

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ПОРЯДКИ В ПРОСТЫХ
ПРАВОАЛЬТЕРНАТИВНЫХ СУПЕРАЛГЕБРАХ И
ПРАВОСИММЕТРИЧЕСКИХ АЛГЕБРАХ.А.С. ПАНАСЕНКО *Представлено*

Abstract: We consider some recently constructed examples of simple finite-dimensional right-alternative superalgebras and right-symmetric algebras. We prove that the central order in any of these algebras and superalgebras is embedded in a finite module over its center (or over the even part of its center in the case of superalgebras).

Keywords: central order, simple superalgebra, simple algebra, right-alternative superalgebra, right-symmetric algebra.

1 Введение

Ассоциатор является важнейшей полилинейной функцией в теории неассоциативных алгебр. Первое его существенное применение относится к теории альтернативных алгебр. По определению альтернативная алгебра — это алгебра, в которой ассоциатор является кососимметрической функцией от своих аргументов. Противоположным понятием является

PANASENKO, A.S., ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ПОРЯДКИ В ПРОСТЫХ ПРАВОАЛЬТЕРНАТИВНЫХ СУПЕРАЛГЕБРАХ И ПРАВОСИММЕТРИЧЕСКИХ АЛГЕБРАХ.

© 2024 PANASENKO A.S..

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2022-0002.

Получена 1 января 2024 г., опубликована 31 декабря 2024 г.

ассосимметрическая алгебра, в которой ассоциатор является симметрической функцией от своих аргументов. Как показал Э. Клейнфелд в [1], эти алгебры слишком близки к ассоциативным: в частности, любая первичная ассосимметрическая алгебра над полем характеристики не 2 и не 3 является ассоциативной.

На протяжении десятилетий принимались попытки изучать теорию алгебр, в которых ассоциатор обладает более слабыми свойствами (косо)симметричности. Алгебры, в которых ассоциатор является симметричной функцией от второго и третьего аргументов, называются правосимметрическими. Эти объекты (и антиизоморфные им левосимметрические алгебры) возникали в различных областях абстрактной алгебры и геометрии: для классификации выпуклых однородных конусов [2], при изучении уравнения Янга-Бакстера [3], многие другие применения приведены в обзоре [4]. К сожалению, многообразие этих алгебр столь велико, что не оставляет шансов для адекватной структурной теории. Многие классические результаты для других многообразий оказываются неверными для правосимметрических алгебр даже в конечномерном случае. Частный случай левосимметрических алгебр — алгебры Новикова — обладает приемлемой (хоть и далекой от идеала) конечномерной структурной теорией с надеждой на переход к бесконечномерным алгебрам (см. работы [5], [6], [7], [8], [9]).

Алгебры, в которых ассоциатор является кососимметричной функцией от второго и третьего аргументов, называются правоальтернативными. Конечномерная теория правоальтернативных алгебр очень близка к теории альтернативных алгебр. Как показал А. Алберт в [10], каждая простая конечномерная правоальтернативная алгебра альтернативна. В бесконечномерном случае также прослеживается тот факт, что наличие неальтернативных правоальтернативных алгебр можно рассматривать в качестве погрешности. Например, в [11] показано, что каждая невырожденная (в частности, унитарная простая) правоальтернативная алгебра альтернативна. В то же время ([12]), существуют простые правоальтернативные ниль-алгебры индекса 3.

Однако, переход к супералгебрам сильно расширяет возможности. Изначально, исследование правоальтернативных супералгебр велось в рамках частных случаев — альтернативных и $(-1, 1)$ супералгебр. В последнее десятилетие теория простых конечномерных правоальтернативных супералгебр активно развивалась преимущественно в работах С. В. Пчелинцева и О. В. Шашкова (краткое изложение имеется в обзоре [13]).

В работе Э. Форманека [14] было доказано, что центральный порядок в конечномерной центральной простой ассоциативной алгебре (т.е. в алгебре матриц) вкладывается в конечно порожденный модуль над своим центром. В работах [15] и [16] этот результат был перенесен на альтернативные и йордановы алгебры. В работе [17] были рассмотрены простые альтернативные и йордановы супералгебры, для большинства из них

было доказано вложение центрального порядка в этих супералгебрах в конечно порожденный модуль над четной частью своего центра.

Данная работа является естественным продолжением упомянутых выше статей. В этой работе рассмотрены центральные порядки в некоторых важных простых правосимметрических алгебрах и простых правоальтернативных супералгебрах, построенных в последние годы. Для этих примеров доказано, что они вложимы в конечный модуль над своим центром (четной частью своего центра в случае супералгебр).

2 Примеры простых правосимметрических алгебр

Будем использовать стандартные обозначения для ассоциатора и коммутатора в произвольной алгебре: $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$, $[x, y] = xy - yx$.

Определение. Пусть A — алгебра и для любых $x, y, z \in A$ выполнено $(x, y, z) = (x, z, y)$. Тогда алгебра A называется **правосимметрической алгеброй**.

Одним из способов построения новых правосимметрических алгебр является конструкция эндоморфа. Этот метод, в частности, позволил построить следующий пример так называемой **матричной RS -алгебры**, впервые возникший в [18].

Пример 1. Пусть F^n — это прямая сумма n копий поля F . В алгебре $\overline{F}^n$ есть базис $e_1, \dots, e_n$, где $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ и единица стоит на i -ом месте. Рассмотрим линейное отображение $\bar{\cdot} : F^n \rightarrow M_n(F)$, $\bar{e}_i = e_{ii}$. Зададим на прямой сумме подалгебр $F^n + M_n(F)$ структуру алгебры по правилу

$$v \cdot A = vA, \quad A \cdot v = vA + [A, \bar{v}].$$

Если $n > 1$, то $F^n + M_n(F)$ — простая неассоциативная правосимметрическая алгебра.

Пусть V_2 — стандартный модуль строк над $M_2(F)$. Зафиксируем отображение $\pi : V_2 \rightarrow M_2(F)$ по правилу

$$\pi(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}.$$

Для фиксированной матрицы $C \in M_2(F)$ определим $\psi_C(x) = \pi(x) \odot C$, где $\odot$ — произведение Адамара.

Пример 2. Пусть V_2 — пространство строк длины 2 над полем F и на V_2 задана некоторая билинейная операция $x \bullet y$. На прямой сумме пространств $\mathcal{A} = V_2 + M_2(F)$ определим умножение, полагая, что $M_2(F)$ — это матричная подалгебра, vA определено как умножение строки v на матрицу A , и существует такая $C \in M_2(F)$, что

$$Av = vA + [A, [R_v^\bullet]], \quad wu = w \bullet u + \psi_C(u)\pi(w)$$

для любых $v, w, u \in V_2$, $A \in M_2(F)$, где $[\varphi]$ — это матрица линейного преобразования пространства V_2 .

В работе [19] А. П. Пожидаев и И. П. Шестаков доказали, что правосимметрическая алгебра вида $W + M_2(F)$, где W — неприводимый модуль над sl_2 , имеет вид $\mathcal{A}$ из примера 2.

3 Центральные порядки в простых правосимметрических алгебрах

Определение. Пусть A — алгебра. Тогда *центром* алгебры A называется следующее множество:

$$Z(A) = \{z \in A \mid (z, x, y) = (x, z, y) = (x, y, z) = [x, z] = 0 \quad \forall x, y \in A\}.$$

Пусть A — алгебра, $Z = Z(A)$ — центр алгебры A , причем Z не содержит делителей нуля всей алгебры A . Рассмотрим множество пар $S = \{(a, z) \mid a \in A, z \in Z, z \neq 0\}$. На множестве S рассмотрим отношение эквивалентности:

$$(a, x) \sim (b, y) \longleftrightarrow ay = bx.$$

Обозначим множество классов эквивалентности через $Z^{-1}A$, а класс эквивалентности, содержащий элемент (a, z) будем обозначать через $\frac{a}{z}$. На $Z^{-1}A$ зададим сложение и умножение, как на обычных дробях. Тогда $Z^{-1}A$ является алгеброй, содержащей A в качестве подалгебры. Кроме того, алгебру $Z^{-1}A$ можно рассматривать над полем частных $Z^{-1}Z$.

Определение. Пусть A — алгебра, $Z = Z(A)$ — центр алгебры A , причем Z не содержит делителей нуля всей алгебры A . Тогда алгебра A называется *центральным порядком* в алгебре $Z^{-1}A$.

Заметим, что $A \cap Z^{-1}Z = Z$. В самом деле, включение $Z \subseteq A \cap Z^{-1}Z$ очевидно. Пусть $b \in A \cap Z^{-1}Z$. Поскольку $Z^{-1}Z = Z(Z^{-1}A)$ (доказано в [20], Предложение 8.2), то $[b, x] = (b, x, y) = (x, b, y) = (x, y, b) = 0$ для любых $x, y \in A$. Но $b \in A$, так что $b \in Z(A)$.

На матричной RS-алгебре задано явное умножение, поэтому начнем наше исследование центральных порядков в правосимметрических алгебрах с этого случая.

Лемма 1. Пусть B — алгебра, являющаяся центральным порядком в матричной RS-алгебре $A = F^n + M_n(F)$. Тогда B вкладывается в конечно порожденный $Z(B)$ -модуль.

Доказательство. Обозначим $\bar{B} = Z^{-1}B$. Заметим, что $F = Z^{-1}Z$. В алгебре $\bar{B}$ есть базис $e_1, \dots, e_n, e_{ij}$ над полем F , где $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ и единица стоит на i -ом месте. Существует $z \in Z$ такой, что $e_i = \frac{f_i}{z}$, $e_{ij} = \frac{f_{ij}}{z}$ и $f_i, f_{ij} \in B$. Пусть $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \sum \beta_{ij} e_{ij} \in B$, $\alpha_i, \beta_{ij} \in F$. Если $F \neq m$, то

$$\sum_{i=1}^n (f_{im}(f_{mm}(af_{kk})))f_{ki} = \beta_{mk}z^4.$$

Если $k = m$, то для $s \neq k$

$$\sum_{i=1}^n (f_{ik}(f_{kk}((f_{kk}(af_{kk}))f_{ks})))f_{si} = \beta_{kk}z^6.$$

Кроме того, имеем для $s \neq k$

$$\sum_{i=1}^n (f_{ik}(f_{km}(f_{mm}((f_{kk}(af_{kk}))f_{km}))))f_{mi} = \alpha_k z^7.$$

Таким образом, $\alpha_k z^7, \beta_{km} z^6 \in B \cap F = Z$, откуда

$$az^7 \in \sum_{i=1}^n Ze_i + \sum_{i,j=1}^n Ze_{ij}.$$

Таким образом Z -модуль Bz^7 вкладывается в конечно порожденный Z -модуль. Осталось заметить, что Z -модуль Bz^7 изоморфен Z -модулю B . $\square$

Перейдем к другому примеру простой правосимметрической алгебры.

Лемма 2. Пусть B — алгебра, являющаяся центральным порядком в алгебре $\mathcal{A} = V_2 + M_2(F)$, причем пространства $F(1, 0)$ и $F(0, 1)$ не замкнуты относительно операции $\bullet$. Тогда B вкладывается в конечно порожденный $Z(B)$ -модуль.

Доказательство. Обозначим $\bar{B} = Z^{-1}B$. Заметим, что $F = Z^{-1}Z$. В алгебре $\bar{B}$ есть базис $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1), e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$ над полем F . Пусть билинейная операция $\bullet$ на V_2 задана следующим образом:

$$e_1 \bullet e_1 = (\gamma_1, \delta_1), e_1 \bullet e_2 = (\gamma_2, \delta_2), e_2 \bullet e_1 = (\gamma_3, \delta_3), e_2 \bullet e_2 = (\gamma_4, \delta_4).$$

Пусть $C = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}$. Существует $z \in Z$ такой, что $e_i = \frac{f_i}{z}, e_{ij} = \frac{f_{ij}}{z}, \gamma_i = \frac{\mu_i}{z}, \delta_i = \frac{\nu_i}{z}, \varepsilon_i = \frac{\xi_i}{z}$ и $f_i, f_{ij} \in B, \mu_i, \nu_i, \xi_i \in Z$. Пусть $a = (\alpha, \beta) + \sum \alpha_{ij} e_{ij}$.

1) Предположим, $\delta_1 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \chi_1(a) &= -\frac{1}{\nu_1^3} (f_{21}(((f_1(af_{11}))f_{22})f_{21}))(\nu_1 f_{11} - \nu_1 f_{22} + (\nu_3 - \mu_1)f_{21}) = \alpha z^4, \\ \chi_2(a) &= -\frac{1}{\nu_1^3} (f_{21}(((f_1((af_{22})f_{21}))f_{22})f_{21}))(\nu_1(f_{11} - f_{22}) + (\nu_3 - \mu_1)f_{21}) = \beta z^5. \end{aligned}$$

Но тогда

$$f_{1i}(az^6 - \chi_1(a)f_1z - \chi_2(a)f_2)f_{j1} + f_{2i}((az^6 - \chi_1(a)f_1z - \chi_2(a)f_2))f_{j2} = \alpha_{ij}z^8.$$

Таким образом, $\alpha z^4, \beta z^5, \alpha_{ij}z^8 \in B \cap F = Z$, откуда $az^8 \in Ze_1 + Ze_2 + \sum Ze_{ij}$. Таким образом, Z -модуль Bz^8 вкладывается в конечно порожденный Z -модуль. Осталось заметить, что Z -модуль Bz^8 изоморфен Z -модулю B .

2) Предположим, $\gamma_4 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_4^3}(f_{12}(((f_2(af_{22}))f_{11})f_{12}))(-\mu_4f_{11} + \mu_4f_{22} + (\mu_2 - \nu_4)f_{12}) &= \beta z^4, \\ \frac{1}{\mu_4^3}(f_{12}(((f_2((af_{11})f_{12}))f_{11})f_{12}))(-\mu_4f_{11} + \mu_4f_{22} + (\mu_2 - \nu_4)f_{12}) &= \alpha z^5. \end{aligned}$$

Тогда, как и в пункте 1, получаем $az^8 \in Ze_1 + Ze_2 + \sum Ze_{ij}$. Таким образом, Z -модуль Bz^8 вкладывается в конечно порожденный Z -модуль. Осталось заметить, что Z -модуль Bz^8 изоморфен Z -модулю B . $\square$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Пусть B — правосимметрическая алгебра, являющаяся центральным порядком либо в матричной RS -алгебре, либо в алгебре $V_2 + M_2(F)$, причем пространства $F(1, 0)$ и $F(0, 1)$ не замкнуты относительно операции $\bullet$. Тогда B вкладывается в конечно порожденный $Z(B)$ -модуль.

4 Примеры простых правоальтернативных супералгебр

Определение. $\mathbb{Z}_2$ -градуированная алгебра $B = A + M$, $AM + MA \subseteq M$, $A^2 + M^2 \subseteq A$, называется *правоальтернативной супералгеброй*, если для любых однородных элементов $x, y, z \in A \cup M$ выполнено

$$(x, y, z) + (-1)^{|z||y|}(x, z, y) = 0,$$

где $|a| = 0$, если $a \in A$ и $|a| = 1$, если $a \in M$.

Супералгебра $B = A + M$ называется *супералгеброй абелева типа*, если четная часть A ассоциативна и коммутативна, а нечетная часть M является ассоциативным A -бимодулем. Хорошо известны следующие две правоальтернативные супералгебры абелева типа.

Пример 3. Пусть F^n является прямой суммой n копий поля F и $[F^n]$ является векторным пространством, изоморфным F^n . Рассмотрим $B_{n|n} = F^n + [F^n]$ — прямую сумму векторных пространств со следующим умножением:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= xy, \\ [x] \cdot [y] &= xy, \\ x \cdot [y] &= [xy], \\ [x] \cdot y &= [x\tau(y)], \end{aligned}$$

где $x, y \in F^n$, xy — произведение в F^n , $\tau(a_1, \dots, a_n) = (a_2, \dots, a_n, a_1)$. Тогда $B_{n|n}$ — простая неассоциативная правоальтернативная супералгебра абелева типа.

Пример 4. Пусть $[F^2]$ является векторным пространством, изоморфным F^2 . Рассмотрим $B_{2|2}(\nu) = F^2 + [F^2]$ — прямую сумму векторных пространств со следующим умножением:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= xy, \\ [x] \cdot [y] &= x\chi(y), \\ x \cdot [y] &= [xy], \\ [x] \cdot y &= [xy^*], \end{aligned}$$

где $x, y \in F^2$, xy — произведение в F^2 , $(a_1, a_2)^* = (a_2, a_1)$, $\chi(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, a_1 + \nu a_2)$, $\nu \in F$. Тогда $B_{2|2}(\nu)$ — простая неассоциативная правоальтернативная супералгебра абелева типа.

В работе [21] С. В. Пчелинцев и О. В. Шашков доказали, что над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 любая центральная простая конечномерная правоальтернативная супералгебра абелева типа либо ассоциативна, либо изоморфна супералгебре $B_{n|n}$, либо изоморфна супералгебре $B_{2|2}(\nu)$ для некоторого ν из основного поля.

В работе Ж. П. Да Силвы, Л. С. И. Мураками и И. П. Шестакова [22] возникли правоальтернативные супералгебры, четная часть которых является алгеброй матриц второго порядка. Такие алгебры называются асимметричными дублями.

Пример 5. Пусть $w \in M_2(F)$ является фиксированной матрицей с ненулевым следом и $[M_2(F)]$ является векторным пространством, изоморфным $M_2(F)$. Рассмотрим $B_{4|4}(w) = M_2(F) + [M_2(F)]$ — прямую сумму векторных пространств со следующим умножением:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= xy, \\ [x] \cdot [y] &= \frac{\text{tr}(y)}{\text{tr}(w)}x, \\ [x] \cdot y &= [x\bar{y}], \\ x \cdot [y] &= [xy - ([x][y])^D], \end{aligned}$$

где $x, y \in M_2(F)$, xy — произведение в $M_2(F)$, $a^D = aw - wa$ для любого $a \in M_2(F)$ и $\bar{a}$ — это симплектическая инволюция, примененная к элементу $a \in M_2(F)$. Тогда $B_{4|4}(w)$ — простая неассоциативная правоальтернативная супералгебра.

В работе [23] С. В. Пчелинцев и О. В. Шашков доказали, что любой асимметричный дубль над полем характеристики не 2 либо альтернативен, либо изоморфен супералгебре $B_{4|4}(w)$ для некоторой $w \in M_2(F)$, $\text{tr}(w) \neq 0$.

5 Центральные порядки в простых правоальтернативных супералгебрах

Пусть $B = A + M$ — Z_2 -градуированная алгебра и $Z = Z(B)_0$ — четная часть центра алгебры B , причем Z не содержит делителей нуля всей алгебры B . Тогда, как и в случае обычных алгебр, можно определить Z_2 -градуированную алгебру $Z^{-1}B$.

Как и раньше, будем называть Z_2 -градуированную алгебру B **центральным порядком** в Z_2 -градуированной алгебре $Z^{-1}B$. Алгебру $Z^{-1}B$ можно рассматривать над полем частных $Z^{-1}Z$.

Начнем изучение с центральных порядков в супералгебрах абелева типа.

Лемма 3. *Пусть B — правоальтернативная супералгебра, являющаяся центральным порядком в супералгебре $B_{n|n}$ и $Z = Z(B)_0$. Тогда B вкладывается в конечно порожденный Z -модуль.*

Доказательство. Обозначим $\bar{B} = Z^{-1}B$, $F = Z^{-1}Z$. В алгебре $\bar{B}$ есть базис $e_1, \dots, e_n, [e_1], \dots, [e_n]$, где $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ и единица стоит на i -ом месте. Существует $z \in Z$ такой, что $e_i = \frac{f_i}{z}$, $[e_i] = \frac{g_i}{z}$. Пусть $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) + [(\beta_1, \dots, \beta_n)] \in B$, $\alpha_i, \beta_i \in F$. Введем обозначения

$$c_n := ((f_n a) f_n) = (0, \dots, 0, \alpha_n) z^2,$$

$$c_{i-1} := g_{i-1} (g_{i-1} c_i) = \alpha_n [e_{i-1}] z^{2(n-(i-2))} = \alpha_n g_{i-1} z^{2(n-(i-2))-1}$$

для $2 \leq i \leq n$. Таким образом,

$$(g_1 + \dots + g_n) \sum_{i=1}^n c_i z^{2(i-1)} = \alpha_n z^{2n}.$$

Отсюда $\alpha_n z^{2n} \in B \cap F = Z$. Аналогично, $\alpha_i z^{2n} \in B \cap F = Z$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Это означает, что

$$a z^{2n} \in \sum_{i=1}^n (Z e_i + Z [e_i]).$$

Таким образом Z -модуль $B z^{2n}$ вкладывается в конечно порожденный Z -модуль. Осталось заметить, что Z -модуль $B z^{2n}$ изоморфен Z -модулю B . $\square$

Лемма 4. *Пусть B — правоальтернативная супералгебра, являющаяся центральным порядком в супералгебре $B_{2|2}(\nu)$ и $Z = Z(B)_0$. Тогда B вкладывается в конечно порожденный Z -модуль.*

Доказательство. Обозначим $\bar{B} = Z^{-1}B$, $F = Z^{-1}Z$. В алгебре $\bar{B}$ есть базис $(1, 0), (0, 1), [(1, 0)], [(0, 1)]$ над полем F . Существует $z \in Z$ такой, что $(1, 0) = \frac{b_1}{z}$, $(0, 1) = \frac{b_2}{z}$, $[(1, 0)] = \frac{d_1}{z}$, $[(0, 1)] = \frac{d_2}{z}$ и $b_i, d_i \in B$. Пусть

$a = (\alpha_1, \alpha_2) + [(\beta_1, \beta_2)] \in B$, $\alpha_i, \beta_i \in F$. Тогда

$$\begin{aligned} (b_1 + b_2 + d_2)(b_1(ab_1)) &= \alpha_1 z^3, \\ (b_1 + b_2 + d_1)(b_2(ab_2)) &= \alpha_2 z^3, \\ (b_1 + b_2 + d_2)((b_1(ab_2))d_1) &= \beta_1 z^4, \\ (b_1 + b_2 + d_1)((b_2(ab_1))d_1) &= \beta_2 z^4. \end{aligned}$$

Таким образом, $\alpha_i z^3, \beta_i z^4 \in B \cap F = Z$, откуда

$$az^4 \in Z(1, 0) + Z(0, 1) + Z[(1, 0)] + Z[(0, 1)].$$

Таким образом Z -модуль Bz^4 вкладывается в конечно порожденный Z -модуль. Осталось заметить, что Z -модуль Bz^4 изоморфен Z -модулю B . $\square$

Далее, рассмотрим центральные порядки в ассиметричных дублях. Как легко видеть, особенность этих алгебр в том, что их четная часть является центральным порядком в алгебре матриц второго порядка.

Лемма 5. Пусть B — правоальтернативная супералгебра, являющаяся центральным порядком в супералгебре $B_{4|4}(w)$ и $Z = Z(B)_0$. Тогда B вкладывается в конечно порожденный Z -модуль.

Доказательство. Обозначим $\bar{B} = Z^{-1}B$, $F = Z^{-1}Z$. В алгебре $\bar{B}$ есть базис $e_{ij}, [e_{ij}]$, где $i, j \in \{1, 2\}$. Существует $z \in Z$ такой, что $e_{ij} = \frac{f_{ij}}{z}$, $[e_{ij}] = \frac{g_{ij}}{z}$, $\alpha = \frac{z_\alpha}{z}$, $\beta = \frac{z_\beta}{z}$, $\gamma = \frac{z_\gamma}{z}$, $\delta = \frac{z_\delta}{z}$. Пусть $a = \sum \alpha_{ij}e_{ij} + \sum \beta_{ij}[e_{ij}] \in B$, $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in F$. Пусть

$$w = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_{21}((f_{11}((f_{11}(af_{11}))f_{11}))f_{12}) + ((f_{11}((f_{11}(af_{11}))f_{11}))f_{12})f_{21} &= \alpha_{11}z^6, \\ f_{21}(((f_{12}(af_{12}))f_{22})f_{21})f_{12}) + (((f_{12}(af_{12}))f_{22})f_{21})f_{12})f_{21} &= \alpha_{12}z^6, \\ f_{12}(((f_{21}(af_{21}))f_{11})f_{12})f_{21}) + (((f_{21}(af_{21}))f_{11})f_{12})f_{21})f_{12} &= \alpha_{21}z^6, \\ ((f_{22}((f_{22}(af_{22}))f_{22}))f_{21})f_{12} + f_{12}((f_{22}((f_{22}(af_{22}))f_{22}))f_{21}) &= \alpha_{22}z^6, \\ (z_\alpha + z_\delta)((g_{22}(af_{22}))f_{12})f_{21} + f_{21}((g_{22}(af_{22}))f_{12})) &= \beta_{11}z^5, \\ (z_\alpha + z_\delta)((g_{11}(af_{21}))f_{12})f_{21} + f_{21}((g_{11}(af_{21}))f_{12})) &= -\beta_{12}z^5, \\ (z_\alpha + z_\delta)((g_{22}(af_{12}))f_{21})f_{12} + f_{12}((g_{22}(af_{12}))f_{21})) &= -\beta_{21}z^5, \\ (z_\alpha + z_\delta)((g_{11}(af_{11}))f_{12})f_{21} + f_{21}((g_{11}(af_{11}))f_{12})) &= \beta_{22}z^5. \end{aligned}$$

Таким образом, $\alpha_{ij}z^6, \beta_{ij}z^5 \in B \cap F = Z$, откуда

$$az^6 \in \sum Ze_{ij} + \sum Z[e_{ij}].$$

Таким образом Z -модуль Bz^6 вкладывается в конечно порожденный Z -модуль. Осталось заметить, что Z -модуль Bz^6 изоморфен Z -модулю B . $\square$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. Пусть B — правоальтернативная супералгебра, являющаяся центральным порядком в одной из супералгебр $B_{4|4}(w)$, $B_{n|n}$, $B_{2|2}(\nu)$ и $Z = Z(B)_0$. Тогда B вкладывается в конечно порожденный Z -модуль.

Кроме того, справедливо следующее следствие

Следствие 1. Пусть A — ассоциативная алгебра над полем характеристики не 2, являющаяся центральным порядком в алгебре матриц второго порядка и $B = A + M$ — правоальтернативная супералгебра, являющаяся центральным порядком в простой конечномерной супералгебре. Тогда B вкладывается в конечно порожденный Z -модуль, где $Z = Z(A)$.

Доказательство. В силу результатов работы [23] супералгебра $Z^{-1}B$ либо ассоциативна, либо изоморфна альтернативной супералгебре Шестакова $S_{4|2}(\sigma)$, либо изоморфна супералгебре $B_{4|4}(w)$. Первые два случая были разобраны в работе [17]. Третий случай разобран в лемме 3. $\square$

References

- [1] E. Kleinfeld, *Assosymmetric rings*, Proc. Amer. Math. Soc., **8** (1957), 983–986.
- [2] E. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 1033–1047.
- [3] I. Z. Golubchik, V. V. Sokolov, *Generalized operator Yang–Baxter equations, integrable ODEs and nonassociative algebras*, J. Nonlinear Math. Phys., **7**:2 (2000), 184–197.
- [4] D. Burde, *Left-symmetric algebras, or pre-Lie algebras in geometry and physics*, Centr. Eur. J. Math., **4** (2006), 323–357.
- [5] X. Xu, *On simple Novikov algebras and their irreducible modules*, J. Algebra **185**:3 (1996), 905–934.
- [6] A. Pozhidaev, U. Umirbaev, V. Zhelyabin, *On simple left-symmetric algebras*, J. Algebra **621**:1 (2023), 58–86.
- [7] V. N. Zhelyabin, A. S. Zakharov, *On Finite-Dimensional Simple Novikov Algebras of Characteristic p* , Siberian Math. J., **65**:3 (2024), 680–687.
- [8] A. S. Panasenکو, *Semiprime Novikov algebras*, Int. J. of Algebra and Comp., **32**:7 (2022), 1369–1378.
- [9] A. S. Panasenکو, *On radicals of Novikov algebras*, Comm. in Algebra, **52**:1 (2024), 140–147.
- [10] A. A. Albert, *On right alternative algebras*, Ann. Math. **50**:2 (1949), 318–328.
- [11] V. G. Skosyrsky, *Right-alternative algebras*, Algebra Logika, **23**:2 (1984), 185–192.
- [12] I. M. Miheev, *Simple right alternative rings*, Algebra Logika, **16**:6 (1977), 682–710.
- [13] S. V. Pchelintsev, O. V. Shashkov, *Simple right alternative superalgebras*, Fundam. Prikl. Mat., **24**:4 (2023), 171–197.
- [14] E. Formanek, *Noetherian Pi-Rings*, Comm. in Algebra, **1**:1 (1974), 79–85.
- [15] A. S. Panasenکو, *Just Infinite Alternative Algebras*, Mathematical Notes, **98**:5 (2015), 805–812.

- [16] V. N. Zhelyabin, A. S. Panasenko, *Nearly finite-dimensional Jordan algebras*, Algebra and Logic, **57**:5 (2018), 336–352
- [17] A. S. Panasenko, *Central orders in simple finite dimensional superalgebras*, Sib. Electr. Math. Rep., **17** (2020), 1027–1042.
- [18] A. P. Pozhidaev, *On endomorphs of right-symmetric algebras*, Siberian Math. J., **61**:5 (2020), 859–866.
- [19] A. P. Pozhidaev, I. P. Shestakov, *On the right-symmetric algebras with a unital matrix subalgebra*, Siberian Math. J., **62**:1 (2021), 138–147.
- [20] K. A. Zhevlakov, A. M. Slinko, I. P. Shestakov, A. I. Shirshov, *Rings that are nearly associative*, Academic Press, New York etc., 1982.
- [21] S. V. Pchelintsev, O. V. Shashkov, *Simple finite-dimensional right-alternative superalgebras of Abelian type of characteristic zero*, Izv. RAN. Ser. Mat., **79**:3 (2015), 131–158.
- [22] J. P. Da Silva, L. S. I. Murakami, I. P. Shestakov, *On right alternative superalgebras*, Commun. Algebra. **44** (2016), 240–252.
- [23] S. V. Pchelintsev, O. V. Shashkov, *Simple right-alternative unital superalgebras over an algebra of matrices of order 2*, Algebra and Logic, **58**:1 (2019), 77–94.

ALEXANDER SERGEEVICH PANASENKO
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 PR. KOPTYUGA, 4,
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: a.panasenko@g.nsu.ru