противном случае полагаем $\mathcal{J}^{\perp}_{n,\,q=k} = \varnothing$. Иными словами, $\mathcal{J}^{\perp}_{n,\,q=k}$ — класс графов, получаемых удалением k рёбер, инцидентных одной вершине, из полного графа K_n при $n > k+1 > 1$. На рис. 1 приведен пример графа из класса $\mathcal{J}^{\perp}_{7,\,q=2}$, а именно граф $\overline{K}_{1,2} + K_4$.

Лемма 10 (о графах класса $\mathcal{J}^{\perp}_{n,\,q=k}$)**.** *Выполняются следующие свойства:*

(i) $\mathcal{J}^{\perp}_{n,\,q=k} \subseteq \mathcal{J}_{n,\,q=k}$ *и* $\mathcal{J}^{\perp}_{n,\,q=1} = \mathcal{J}_{n,\,q=1}$;

(ii) $G(v_0, v_1, \ldots, v_k) = G(v'_0, v'_1, \ldots, v'_k)$ *тогда и только тогда, когда либо* $k = 1$ *и* $\{v_0, v_1\} = \{v'_0, v'_1\}$*, либо* $k \geq 2$ *и* $v_0 = v'_0$, $\{v_1, \ldots, v_k\} = \{v'_1, \ldots, v'_k\}$;

(iii) $G \in \mathcal{J}^{\perp}_{n,\,q=k} \Leftrightarrow G \cong \overline{K}_{1,k} + K_{n-(k+1)}$ & $n > k+1 > 1$.

(iv) $|\mathcal{J}^{\perp}_{n,\,q=k}| = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k}(n-i)$ *при* $n > k+1 > 2$ *и* $|\mathcal{J}^{\perp}_{n,\,q=1}| = \binom{n}{2}$ *при* $n \geq 3$;

(v) $|\mathcal{J}^{\perp}_{n,\,q=k}| \sim \frac{n^{k+1}}{k!}$ *при фиксированном* $k \geq 2$.

Доказательство. Из условия $n > k+1 > 0$, леммы 7 и теоремы 2 вытекает утверждение (i). Далее, заметим, что при $k = 1$ графы $G(v_0, v_1)$ и $G(e_1)$ совпадают, а при $k \geq 2$ вершина v_0 графа $G(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ определяется однозначно как единственная вершина наименьшей степени. Отсюда нетрудно вывести утверждение (ii). Из определения графа $G(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ следует, что его порожденный подграф с множеством вершин $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ изоморфен $\overline{K}_{1,k}$. Этот изоморфизм очевидным образом продолжается до изоморфизма требуемых в утверждении (iii) графов. Подсчет графов в утверждениях (iv) и (v) осуществляется аналогично лемме 9 (когда вместо выбора k рёбер делается выбор $k+1$ вершин). □

Теорема 6 (пример нетипичных графов класса $\mathcal{J}_{n,\,q=k}$)**.** *Для любого наперёд фиксированного* $k \geq 2$ *в классе* $\mathcal{J}_{n,\,q=k}$ *почти нет графов, изоморфных* $\overline{K}_{1,k} + K_{n-(k+1)}$.

Доказательство. В силу утверждений (i) и (iii) леммы 10 графы, изоморфные $\overline{K}_{1,k} + K_{n-(k+1)}$ (при $n > k+1$), образуют подкласс $\mathcal{J}^{\perp}_{n,\,q=k} \subseteq \mathcal{J}_{n,\,q=k}$. Учитывая теорему 5, лемму 9(ii) и лемму 10(v), заключаем

$$\frac{|\mathcal{J}^{\perp}_{n,\,q=k}|}{|\mathcal{J}_{n,\,q=k}|} \sim \frac{|\mathcal{J}^{\perp}_{n,\,q=k}|}{|\mathcal{J}^{\top}_{n,\,q=k}|} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

□

Теорема 6 показывает, что класс графов $\mathcal{J}^{\perp}_{n,\,q=k}$ при $k \geq 2$ не является типичным для класса $\mathcal{J}_{n,\,q=k}$ ($\mathcal{J}^{\perp}_{n,\,q=k} = \mathcal{J}^{\top}_{n,\,q=k}$ при $k = 1$). Аналогичным свойством обладает любой подкласс класса $\mathcal{J}_{n,\,q=k}$, имеющий асимптотически "малое" пересечение с классом $\mathcal{J}^{\top}_{n,\,q=k}$ типичных графов.

5. Почти все графы

Для произвольного неотрицательного целого k через $\mathcal{J}_{n,\,q\geq k}$ обозначим класс n-вершинных помеченных графов диаметра 2, содержащих не менее k пар диаметральных вершин. В этом разделе будем рассматривать более общий случай, когда k есть функция, зависящая от n и принимающая целые неотрицательные значения, с заданным ограничением роста, охватывающем случай фиксированного целого $k \geq 1$.

Для оценки суммы биномиальных коэффициентов далее будет использоваться функция энтропии и ее свойства (см., например, [5]). *Функция энтропии* $H(\epsilon)$ определяется для каждого ϵ из интервала $(0, 1)$ равенством $H(\epsilon) = -\epsilon \log_2 \epsilon - (1-\epsilon)\log_2(1-\epsilon)$. В нуле и единице функция $H(\epsilon)$ доопределяется по непрерывности как $H(0) = H(1) = 0$. Функция энтропии $H(\epsilon)$ непрерывна, выпукла вверх, возрастает на интервале $[0, \frac{1}{2}]$ и убывает на интервале $[\frac{1}{2}, 1]$, максимальное значение $H(\epsilon)$ равно 1 и достигается в единственном $\epsilon = \frac{1}{2}$. Хорошо известна следующая оценка суммы биномиальных коэффициентов.

Лемма 11 [5] (энтропийное неравенство)**.** *При* $0 < k \leq \frac{n}{2}$ *справедливо следующее неравенство*

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \leq 2^{nH(\frac{k}{n})}.$$

Теорема 7. *Пусть* $0 < k \leq \epsilon\binom{n}{2}$ *при* $n \to \infty$*, где* ϵ *— фиксированная константа и* $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$*. Тогда почти все* n*-вершинные графы диаметра* 2 *имеют не менее* k *пар диаметральных вершин.*

Доказательство. Пусть $\epsilon^*(n) = k/\binom{n}{2}$. Тогда для всех достаточно больших n выполняются неравенства $0 < \epsilon^*(n) \leq \epsilon < \frac{1}{2}$. Теперь, используя включение $\mathcal{J}_{n,\,q=i} \subseteq \mathcal{J}^*_{n,\,q=i}$, следствие 4, лемму 11 и возрастание функции энтропии H на интервале $[0, \frac{1}{2}]$, при $n \to \infty$ получаем

$$\Big|\bigcup_{i=0}^{k-1} \mathcal{J}_{n,\,q=i}\Big| = \sum_{i=0}^{k-1} |\mathcal{J}_{n,\,q=i}| \leq \sum_{i=0}^{k} \binom{\binom{n}{2}}{i} \leq 2^{\binom{n}{2}H(\epsilon^*(n))} \leq 2^{\binom{n}{2}H(\epsilon)} = o(2^{\binom{n}{2}}). \tag{5}$$

Из определения классов имеем

$$\mathcal{J}_{n,\,q\geq k} = \mathcal{J}_{n,\,d=2} \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} \mathcal{J}_{n,\,q=i}. \tag{6}$$

Таким образом, из (5), (6) и теоремы 1 заключаем

$$\frac{|\mathcal{J}_{n,\,q\geq k}|}{|\mathcal{J}_{n,\,d=2}|} = 1 - \frac{\left|\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} \mathcal{J}_{n,\,q=i}\right|}{|\mathcal{J}_{n,\,d=2}|} \geq 1 - \frac{2^{\binom{n}{2}}}{|\mathcal{J}_{n,\,d=2}|}\, o(1) \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

$\square$

Следствие 5. *Для любого наперед фиксированного целого $k \geq 1$ почти все графы диаметра 2 имеют не менее k пар диаметральных вершин.*

Следствие 5 показывает, что нельзя ограничить число пар диаметральных вершин наперед заданным фиксированным целым, чтобы получить почти все графы диаметра 2.

Следствие 6. *При фиксированном $k \geq 1$ почти все графы содержат не менее k пар различных несмежных вершин.*

References

[1] V.A. Emelichev, O.I. Melnikov, V.I. Sarvanov, R.I. Tyshkevich, *Lectures on Graph Theory*, B.I.Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994. Zbl 0865.05001

[2] T.I. Fedoryaeva, *The diversity vector of balls of a typical graph of small diameter*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **22**:6 (2015), 43–54. Zbl 349.05085

[3] T.I. Fedoryaeva, *Structure of the diversity vector of balls of a typical graph with given diameter*, Sib. Electron. Mat. Izv., **13** (2016), 375–387. Zbl 1341.05051

[4] T.I. Fedoryaeva *Asymptotic approximation for the number of n-vertex graphs of given diameter*, J. Appl. Ind. Math., **11**:2 (2017), 204–2014. Zbl 1399.05108

[5] D. Galvin, *Three tutorial lectures on entropy and counting*, arXiv preprint, (2014), arXiv:1406.7872

[6] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, Amsterdam, 1994. Zbl 0836.00001

[7] F. Harary, *Graph Theory*, Addison–Wesley, London, 1969. Zbl 0182.57702

[8] J.W. Moon, L. Moser, *Almost all (0,1) matrices are primitive*, Stud. Sci. Math. Hung., **1** (1966), 153–156. Zbl 0142.27102

Tatiana Ivanovna Fedoryaeva
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: fti@math.nsc.ru